SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 13, číslo 25, 2016
ISSN 1336-524X

G

Slovenský časopis pre geometriu a grafiku

Ročník 13 (2016), číslo 25

ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku
Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Námestie slobody 17
812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:
Redakcia G - SSGG
ÚMF SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava
ssgg@ssgg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.
Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Euro.
Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adrese: www.ssgg.sk

Tlačí: ForPress Nitrianske tlačiarne, s. r. o.

Časopis G je citovaný v: Zentralblatt für Mathematik

SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
SLOVAK JOURNAL FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

ročník 13, číslo 25, 2016
volume 13, number 25, 2016

Obsah – Contents

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ

SG

PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective
to stimulate scientific research and teaching methodology
in the fields of geometry and computer graphics
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

SSGG
Institute of Mathematics and Physics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

O istej cyklickej biracionálnej korešpondencii v $\boldsymbol{P}^n(k)$

Ján Čižmár

Abstrakt
V článku je opísaná biracionálna cyklická korešpondencia T v n-rozmernom projektívnom priestore $\boldsymbol{P}^n(k)$ $(n \geq 2)$ nad algebricky uzavretým poľom k charakteristiky 0, ktorá je definovaná nasledovne: v priestore $\boldsymbol{P}^n$ je daná regulárna nadkvadrika Q a bod O, ktorý s nadkvadrikou neinciduje. S ľubovoľným bodom $(y) \in \boldsymbol{P}^n(k)$ korešponduje každý bod $(y') \in \boldsymbol{P}^n(k)$, ktorý má tieto vlastnosti: a) Body O, (y), (y') sú kolineárne; b) Ak $({}^1r)$, $({}^2r)$ sú priesečníky priamky $O(y)$ s nadkvadrikou Q, dvojpomer $(({}^1r)({}^2r)(y)(y')) = \varepsilon$, kde ε je primitívny m-tý koreň z 1 $(m \geq 3)$. Sú nájdené tieto množiny príslušné ku korešpondencii: a) fundamentálna varieta; b) množina všetkých iregulárnych bodov; c) množina všetkých biregulárnych bodov; d) homaloidný systém a jeho vlastnosti; e) štruktúrne vlastnosti asociovaného zobrazenia.

Kľúčové slová: n-rozmerný projektívny priestor $\boldsymbol{P}^n(k)$, regulárna nadkvadrika, biracionálna korešpondencia, fundamentálna varieta, množina iregulárnych bodov, množina biregulárnych bodov, racionálne zobrazenie, inverzné zobrazenie, systém homaloidov, štruktúrne vlastnosti objektov združených s korešpondenciou

Abstract
In this paper a birational cyclic correspondence T is described in an n-dimensional projective space $\boldsymbol{P}^n(k)$ $(n \geq 2)$ over an algebraically closed field k of characteristic 0. The correspondence T is described as follows: in the space $\boldsymbol{P}^n(k)$ a non-incident point O and a regular hyperquadric are given. A point $(y') \in \boldsymbol{P}^n(k)$ corresponds to an arbitrary point $(y) \in \boldsymbol{P}^n(k)$ if: a) points O, (y), (y') are collinear; b) if $({}^1r)$, $({}^2r)$ are intersection points of the straight line $O(y)$ with the hyperquadric Q, then the cross-ratio $(({}^1r)({}^2r)(y)(y')) = \varepsilon$, ε being the primitive m^{th} root of 1 $(m \geq 3)$. The following sets are found: a) fundamental variety; b) set of all irregular points; c) set of all biregular points; d) homaloidal system and its properties; e) structural properties of the associated map.

Key words: n-dimensional projective space $\boldsymbol{P}^n(k)$, regular hyperquadric, birational correspondence, fundamental variety, set of irregular points, set of biregular points, rational map, inverse map, hyperquadric, homaloidal system, structural properties of objects associated with the correspondence

1 Úvod

V práci [4] je opísaná kvadratická biracionálna korešpondencia v priestore $\boldsymbol{P}^n(k)$, v ktorej si korešpondujú dvojice bodov (y), (y') týchto vlastností: Je daná regulárna nadkvadrika Q a bod O, ktorý s ňou neinciduje. Ak body $({}^1r)$, $({}^2r)$ sú priesečníky priamky $O(y)$ s nadkvadrikou Q, dvojpomer $(({}^1r)({}^2r)(y)(y')) = \lambda$, kde $\lambda \neq 0, 1, -1$. Sú vyriešené všetky štandardné úlohy obvyklé pri biracionálnych korešpondenciách. S korešpondenciou je asociované racionálne zobrazenie f, ktoré je biregulárne na istej podmnožine U priestoru, otvorenej v Zariského topológii. To umožňuje opakovane aplikovať na všetky body množiny U zobrazenie f aj zobrazenie k nemu inverzné. Táto možnosť nie je v práci [4] preskúmaná, čím zostal opomenutý potenciálny problém štruktúrnych vlastností množiny všetkých takýchto konečných opakovaní („mocnín“).

V tejto práci sa skúma zdanlivo identická situácia s jedinou odlišnosťou, že úlohu konštanty λ preberá primitívna m-tá odmocnina ε ($m \geq 3$) z čísla 1. Tento na prvý pohľad nepodstatný rozdiel má podstatne odlišné dôsledky na algebrickú štruktúru *všetkých* mocnín zobrazenia f.

2 Definícia korešpondencie, asociované racionálne zobrazenie, základné vlastnosti korešpondencie a zobrazenia

2.1 Prípravné pojmy a výsledky

n-rozmerný projektívny priestor $\boldsymbol{P}^n(k)$ ($n \geq 2$) nad algebricky uzavretým poľom k charakteristiky 0 má v ďalšom texte skrátené označenie $\boldsymbol{P}^n$. Nech je v tomto priestore daná pevná homogénna projektívna sústava súradníc S^n. Nech Q je regulárna nadkvadrika priestoru $\boldsymbol{P}^n$, ktorej rovnica v sústave súradníc S^n má tvar

$$Q: \qquad Q(y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} y_i y_j = 0, \tag{1}$$

kde $a_{ij} = a_{ji}$ pre všetky $i, j = 0, 1, ..., n$, $i \neq j$; $a_{ij} \in k$; $A = |a_{ij}| \neq 0$; y_i, $i = 0, 1, ..., n$, sú homogénne neznáme.

Nech vrchol $O_0 = (z_0, 0, ..., 0)$, $z_0 \neq 0$, sústavy súradníc S^n neinciduje s nadkvadrikou Q; to je ekvivalentné s vlastnosťou $Q(O_0) = a_{00} z_0 \neq 0$, z čoho vyplýva $a_{00} \neq 0$. Označme: $O_0 = O$. Regulárnu kvadratickú formu s $(n + 1)$ algebricky nezávislými neurčitými $T_0, T_1, ..., T_n$ príslušnú k ľavej strane rovnice (1) označme $Q(T_0, T_1, ..., T_n) = Q(T)$. Ďalej označme

$$q_i(T) = \frac{1}{2}\frac{\partial Q(T)}{\partial T_i} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} T_j\ , \quad i = 0, 1, ..., n\,. \tag{2}$$

Polárna nadrovina ω bodu O vzhľadom na nadkvadriku Q má rovnicu

$$q_0(y) = 0\,. \tag{3}$$

V biracionálnej korešpondencii, ktorá bude skúmaná, budú hrať významnú úlohu priamky trsu priamok, ktorého stredom (vrcholom) je bod O.

Ak $p_u = O(u)$, $(u) = (u_0, u_1, ..., u_n) \neq O$, je priamka trsu a $(x) = (x_0, x_1, ..., x_n)$ je ľubovoľný bod priamky p_u, parametrické vyjadrenie všetkých bodov $(x) \in p_u$ pomocou základných bodov O, (u) má tvar

$$(x) = t_0 O + t_1 (u)\ , \tag{4}$$

$(t_0, t_1) \neq (0, 0)$; $t_0, t_1 \in k$; vyjadrenie pomocou súradníc má tvar

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0 z_0 + t_1 u_0 \\ x_i &= \phantom{t_0 z_0 +{}} t_1 u_i\,, \end{aligned} \tag{4$'$}$$

$i = 1, ..., n$.

2.2 Základné pojmy korešpondencie

Nech T je korešpondencia v priestore $\boldsymbol{P}^n$, ktorá je definovaná nasledovne.

Definícia 2.1. Hovoríme, že body $(u)=(u_0,u_1,\dots,u_n)$, $(u')=(u'_0,u'_1,\dots,u'_n)$ *si zodpovedajú* (*korešpondujú*) v korešpondencii T práve vtedy, keď

a) body O, (u), (u') sú kolineárne;

b) 1) body (u), (u') sú rôzne a s usporiadanou dvojicou priesečníkov $({}^1r)$, $({}^2r)$ priamky $p_u = O(u)$ s nadkvadrikou Q určujú dvojpomer $(({}^1r)({}^2r)(u)(u')) = \varepsilon$, kde ε je m-tá primitívna odmocnina 1, alebo

2) bod $(u) = (u')$, keď bod (u) je dotykovým bodom dotyčnice p_u z bodu O ku nadkvadrike Q.

Poznámka 2.1. Zdanlivo problematické je stanovenie poradia priesečníkov priamky p_u s nadkvadrikou Q v prípade, keď priamka p_u je sečnicou nadkvadriky. Pri výpočte dvojíc parametrov priesečníkov $({}^1r)$, $({}^2r)$ priamky p_u s nadkvadrikou Q sa ukáže, že obvyklé štandardné poradie prvých zložiek dvojíc parametrov ako koreňov istej kvadratickej rovnice určuje poradie priesečníkov jednoznačne. (Pozri (7) v práci [4].)

Definícia 3.1 dáva konštrukčný návod na nájdenie všetkých bodov (u') korešpondujúcich s bodom (u). (Podrobnosti sú uvedené v práci [4].)

Veta 2.1. Korešpondenciou T je určené racionálne zobrazenie $f: \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{P}'^n$.

Poznámka 2.2. Racionálne zobrazenie f sa nazýva zobrazením *asociovaným* s korešpondenciou T.

Dôkaz vety 2.1 je zhodný s dôkazom vety 2.1 v práci [4] s tým rozdielom, že konštanta λ z práce [4] je zamenená konštantou ε. To znamená:

S bodom $(u) \in \boldsymbol{P}^n$, ktorý

a) je rôzny od bodu O,

b) nie je bodom nadkvadriky Q,

c) nie je bodom polárnej nadroviny ω bodu O vzhľadom na nadkvadriku Q,

korešponduje každý bod $(u') \in \boldsymbol{P}^n$, ktorý má súradnice

$$\begin{aligned}\rho u'_0 &= a_{00}z_0^3\left((\varepsilon-1)Q(u)+\left\{\left[(1-\varepsilon)\,q_0(u)\right]-\left[(\varepsilon+1)\sqrt{\left[q_0(u)\right]^2-a_{00}Q(u)}\right]\right\}u_0\right)\\ \rho u'_i &= a_{00}z_0^3\left\{\left[(1-\varepsilon)q_0(u)\right]-\left[(\varepsilon+1)\sqrt{\left[q_0(u)\right]^2-a_{00}Q(u)}\right]\right\}u_i,\ i=1,\dots,n;\ \rho\in k,\ \rho\neq 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Rovnice (5) ukazujú, že všetky súradnice každého bodu (u') korešpondujúceho v korešpondencii T s bodom (u) – pokiaľ bod (u') vôbec existuje – sú algebrické kvadratické výrazy v súradniciach bodu (u). Tento vzťah odôvodňuje nasledovnú vetu.

Veta 2.2. Zobrazenie f je racionálne zobrazenie stupňa 2.

Prienikom nadroviny ω s nadkvadrikou Q je $(n-2)$-rozmerná nadkvadrika $Q^{(n-2)}$ definovaná sústavou rovníc

$$\begin{aligned} &Q(y) = 0 \\ &q_0 = 0 . \end{aligned} \tag{6}$$

Analýza rovníc (5) zobrazenia f rozširuje definičnú oblasť zobrazenia; vyjadruje to nasledovný dôsledok vety 2.2.

Dôsledok 2.1. Racionálne zobrazenie f je definované aj vo všetkých bodoch množiny $\omega \setminus Q^{(n-2)}$.

2.3 Inverzné zobrazenie

Lema 2.1. Nech $(a)=(a_0, a_1)$, $(b)=(b_0, b_1)$, $(c)=(c_0, c_1)$, $(d)=(d_0, d_1)$, $(h)=(h_0, h_1)$ je päť po dvojiciach rôznych kolineárnych bodov daných parametrickým vyjadrením v lokálnej sústave súradníc na priamke, s ktorou incidujú.

a) Ak dvojpomer $((a)(b)(c)(d)) = \mu$, tak $((a)(b)(d)(c)) = 1/\mu$.

b) Ak $((a)(b)(c)(d)) = \mu$ a $((a)(b)(d)(h)) = \nu$, tak $((a)(b)(c)(h)) = \mu\nu$.

Teda: $((a)(b)(c)(d)).((a)(b)(d)(h)) = ((a)(b)(c)(h))$.

Platnosť vzťahov a) a b) si pozorný čitateľ overí sám berúc do úvahy definíciu dvojpomeru.

Taktiež si možno jednoduchým výpočtom overiť, že pre štvoricu kolineárnych bodov (a), (b), (c), (d), kde $(a) \neq (b) \neq (c) \neq (a)$ a $(a) \neq (d) \neq (b)$, platí $((a)(b)(c)(d)) = 1$ práve vtedy, keď $(c) = (d)$.

Veta 2.3. K racionálnemu zobrazeniu f existuje inverzné racionálne zobrazenie f^{-1}. Dôkaz vety je opakovaním dôkazu vety 2.3 práce [4] po zámene konštanty λ konštantou ε.

Analogicky sa dostávajú rovnice inverzného zobrazenia f^{-1}, čo vyjadruje nasledovná veta.

Veta 2.4. Inverzné zobrazenie f^{-1} je racionálne zobrazenie stupňa 2.

Dôkaz. Ak $(u') \in f(u)$ a $(u) = f^{-1}(u')$, homogénne súradnice bodov (u), (u') sú zviazané okrem rovníc (5) rovnicami

$$\begin{aligned} \rho u_0 &= \frac{1}{\varepsilon} a_{00} z_0^3 \left((\varepsilon - 1) Q(u') + \left\{ \left[(1-\varepsilon)\, q_0(u') \right] - \left[(\varepsilon + 1) \sqrt{\left[q_0(u') \right]^2 - a_{00} Q(u')} \right] \right\} u'_0 \right) \\ \rho u_i &= \frac{1}{\varepsilon} a_{00} z_0^3 \left\{ \left[(1-\varepsilon) q_0(u') \right] - \left[(\varepsilon + 1) \sqrt{\left[q_0(u') \right]^2 - a_{00} Q(u')} \right] \right\} u'_i, \ \ i = 1, \ldots, n;\ \rho \in k,\ \rho \neq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Rovnice (7) potvrdzujú, že zobrazenie f^{-1} inverzné k zobrazeniu f je racionálne zobrazenie stupňa 2.

Nech U je definičná oblasť zobrazenia f, U' definičná oblasť zobrazenia f^{-1}. Dvojice $((u), f(u))$ a $(f^{-1}(u'), (u'))$ pre $(u), (u') \in U \cap U'$ sú dvojicami korešpondujúcich bodov v dvojici (f, f^{-1}) navzájom inverzných racionálnych zobrazení asociovaných s korešpondenciou T. Tento fakt je dôvodom na pomenovanie korešpondencie T názvom *biracionálna korešpondencia*.

2.4 Fundamentálna varieta; množina iregulárnych bodov; množina biregulárnych bodov

Základné pojmy a vlastnosti týkajúce sa variety fundamentálnych bodov sú uvedené v časti 2.4 práce [4].

Veta 2.5. Fundamentálnou varietou korešpondencie T je reducibilná zmiešaná $(n-2)$-rozmerná varieta F, ktorej komponentmi sú

1) bod O;
2) kvadratická $(n-2)$-rozmerná varieta $Q^{(n\text{-}2)}$, ktorá je prienikom nadkvadriky Q s polárnou nadrovinou ω bodu O vzhľadom na nadkvadriku Q.

Dôkaz. Súradnice všetkých fundamentálnych bodov korešpondencie T spĺňajú rovnice

$$\begin{aligned}&\left((\varepsilon-1)Q(y)+\left\{\left[(1-\varepsilon)\,q_0(y)\right]-\left[(\varepsilon+1)\sqrt{\left[q_0(y)\right]^2-a_{00}Q(y)}\right]\right\}y_0\right)=0\\&\left\{\left[(1-\varepsilon)q_0(y)\right]-\left[(\varepsilon+1)\sqrt{\left[q_0(y)\right]^2-a_{00}Q(y)}\right]\right\}y_i=0\,,\ i=1,\ldots,n\,.\end{aligned}\tag{8}$$

Analýzou rovníc (8) sa ukazuje, že množinou všetkých bodov, ktorých súradnice vyhovujú týmto rovniciam, je práve bod O a všetky body variety $Q^{(n\text{-}2)}$. (Detaily dôkazu kopírujú dôkaz vety 2.5 v práci [4].)

Teda: $F = O \cup Q^{(n\text{-}2)}$.

Poznámka 2.3. Každý bod fundamentálnej variety F je jednoduchým bodom tejto variety.

Dôkaz tejto vlastnosti je zhodný s dôkazom analogickej vlastnosti fundamentálnej variety v práci [4].

Množina iregulárnych bodov korešpondencie

Ako je známe, množina všetkých *iregulárnych bodov* J korešpondencie T je vzorom fundamentálnej variety F zobrazenia f, teda $J = f^{-1}(F)$. Množina J nemusí byť uzavretá v Zariského topológii priestoru $\boldsymbol{P}^n$, pretože racionálne zobrazenie nie je vo všeobecnosti uzavreté.

Lema 2.2. Pre každý bod $(m) \in Q^{(n\text{-}2)}$ je priamka $p_m = O(m)$ dotyčnicou nadkvadriky Q v bode (m).

Dôkaz pozri v [5], str. 21.

Invariantným bodom korešpondencie T sa nazýva každý bod $(h) \in \boldsymbol{P}^n$, ktorý je prvkom množiny všetkých prvkov korešpondujúcich s bodom (h) v korešpondencii T.

Úvahou zhodnou so skúmaním invariantných bodov v práci [4] sa dospeje k nasledovnému výsledku.

Veta 2.6. Množinou všetkých invariantných bodov korešpondencie T je varieta $Q^{(n\text{-}2)}$.

Triviálny je nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 2.2. Dotyčnica $d_m = O(m)$ ($(m) \in Q^{(n\text{-}2)}$) je priamkou dotykovej nadroviny τ^m nadkvadriky Q v bode (m).

Dotyková nadrovina τ^m nadkvadriky Q v bode $(m) \in Q^{(n\text{-}2)}$ má rovnicu

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(m) y_i = 0 \tag{9}$$

s neznámymi y_i, $i = 1, ..., n$.

(Incidenciu každého bodu dotyčnice d_m s dotykovou nadrovinou τ^m možno overiť elementárnym výpočtom.)

Dôsledok 2.3. Množina všetkých bodov všetkých dotyčníc nadkvadriky Q incidujúcich s bodom O je kvadratická kužeľová nadplocha $K^{(n\text{-}1)}$, ktorej vrcholom je bod O a určujúcou varietou $Q^{(n\text{-}2)}$.

Kužeľová nadplocha $K^{(n\text{-}1)}$ má rovnicu

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(y) y_i = 0 \tag{10}$$

s neznámymi y_i, $i = 0, 1, ..., n$.

Lema 2.3. Každý bod (w) dotyčnice d_m rôzny od bodov O a (m) je iregulárnym bodom korešpondencie T ; jeho obrazom $(w') = f(w)$ v racionálnom zobrazení f je bod (m).

Dôkaz. V parametrickom vyjadrení bodov priamky d_m so základnými bodmi O, (m) má každý bod $(w) \in d_m$ vyjadrenie

$$(w) = t_0 O + t_1 (m), \quad (t_0, t_1) \neq (0, 0),$$

t. j.

$$\begin{aligned} w_0 &= t_0 z_0 + t_1 m_0, \\ w_i &= \phantom{t_0 z_0 +{}} t_1 m_i, \quad i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{11}$$

Sériou výpočtov zhodných s výpočtami v dôkaze lemy 2.3 v práci [4] sa dospieva k výsledku

$$(w') = \left((1-\varepsilon) t_0 t_1 a_{00}^2 z_0^4 m_i\right)_{i=0}^{n} \sim (m)$$

v dôsledku vlastnosti $t_0 t_1 \neq 0$.

Poznámka 2.4. Ak označíme množinu všetkých iregulárnych bodov priestoru $\boldsymbol{P}^n$ zobrazujúcich sa v zobrazení f na všetky body variety $Q^{(n\text{-}2)}$ znakom J_2, možno obsah lemy 2.3 sformulovať takto:

$$J_2 = f^{-1}(Q^{(n\text{-}2)}) = K^{(n\text{-}1)} \setminus F .$$

Nech $S = \{s\}$ označuje trs priamok priestoru $\boldsymbol{P}^n$ so stredom (vrcholom) O a nech platí, že $B = \{p\} = S \setminus K^{(n\text{-}1)}$ je podmnožina všetkých priamok trsu S, ktoré nie sú priamkami kužeľovej nadplochy $K^{(n\text{-}1)}$. Všetky priamky podmnožiny B sú sečnicami nadkvadriky Q. Fundamentálny bod O je spoločným bodom všetkých priamok množiny B.

Množinou $J_1 = f^{-1}(O)$ všetkých iregulárnych bodov priestoru $\boldsymbol{P}^n$ zobrazujúcich sa zobrazením f na bod O je množina všetkých tých bodov (u) priamok $p \in B$, v ktorých je zobrazenie f definované a $f(u) = O$.

Veta 2.7. Množinou iregulárnych bodov J_1 korešpondencie T korešpondujúcich s fundamentálnym bodom O je nadkvadrika Q^O s rovnicou

$$Q^O\!:\; (\varepsilon+1)^2 a_{00} Q(y) - 4\varepsilon\left[q_0(y)\right]^2 = 0\,, \tag{12}$$

kde y_i, $i = 0, 1, ..., n$, sú neznáme.

Dôkaz je zhodný s dôkazom vety 2.6 v práci [4].

Množinu všetkých iregulárnych bodov J súhrnne charakterizuje nasledujúca veta.

Veta 2.8. Všetky iregulárne body J korešpondencie T tvoria množinu

$$J = J_1 \cup J_2 = (Q^O \cup K^{(n-1)}) \setminus F.$$

Dôsledok 2.4. Všetky biregulárne body korešpondencie T tvoria množinu $U = P^n \setminus (J \cup F)$.

3 Systém homaloidov

Základné definície a vlastnosti týkajúce sa *homaloidov* sú v potrebnom rozsahu uvedené v časti 3 práce [4]. Základná informácia o „všeobecnom“ homaloide je obsiahnutá v nasledujúcej vete.

Veta 3.1. Nech β je nadrovina priestoru $\boldsymbol{P}^n$ rôzna od nadroviny ω a neobsahujúca bod O, daná rovnicou

$$\beta\!:\; b_0 y_0 + b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n = 0 \tag{13}$$

s neznámymi y_i, $i = 0, 1, ..., n$.

Obrazom $f(\beta)$ nadroviny β v racionálnom zobrazení f je nadkvadrika H^β s rovnicou

$$H^\beta(y) = \frac{1}{\varepsilon} a_{00} z_0^3 \left| \begin{array}{l} b_0\left((1-\varepsilon)Q(y) + \left\{ (\varepsilon-1)\, q_0(y) - \left[(\varepsilon+1)\sqrt{[q_0(y)]^2 - a_{00}Q(y)} \right] \right\} y_0 \right) + \\ + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \left\{ \left[(\varepsilon-1) q_0(y) \right] - \left[(\varepsilon+1)\sqrt{[q_0(y)]^2 - a_{00}Q(y)} \right] \right\} y_i \end{array} \right| = 0 \tag{14}$$

kde y_i, $i = 0, 1, ..., n$, sú neznáme.

Dôkaz tvrdenia tejto vety je pre inú transformáciu detailne uvedený v časti 3 práce [4].

Poznámka 3.1

a) Obe podmienky o polohe nadroviny β ku komponentom O a $Q^{(n-2)}$ fundamentálnej variety F ($O \notin \beta$, $Q^{(n-2)} \not\subset \beta$) znamenajú, že za n lineárne nezávislých bodov určujúcich nadrovinu β možno vybrať biregulárne body zobrazenia f.

b) Následky negácie podmienok polohy nadroviny β uvedených vyššie by sa mohli sledovať v ďalšom výskume vlastností homaloidného systému.

Veta 3.2. Nadkvadrika H^{β} uvedená vo vete 3.1 je ireducibilná. Obsahuje fundamentálnu varietu $F = O \cup Q^{(n\text{-}2)}$. Každý bod fundamentálnej variety F je jednoduchým bodom nadkvadriky H^{β}.

Dôkaz vety by bol doslovným opakovaním dôkazu vety 3.2 v časti 3 práce [4].

4 Štruktúrne vlastnosti racionálneho zobrazenia f asociovaného s biracionálnou korešpondenciou

K racionálnemu zobrazeniu f : $\boldsymbol{P}^n \rightarrow \boldsymbol{P}^n$ asociovanému s biracionálnou korešpondenciou $T \subset \boldsymbol{P}^n \times \boldsymbol{P}^n$ prislúcha jednoznačne trojica podmnožín F, J, U priestoru $\boldsymbol{P}^n$ s týmito vlastnosťami:

1. F je varieta fundamentálnych bodov zobrazenia f
2. J je množina všetkých iregulárnych bodov zobrazenia f
3. U je množina všetkých biregulárnych bodov zobrazenia f

Principiálne by aj k inverznému zobrazeniu f^{-1}: $\boldsymbol{P}^n \rightarrow \boldsymbol{P}^n$ chápanému ako samostatné zobrazenie patrila analogická trojica F', J', U' s vlatnosťami opísanými v bodoch 1 až 3. Z rovníc (5) zobrazenia f a rovníc (7) zobrazenia f^{-1} je zrejmé, že $F' = F$, t. j. fundamentálna varieta F korešpondencie T je tá istá pre obe zobrazenia f, f^{-1}, a množina všetkých biregulárnych bodov U je množina všetkých bodov, v ktorých obe zobrazenia sú regulárne (t. j. definované) a navzájom inverzné. U je teda množina všetkých bodov $(u) \in \boldsymbol{P}^n$, pre ktoré existuje jediný obraz $f(u)$ aj jediný obraz $f^{-1}(u)$ a $f^{-1}(f(u)) = f(f^{-1}(u)) = (u)$. To znamená: Pre každý bod $(u) \in U$ je $f(u) = (u') \in U$ aj $f^{-1}(u) = (u'') \in U$, čo znamená, že množina U je uzavretá vzhľadom na tvorbu obrazov v zobrazení f aj v zobrazení f^{-1}: $f(U) \subseteq U$ aj $f^{-1}(U) \subseteq U$.

Jednoduchou úvahou sa dospeje k odôvodneniu tvrdení, že f je bijektívne zobrazenie a $f(U) = U$. Zobrazenia f a f^{-1}, ktorých spoločnou oblasťou definície i oblasťou hodnôt je množina U, možno chápať ako unárne operácie na tejto množine a opakované aplikácie týchto zobrazení nazvať *mocninami*. Sú zavedené nasledujúcou definíciou.

Definícia 4.1. Nech f je zobrazenie asociované s biracionálnou korešpondenciou T a f^{-1} zobrazenie inverzné so zobrazením f. Mocniny $f^{(k)}$, $(f^{-1})^{(k)}$ pre všetky nezáporné čísla k sa definujú takto:

I. 1. $f^{(1)} := f$

2. $f^{(k+1)} = f \; f^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$

II. 1. $f^{(-1)} := f^{-1}$

2. $f^{(-k-1)} = f^{-1} \; f^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$

III. $f^{(0)} := f^{-1} \; f = f \; f^{-1} = I$; I je identické zobrazenie na množine U.

Označenia možno zjednotiť a vynechaním zátvoriek zjednodušiť takto:

$f^{(s)} =: f^{s}$ pre všetky celé čísla s ($s \in Z$); f^{s} sa nazýva s-tou *mocninou* zobrazenia f.

Označme: $\{f^s\}_{s\in Z} =: \mathcal{F}$. Na množine $\mathcal{F}$ je prirodzeným spôsobom zavedená binárna operácia , daná skladaním konečného počtu zobrazení f a f^{-1} podľa definície 4.1 mocnín.

Platí: $f^t \circ f^s = f^{t+s}$ pre každé $s, t \in Z$.

Veta 4.1. Štruktúra $F = (\mathcal{F}, \circ)$ je komutatívna grupa.

Dôkaz vyplýva triviálne z vlastností zobrazení f, f^{-1} a definície 4.1.

Výsledok aplikácie mocniny f^s zobrazenia f na ľubovoľný biregulárny bod (u) zistíme nasledovnou úvahou.

Pre ľubovoľný bod $(u) \in U$ je priamka $p_u = O(u)$ sečnicou nadkvadriky Q a prienik $p_u \cap Q = \{(^1r), (^2r)\}$ je dvojica rôznych bodov. Označme $f(u) = (u') =: (u^{(1)})$. Podľa voľby bodu (u) sú body (u), $(u^{(1)})$ rôzne a dvojpomer $((^1r)(^2r)(u)(u^{(1)})) = \varepsilon$. Opakovanou aplikáciou zobrazenia f na bod $(u^{(1)})$ (ak $s > 1$) dostanú sa body $(u^{(2)})$, ...; označme $f^s(u) =: (u^{(s)})$.

Veta 4.2. Dvojpomer $((^1r)(^2r)(u)(u^{(s)})) = \varepsilon^s$.

Dôkaz vety vyplýva z lemy 2.1 v práci [4] a jej rozšírenia úplnou indukciou na ľubovoľné celé číslo s.

Lema 4.1. Ak ε je m-tá primitívna odmocnina z 1 ($m \geq 2$) v poli k, množina $\{\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{m-1}, \varepsilon^m = 1\}$ je množinou *všetkých* po dvojiciach rôznych m-tých odmocnín (koreňov) z 1, ktoré vzhľadom na operáciu násobenia v poli k tvoria komutatívnu grupu.

Dôkaz sa nachádza napr. v [6], s. 153 – 154.

Uvedená grupa je *konečnou cyklickou grupou rádu m generovanou prvkom* ε. Označme ju Γ .

Niektoré dôležité vlastnosti grupy Γ :

1. Navzájom inverznými prvkami grupy Γ sú každé dva prvky ε^i , ε^j, kde $i + j = m$.
2. $\varepsilon^s \,.\, \varepsilon^t = \varepsilon^h$, kde $h \equiv (s + t) \pmod m$; $s, t \in \mathbf{Z}$; $h \in \{1, 2, ..., m\}$.

Z lemy 4.1 vyplýva niekoľko dôležitých dôsledkov pre grupu $\boldsymbol{F}$ a jej akciu na množine U.

Veta 4.3. Pre každý bod $(u) \in U$ množina $\{f^s(u)\}_{s\in Z}$ obsahuje práve m po dvojiciach rôznych prvkov.

Dôkaz. Táto množina je utvorená práve bodmi $(u^{(i)})$, $i = 1, ..., m$, ktoré majú vlastnosť: $((^1r)(^2r)(u)(u^{(i)})) = \varepsilon^i$, $i = 1, 2, ..., m$. Pre $i = m$ je $\varepsilon^m = 1$, teda $((^1r)(^2r)(u)(u^{(m)})) = 1$, čo nastáva práve vtedy, keď $(u) = (u^{(m)})$.

Dôsledok 4.1. Grupa $\boldsymbol{F}$ je konečná cyklická grupa rádu m, generovaná prvkom f .

Prvkami grupy F sú mocniny f, f^2, ..., $f^m = I$ (identické zobrazenie na U). Jediným generátorom grupy je zobrazenie f . Pre ľubovoľný prvok $f^s \in \mathcal{F}$ platí: $f^s = f^{s'}$, kde $s' \equiv s \pmod m$, $s' \in \{1, ..., m\}$.

Pre každý bod $(u) \in U$ možno v množine bodov $\mathcal{U} = \{(u^{(1)}), \ldots, (u^{(m-1)}), (u^{(m)})\}$ zaviesť operáciu $\circ$ predpisom: $(u^{(i)}) \circ (u^{(j)}) = : (u^{(h)})$, kde $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ a $h \equiv (i + j) \pmod m$. Označme: $\Gamma_u = (\mathcal{U}, \circ)$.

Dôsledok 4.2. Štruktúra Γ_u je konečná cyklická grupa rádu m generovaná prvkom $(u^{(1)}) = f(u)$.

Dôsledok 4.3. Ak $(u) \in U$ a $p_u = O(u)$, pre každý biregulárny bod $(w) \in p_u$ je orbita prvku (w) utvorená akciou grupy F vzhľadom na jej operáciu $\circ$ konečnou cyklickou grupou rádu m generovanou prvkom $f(w)$.

Definícia 4.2. Bijektívna transformácia g množiny V, pre ktorú $g^m = I_V$ (identická transformácia na množine V), sa nazýva cyklickou transformáciou rádu m množiny V.

Pre $m = 2$ sa cyklická transformácia nazýva involúciou.

Veta 4.4. Zobrazenie $f : U \to U$ asociované s biracionálnou korešpondenciou T je cyklickou transformáciou rádu m na množine U.

5 Niekoľko poznámok k štruktúrnym vlastnostiam asociovaného zobrazenia v práci [4]

V článku [4] je definovaná biracionálna korešpondencia T zhodným spôsobom ako v tomto článku definíciou 2.1 s tým rozdielom, že obraz $(u') = f(u)$ bodu (u) v racionálnom zobrazení f asociovanom s korešpondenciou T (ak obraz existuje) určuje s bodmi $({}^1r)$, $({}^2r)$, (u) (rovnakého významu ako v tomto článku) dvojpomer hodnoty $\lambda = (({}^1r)({}^2r)(u)(u'))$, kde $\lambda \neq 0$, $1, -1$. Aby tento prípad korešpondencie bol rôzny od prípadu skúmaného v tomto článku, je potrebné doplniť podmienku $\lambda \neq \varepsilon$, kde ε je primitívna m-tá odmocnina (koreň) z 1 pre každé prirodzené číslo $m \geq 3$. (Prípad $\lambda = -1$ bol preskúmaný v článku [7]; je to prípad korešpondencie, ktorej asociované racionálne zobrazenie je involúciou.)

Za uvedených podmienok je definíciou 4.1. určený aj systém všetkých mocnín $\mathcal{F} = \{f^s\}_{s\in Z}$ zobrazenia f a pre operáciu ich kompozície platí veta 4.1. Platí taktiež veta 4.2 so zámenou konštanty ε konštantou λ. Prvým podstatným dôsledkom rozdielnych vlastností konštánt λ *a* ε je nasledujúca veta, ktorá je pendantom vety 4.3.

Veta (4.3)´. Pre každý bod $(u) \in U$ je množina $\{f^s(u)\}_{s\in Z}$ nekonečná.

Veta vyplýva z vlastností mocnín prvku λ: $\lambda^i \neq \lambda^j$ pre každú dvojicu rôznych celých čísel i, j.

Pretože $f^i(u) = (u^{(i)})$ a $f^j(u) = (u^{(j)})$, $(({}^1r)({}^2r)(u)(u^{(i)})) = \lambda^i$ a $(({}^1r)({}^2r)(u)(u^{(j)})) = \lambda^j$, je $(u^{(i)}) \neq (u^{(j)})$, teda $f^i(u) \neq f^j(u)$.

Rovnako je zrejmý aj nasledovný dôsledok.

Dôsledok (4.1)´. Grupa $F = (\mathcal{F}, \circ)$ je nekonečná cyklická komutatívna grupa generovaná prvkom f.

Ak $\mathcal{U} = \{(u^{(i)})\}_{i\in Z}$ a $\circ$ je binárna operácia na $\mathcal{U}$ definovaná predpisom $(u^{(i)}) \circ (u^{(j)}) = (u^{(i+j)})$ pre každú dvojicu $(i, j) \in Z \times Z$, vzniká štruktúra $\Gamma_u := (\mathcal{U}, \circ)$.

Dôsledok (4.2)´. Γ_u je nekonečná komutatívna cyklická grupa generovaná prvkom $(u^{(1)}) = f(u)$.

Dôsledok (4.3)´. Pre každé dva rôzne biregulárne body (u), (w) sú grupy Γ_u , Γ_w izomorfné a ich bodové množiny $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ sa buď rovnajú, alebo sú disjunktné.

Dôkaz. Pre vzájomnú polohu priamok $p_u = O(u)$, $p_w = O(w)$ sú dve možnosti.

a) Body O, (u), (w) sú kolineárne; z toho vyplýva $p_u = p_w$ a bodové množiny $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ grúp Γ_u , Γ_w sú súmiestne a ekvivalentné, lebo obe majú tú istú kardinalitu $\aleph_0$.

1) Ak $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \neq \varnothing$, existujú $i, j \in Z$ tak, že $(u^{(i)}) = (w^{(j)})$, t. j. $((^1r)(^2r)(u)(u^{(i)})) = \lambda^i$, $((^1r)(^2r)(w)(w^{(j)})) = \lambda^j$. Nech $((^1r)(^2r)(u)(w)) = \mu$. Pretože $(u) \neq (w)$ (podľa predpokladu), je $\mu \neq 1$. Potom $\mu \cdot \lambda^j = ((^1r)(^2r)(u)(w)) \cdot ((^1r)(^2r)(w)(w^{(j)})) = ((^1r)(^2r)(u)(w^{(j)}))$ podľa lemy 2.1 práce [4]. Pretože $(w^{(j)}) = (u^{(i)})$, je $\mu \cdot \lambda^j = ((^1r)(^2r)(u)(u^{(i)})) = \lambda^i$, odkiaľ $\mu = \lambda^{i-j}$. Teda $((^1r)(^2r)(u)(w)) = \lambda^{i-j}$. Na druhej strane $\lambda^{i-j} = ((^1r)(^2r)(u)(u^{(i-j)}))$. Pretože usporiadanou trojicou vhodných bodov (kolineárnych a po dvojiciach rôznych) a predpísanou hodnotou dvojpomeru je štvrtý bod usporiadanej štvorice s týmto dvojpomerom jednoznačne určený, platí $(w) = (u^{(i-j)})$. Teda bod (w) je prvkom množiny $\mathcal{U}$ a všetky jeho obrazy $f^i(w)$ sú prvkami tak množiny $\mathcal{U}$ (podľa definície grupy Γ_u), ako aj množiny $\mathcal{W}$ (podľa definície grupy Γ_w). Teda: $\mathcal{U} = \mathcal{W}$.

Izomorfizmus grúp $\Gamma_u \xrightarrow{\sim} \Gamma_w$ je určený priradením $(w) \mapsto (u^{(i-j)})$.

2) Ak $(w) \notin \mathcal{U}$, tak $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \varnothing$. Izomorfizmus $\Gamma_u \xrightarrow{\sim} \Gamma_w$ je zrejmý, lebo obe grupy sú izomorfné s aditívnou grupou okruhu Z.

b) Ak sú body O, (u), (w) nekolineárne, priamky p_u, p_w sú rôznobežky s jediným spoločným fundamentálnym bodom O . Bodové množiny $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ grúp Γ_u, Γ_w sú disjunktné. Izomorfizmus grúp sa zakladá na tých istých argumentoch ako v bode a).

Dôsledok (4.4)´. Ak (u) je biregulárny bod zobrazenia f , na priamke $p_u = O(u)$ existuje nekonečne mnoho navzájom izomorfných nekonečných cyklických grúp typu Γ_u, z ktorých každé dve rôzne sú bodovo disjunktné.

5 Záver

V klasickom období algebrickej geometrie patrilo k neopomenuteľným zložkám skúmania biracionálnych korešpondencií v projektívnych rovinách a v trojrozmerných projektívnych priestoroch nad poľom reálnych alebo komplexných čísel riešenie problémov postulácie a ekvivalencie fundamentálnych variet a množín iregulárnych bodov na homaloidoch. Aktuálny býval spravidla aj problém singulárnych homaloidov. Všetky tieto témy nestrácajú význam ani pri rozšírení problematiky biracionálnych korešpondencií do n-rozmerného priestoru. Všeobecný historický rast abstrakcie (temer) v každej oblasti matematiky a zmena hierarchie významu tém však odôvodňuje zaradenie nového štrukturálneho pohľadu do rozšíreného okruhu tém a azda aj jeho prednosť pred rutinným riešením tradičnej problematiky. Samozrejme, paušálne vyradenie tematiky historického pôvodu by bolo neprezieravým činom, ktorý by potenciálne mohol ochudobniť budúcnosť o hodnotné výsledky. Mnohé najnovšie výsledky rozšírenia zdanlivo uzavretej klasickej teórie kriviek a plôch do priestorov rozmeru 4 a 5 totiž ukazujú, že jednoduché analógie s klasickými metódami a výsledkami občas zlyhávajú a určité nové prekvapivé výsledky sa získavajú za cenu zdĺhavých sofistikovaných inovácií.

Literatúra

[1] BYDŽOVSKÝ, B. *Úvod do algebraické geometrie*. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948. 668 s.

[2] HUDSON, H. P. *Cremona transformations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.

[3] ŠAFAREVIČ, I. R. *Osnovy algebraičeskoj geometrii.* Moskva: Nauka, 1972. 568 s.

[4] ČIŽMÁR, J. O istej kvadratickej biracionálnej korešpondencii v $\boldsymbol{P}^n(k)$. In: *G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, ročník 12 (2015), číslo 23, s. 17 – 30.

[5] ČIŽMÁR, J. O istej kubickej involúcii v $\boldsymbol{P}^n(k)$. In: *G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, ročník 10 (2013), číslo 20, s. 5 – 23.

[6] VARDEN, VAN DER, B. L. *Algebra*. Moskva: Nauka, 1976. 648s.
Ruský preklad z nemeckého jazyka:

WAERDEN, VAN DER, B. L. *Algebra I*. Berlín – Heidelberg – New York: Springer, 1971.

WAERDEN, VAN DER B. L. *Algebra II*. Berlín – Heidelberg – New York: Springer, 1967

[7] ČIŽMÁR, J. O istej kvadratickej involúcii v $\boldsymbol{P}^n(k)$. In: *G – Slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, ročník 11 (2014), číslo 22, s. 15 - 28

Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.

Astrová 19, 821 01 Bratislava, SR
e-mail: jan.cizmar80@gmail.com

Součet konečné posloupnosti mocnin přirozených čísel a dokonalé čtverce

Milada Kočandrlová, Jana Marková

Abstrakt

Pro konečný součet mocnin přirozených čísel jsou ukázány dva možné přístupy pomocí řešení lineárních rovnic. Z porovnání tabulky známých koeficientů mnohočlenů s Pascalovým trojúhelníkem je odvozen jednoduchý algoritmus pro generování součtů. Na závěr je uvedeno použití součtu druhých mocnin přirozených čísel při hledání dokonalých čtverců.

Klíčová slova: konečný součet, mocnina přirozeného čísla, kombinační číslo, Pascalův trojúhelník, Bernoulliovo číslo, čtvercové číslo, pyramidové číslo, dokonalý čtverec

Abstract

Two possible approaches to find the final sum of the powers of natural numbers are shown, by means of solving linear equations . Simple algorithm is derived to generate sums, comparing the table of known coefficients of polynomials with Pascal triangle. Finally, application of sum of squares of natural numbers to finding perfect squares is presented.

Key words: finite sum, power of natural number, combinatorial number, Pascal triangle, Bernoulli number, square number, pyramidal number, perfect square

Úvod

K prvním *n* členům aritmetické posloupnosti přirozených čísel

$$P_1 = \{1,2,3,\cdots,n\}$$

je posloupnost diferencí sousedních členů konstantní, $d_1 = 1$, a má *n*-1 členů. Posloupnost P_1 nazveme aritmetickou posloupností prvního stupně, její diferenci d_1 první diferencí. Pro součet posloupnosti P_1 platí známý vzorec

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

To je mnohočlen druhého stupně bez absolutního členu pro proměnnou *n*.

1 Součet mocnin přirozených čísel pomocí řešení lineárních algebraických rovnic

Utvoříme posloupnost druhých mocnin členů z posloupnosti P_1

$$P_2 = \{1, 2^2, 3^2, \cdots, n^2\}$$

a nazveme ji aritmetickou posloupností druhého stupně. Posloupnost druhých diferencí členů posloupnosti P_2 je konstantní, $d_2 = 2$, a má *n*-2 členů. Předpokládejme, že součet členů posloupnosti P_2 je mnohočlen třetího stupně

$$S_2 = An^3 + Bn^2 + Cn\,,$$

kde A,B,C jsou konstanty. Určíme je z podmínky, že pro $n = 1$ je součet 1, pro $n = 2$ je součet 5 a pro $n = 3$ je součet 14. Dostaneme tak soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé

$$1 = A + B + C\ ,$$

$$5 = 8A + 4B + 2C\ ,$$

$$14 = 27A + 9B + 3C.$$

Její řešení je trojice $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$. Mnohočlen S_2 můžeme upravit na tvar

$$S_2 = \frac{n(n+1)}{2}\frac{2n+1}{3}\ .$$

Analogicky k předchozím odstavcům utvořme posloupnost třetích mocnin z posloupnosti P_1

$$P_3 = \{1, 2^3, 3^3, \cdots, n^3\}.$$

V tomto případě je konstantní až posloupnost třetích diferencí $d_3 = 6 = 3!$, počet jejích členů je n-3. Součet členů posloupnosti P_3 hledejme ve tvaru mnohočlenu čtvrtého stupně

$$S_3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn\ .$$

Pro neznámé koeficienty sestavíme soustavu čtyř lineárních rovnic

$$1 = A + B + C + D\ ,$$

$$9 = 16A + 8B + 4C + 2D,$$

$$36 = 84A + 27B + 9C + 3D,$$

$$100 = 256A + 64B + 16C + 4D.$$

Jejímž řešením je čtveřice $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right)$. Součet můžeme upravit na tvar

$$S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Posloupnost čtvrtého stupně $P_4 = \{1, 2^4, 3^4, \cdots, n^4\}$ má konstantní až čtvrtou diferenci $d_4 = 4!$. Její součet je mnohočlen pátého stupně

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)}{2}\frac{2n+1}{3}\frac{3n^2+3n-1}{5}\ .$$

Posloupnost pátého stupně $P_5 = \{1, 2^5, 3^5, \cdots, n^5\}$ má konstantní pátou diferenci $d_5 = 5!$. Její součet je mnohočlen šestého stupně

$$S_5 = \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\frac{2n^2+2n-1}{3}\ .$$

Posloupnost šestého stupně $P_6 = \{1, 2^6, 3^6, \cdots, n^6\}$ má konstantní šestou diferenci $d_6 = 6!$. Její součet je mnohočlen sedmého stupně

$$S_6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n = \frac{n(n+1)}{2}\frac{2n+1}{3}\frac{3n^4+6n^3-3n+1}{7}\ .$$

Jak je vidět, opakování tohoto postupu je náročné, zvětšuje se počet rovnic a s tím se také zvětšují koeficienty v nich. Touto cestou postupoval např. V. Janků, viz [1].

2 Součet mocnin přirozených čísel výpočtem determinantu

Z binomického vzorce

$$(x-1)^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}x^{k+1-i}$$

pro $x = 1,2, \dots ,n$ postupně dostáváme

$$0=1-\binom{k+1}{1}+\binom{k+1}{2}-\binom{k+1}{3}+\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{1}+(-1)^{k+1},$$

$$1=2^{k+1}-\binom{k+1}{1}2^k+\binom{k+1}{2}2^{k-1}-\binom{k+1}{3}2^{k-2}+\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{1}2+(-1)^{k+1},$$

$$2^{k+1}=3^{k+1}-\binom{k+1}{1}3^k+\binom{k+1}{2}3^{k-1}-\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{1}3+(-1)^{k+1},$$

………………….

$$(n-2)^{k+1}=(n-1)^{k+1}-\binom{k+1}{1}(n-1)^k+\binom{k+1}{2}(n-1)^{k-1}-\cdots+(-1)^{k+1},$$

$$(n-1)^{k+1}=n^{k+1}-\binom{k+1}{1}n^k+\binom{k+1}{2}n^{k-1}-\cdots+(-1)^{k+1}.$$

Sečteme získané rovnosti

$$n^{k+1}=\binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n}i^k-\binom{k+1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^{k-1}+\binom{k+1}{3}\sum_{i=1}^{n}i^{k-2}-$$
$$-\cdots(-1)^k\binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n}i-(-1)^{k+1}n\,.$$

Pro k = 0,1,2,….. je

$n=n\,,$

$n^2+n=+\binom{2}{1}\sum_{i=1}^{n}i\,,$

$n^3-n=-\binom{3}{1}\sum_{i=1}^{n}i+\binom{3}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2\,,$

$n^4+n=+\binom{4}{1}\sum_{i=1}^{n}i-\binom{4}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\binom{4}{3}\sum_{i=1}^{n}i^3,$

………………..

To je trojúhelníková soustava lineárních rovnic pro neznámé $\sum i^k$. Pro výpočet součtu k-tých mocnin bychom museli vyčíslit všechny předchozí součty. Lze proto použít Cramerovo pravidlo, ale budeme počítat dva determinanty. Determinant trojúhelníkové soustavy bude

$$\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{4}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{k+1}{k}=(k+1)!\ .$$

Například pro $k=3$ je

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4!}\begin{vmatrix}\binom{2}{1} & 0 & n^2+n\\ -\binom{3}{1} & \binom{3}{2} & n^3-n\\ \binom{4}{1} & -\binom{4}{2} & n^4+n\end{vmatrix}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Ani tento postup není příliš praktický. Touto cestou se ubíral např. Vilém Jung viz [2].

Soustavu rovnic můžeme řešit postupným výpočtem shora dolů. Je to vlastně rekurentní formule pro jednotlivé součty. My si ukážeme jiný rekurentní vzorec.

3 Rekurentní vzorec pro součet

Vrátíme se proto do kapitoly 1 a budeme hledat závislost mezi koeficienty součtů, které sestavíme do tabulky

	n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
S_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
S_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$							
S_3		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$						
S_4	$-\frac{1}{30}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$					
S_5		$-\frac{1}{12}$		$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
S_6	$\frac{1}{42}$		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$			
S_7		$\frac{1}{12}$		$-\frac{7}{24}$		$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$		
S_8	$-\frac{1}{30}$		$\frac{2}{9}$		$-\frac{7}{15}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	
S_9		$-\frac{3}{20}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{7}{10}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Po úpravě dvou úhlopříček je nová tabulka

	n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
S_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
S_2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$							
S_3		$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$						
S_4	$-\frac{4}{120}$		$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$					
S_5		$-\frac{10}{120}$		$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
S_6	$\frac{6}{252}$		$-\frac{20}{120}$		$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$			
S_7		$\frac{21}{252}$		$-\frac{35}{120}$		$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$		
S_8	$-\frac{1}{30}$		$\frac{56}{252}$		$-\frac{56}{120}$		$\frac{8}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	
S_9		$-\frac{3}{20}$		$\frac{126}{252}$		$-\frac{84}{120}$		$\frac{9}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Z porovnání s Pascalovým trojúhelníkem dostáváme:
Čitatele zlomků s jmenovatelem 12 lze zapsat v binomickém tvaru $\binom{k}{k-1}, k \geq 2$.
Čitatele zlomků s jmenovatelem 120 lze zapsat v binomickém tvaru $\binom{k}{k-3}, k \geq 4$.
Čitatele zlomků s jmenovatelem 252 lze zapsat v binomickém tvaru $\binom{k}{k-5}, k \geq 6$. Potom jednotlivé součty můžeme psát

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \binom{2}{1}\frac{n}{12},$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \binom{3}{2}\frac{n^2}{12},$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \binom{4}{3}\frac{n^3}{12} - \binom{4}{1}\frac{n}{120},$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \binom{5}{4}\frac{n^4}{12} - \binom{5}{2}\frac{n^2}{120},$$

$$S_6 = \sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \binom{6}{5}\frac{n^5}{12} - \binom{6}{3}\frac{n^3}{120} + \binom{6}{1}\frac{n}{252},$$

$$S_7 = \sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \binom{7}{6}\frac{n^6}{12} - \binom{7}{4}\frac{n^4}{120} + \binom{7}{2}\frac{n^2}{252},$$

$$S_8 = \sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \binom{8}{7}\frac{n^7}{12} - \binom{8}{5}\frac{n^5}{120} + \binom{8}{3}\frac{n^3}{252} - \binom{8}{1}\frac{n}{240},$$

$$S_9 = \sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \binom{9}{8}\frac{n^8}{12} - \binom{9}{6}\frac{n^6}{120} + \binom{9}{4}\frac{n^4}{252} - \binom{9}{2}\frac{n^2}{240}.$$

Pro desátý součet podle předchozích součtů dostaneme

$$S_{10} = \sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \binom{10}{9}\frac{n^9}{12} - \binom{10}{7}\frac{n^7}{120} + \binom{10}{5}\frac{n^5}{252} - \binom{10}{3}\frac{n^3}{240} + \binom{10}{1}\frac{n}{a}.$$

Koeficient a určíme z podmínky, že pro $n = 1$ je součet $S_{10} = 1$. Vyčíslením kombinačních čísel a sečtením zlomků dostaneme $a = 132$. Potom následující součet je

$$S_{11} = \sum_{i=1}^{n} i^{11} = \frac{n^{12}}{12} + \frac{n^{11}}{2} + \binom{11}{10}\frac{n^{10}}{12} - \binom{11}{8}\frac{n^8}{120} + \binom{11}{6}\frac{n^6}{252} - \binom{11}{4}\frac{n^4}{240} + \binom{11}{2}\frac{n^2}{132}.$$

Pokud nechceme další koeficienty u n počítat tímto způsobem, můžeme použít rekurentní vzorec pro Bernoulliova čísla, viz [4]

$$B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}B_i,\ \ B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Podle tohoto vzorce je

$$B_2 = -\frac{1}{3}(B_0 + 3B_1) = \frac{1}{6},$$

$$B_3 = -\frac{1}{4}(B_0 + 4B_1 + 6B_2) = 0,$$

$$B_4 = -\frac{1}{5}(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3) = -\frac{1}{30}, \text{ atd.}$$

To jsou první tři koeficienty u n součtů 2., 3. a 4. stupně jak jsou uvedené v první tabulce.

4 Součet druhých mocnin přirozených čísel a dokonalý čtverec

Součet prvních 24 druhých mocnin přirozených čísel

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 24^2 = 70^2$$

byl použit při hledání dokonalých čtverců. Dokonalým čtvercem se rozumí čtverec, který lze pokrýt čtverci různých obsahů. Tak čtvercová čísla

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \cdots$$

se zdála být vhodná pro konstrukci dokonalého čtverce. Částečné součty posloupnosti čtvercových čísel jsou čísla pyramidová:

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, \ldots$$

Pro n-tý člen posloupnosti pyramidových čísel platí vzorec

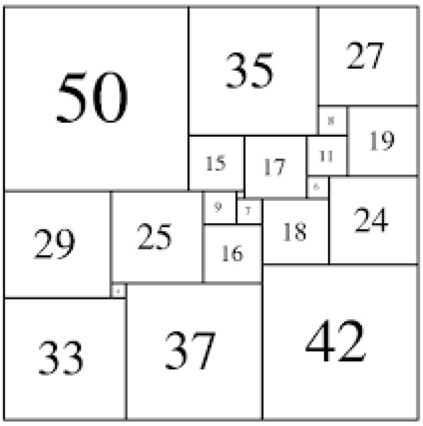
$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

To je Diofantická rovnice, jejímž řešením jsou právě pyramidální čísla. Mezi těmito čísly se hledá to, které je druhou mocninou přirozeného čísla. Tento problém vyřešil v r. 1918 J. Watson. Kromě triviálního řešení je to $n = 24, S = 70$. Na Univerzitě Illinois v r. 1974 E. M. Reingold a J. Bittner pomocí počítačového programu ukázali, že neexistuje dokonalý čtverec o straně 70 s dvacetičtyřmi čtverečky.

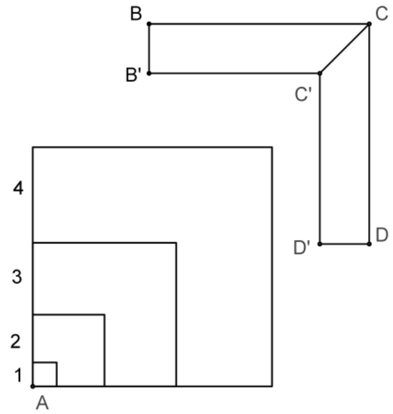
Pomocí součtu $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 33^2 = 12\,529$ lze odhadnout minimum pro stranu dokonalého čtverce a pro počet čtverečků pokrytí. Druhá odmocnina z uvedeného součtu je

$S_{33} = \sqrt{12\,529} \doteq 111.9$. Dokonalý čtverec se stranou menší než 112 nemůže mít více než 32 čtverečků.

Teprve kombinatorika pomohla dokázat, že nejmenší počet čtverečků je 21. V r. 1978 jej pomocí počítače objevil holandský matematik A. J. Duijvestijn. Strana jeho dokonalého čtverce je 112, viz obr. 1.



Obr. 1. Dokonalý čtverec



Obr. 2. Součet 3. mocnin

5 Závěr

Součtem přirozených čísel se zabývali již Pythagorejci v 6. stol. př.n.l. Pythagoras znal vzorec pro součet prvních *n* přirozených čísel. Součet druhých mocnin odvodil Archimedes ve 3. stol. př.n.l. Vzorec pro součet 3. mocnin geometricky odvodili staří Indové a to tak, že sestrojili čtverec *ABCD* o straně $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, viz obr. 2. Pro obsah posledního šestiúhelníku *B'BCDD'C'*, je složen ze dvou lichoběžníků o výšce *n*, platí

$$S_n = 2 \cdot \frac{n}{2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + 1 + 2 + \cdots + n)$$
$$= 2n(1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1) + n^2.$$

Po dosazení vzorce pro součet aritmetické posloupnosti je

$$S_n = n^3.$$

Analogicky k tomu pro *n*-1, *n*-2, … , 2,1 platí

$$S_{n-1} = (n-1)^3,$$
$$S_{n-2} = (n-2)^3, \ldots, S_2 = 2^3,$$
$$S_1 = 1.$$

Součet obsahů všech *n* šestiúhelníků je roven obsahu čtverce *ABCD*

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n(1+n)}{2}\right)^2.$$

Významných výsledků dosáhl Jacob Bernoulli. Odvodil součty až do desátého stupně pomocí rekurentního vzorce, ke kterému jsme také došli v závěru 2. kapitoly.

Literatura

[1] JANKÚ, V. *Kterak lze určit součet aritmetické řady vyššího stupně řešením rovnic stupně prvního,* ČPMF, 31(1902), č.1, 82-89.

[2] JUNG, V. *Odvození vzorce pro součet kladných a celistvých mocnin čísel přirozené řady ve formě nezávislé,* ČPMF, 27(1898), č.3, 191-198.

[3] TROJOVSKÝ, P., VESELÝ, J. *Vytvořující funkce,* PMFA, 45(2000), č.1, 11-13.

doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Bankovní institute vysoká škola, a.s.
Nárožní 2600/9, 158 Praha 5, ČR
e-mail: kocandrlova@hotmail.cz

doc. Ing. Jana Marková, CSc.
Bankovní institute vysoká škola, a.s.
Nárožní 2600/9, 158 Praha 5, ČR
e-mail: jmarkova@bivs.cz

Pětiúhelníková pokrytí roviny

Světlana Tomiczková

Abstrakt
Pětiúhelníkové pokrytí je pokrytí roviny geometrickými útvary takovými, že každá část (dlaždice) je pětiúhelník. Zde popíšeme klasifikaci, historii a některé vlastnosti pětiúhelníkových pokrytí.

Klíčová slova: Pokrývání roviny, pětiúhelníkové dlaždice.

Abstract
Pentagonal tiling is a tiling or tessellation of the plane where each piece (tile) is a pentagon. We describe classification, history and some properties of pentagonal tiling.

Keywords: Tesselation, tiling, pentagons tile.

1 Úvod

Pokrývání roviny (teselace) je vyplnění euklidovské roviny pomocí jednoho nebo více typů geometrických útvarů (dlaždic) tak, aby se tyto geometrické útvary nepřekrývaly a nezůstaly mezi nimi žádné mezery.

Klasifikace teselací je možná například podle tvaru dlaždic, podle množství použitých typů dlaždic, podle zobrazení, které dané pokrytí charakterizuje apod. Některá pokrytí mají speciální názvy, např. *pravidelné pokrytí* je tvořeno jedním typem pravidelných mnohoúhelníků. Víme, že existují jen tři typy pravidelných pokrytí (rovnostrannými trojúhelníky, čtverci a pravidelnými šestiúhelníky). Dále existují *polopravidelná pokrytí*, která jsou tvořena opět pravidelnými mnohoúhelníky, ale je možné použít více typů dlaždic. Takových polopravidelných pokrytí existuje osm a jsou tvořeny kombinacemi rovnostranných trojúhelníků, čtverců, pravidelných šestiúhelníků, osmiúhelníků a dvanáctiúhelníků.

Dlaždicemi mohou být i nepravidelné mnohoúhelníky. Pokud se zaměříme na pokrývání jedním typem dlaždic je zřejmé, že pokrytí může být tvořeno libovolným trojúhelníkem nebo libovolným čtyřúhelníkem. Také víme, že rovinu nemůžeme pokrýt shodnými mnohoúhelníky, které mají více než šest stran. Úplnou klasifikaci pokrývání roviny šestiúhelníky provedl K. A. Reinhardt a ukázal, že existují tři třídy šestiúhelníků, které pokrývají rovinu. Pokrývání roviny pětiúhelníky, historie, klasifikace a další vlastnosti jsou obsahem tohoto článku.

Kromě počtu vrcholů a počtu použitých dlaždic může být charakteristikou také zobrazení, kterým je možné pokrytí reprodukovat. *Periodická pokrytí* jsou charakterizována posunutím, tj. existuje posunutí (určené nenulovým vektorem), které zobrazí pokrytí samo na sebe. Dalšími typy pokrytí jsou např. *aperiodická pokrytí* nebo *Penrosovo pokrytí*.

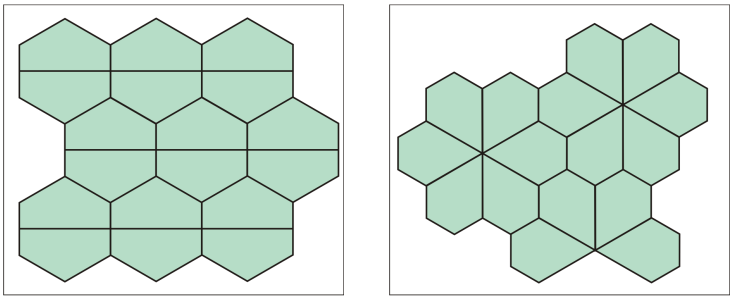
2 Pětiúhelníková pokrytí

Velice zajímavým typem pokrytí jak z hlediska charakterizace dlaždic, tak z pohledu historie, je pokrývání roviny konvexními pětiúhelníky. Rovinu nelze pokrýt pravidelnými pětiúhelníky, ale lze ji pokrýt jedním typem shodných pětiúhelníků. Tomuto typu pokrytí se budeme věnovat v následujícím textu.

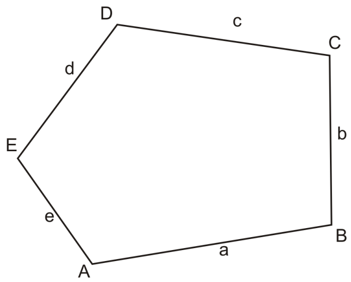
2.1 Značení a klasifikace

Některá z pětiúhelníkových pokrytí jsou jednoduchá (na obrázku 1 např. vidíme pokrytí, která vychází z pokrytí roviny šestiúhelníky), jiná mají popis složitější a složitější byla i cesta k jejich objevení a některá další na svůj objev patrně teprve čekají.

Označíme pětiúhelník podle obrázku 2, kde velkými písmeny jsou označeny jak vrcholy pětiúhelníka, tak úhly u příslušných vrcholů a malými písmeny strany pětiúhelníka. Pokrytí budou charakterizována pomocí vztahů mezi úhly a stranami nebo konkrétními hodnotami těchto veličin.



Obr. 1. Pokrytí roviny pětiúhelníky



Obr. 2. Značení

Vrcholem pokrytí (teselace) rozumíme bod, který je společný alespoň třem dlaždicím (jejich hranám nebo vrcholům). Rozlišujeme pokrývání typu hrana na hranu (edge-to-edge), pro jejichž dlaždice platí právě jedna z následujících vlastností:

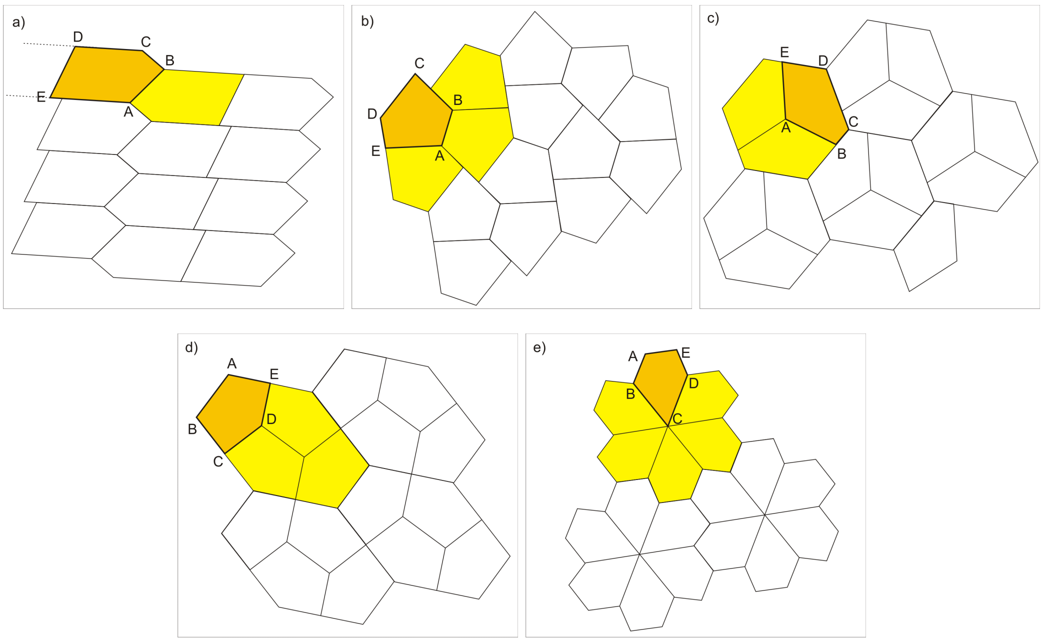
- nemají žádný společný bod
- mají společný bod, který je vrcholem každé z dlaždic (a je také vrcholem pokrytí)
- mají společnou hranu

Další charakteristickou vlastností, podle které je možné pokrývání klasifikovat, je otázka zda je pokrytí „tile-transitive“ neboli, zda existuje shodnost (izometrie), která zobrazuje jednu dlaždici na jinou. Pouze prvních pět objevených a popsaných pokrytí je „tile-transitive“. Pro ostatní je ale možné najít mnohoúhelník (polygon) složený ze dvou nebo tří shodných pětiúhelníků. Pokrytí dlaždicí složenou z těchto pětiúhelníků už „tile-transitive“ je. Takové pokrytí se nazývá 2-blok nebo 3-blok transitive (obecně $k-$blok transitive). Těmito vlastnostmi a klasifikací se podrobněji zabývá např. [5], [7] a [1].

2.2 Historie

První systematiký popis (klasifikaci) pokrývání roviny pětiúhelníky provedl německý matematik Karl August Reinhardt (1895 – 1941) v roce 1918. Jak už bylo řečeno, K. A. Reinhardt, který se zabýval mnohoúhelníky, provedl úplnou klasifikaci pokrývání roviny šestiúhelníky a ukázal, že existují tři třídy šestiúhelníků, které pokrývají rovinu. Mimo jiné také dokázal, že pro lichá n má regulární polygon největší plochu mezi všemi polygony, které mají průměr jedna [3].

K. A. Reinhardt popsal pět různých typů pětiúhelníků, které pokrývají rovinu, přesněji popsal pět tříd charakterizovaných vztahy mezi úhly a stranami takových, že pětiúhelník patřící do jedné třídy (splňující dané podmínky) existuje a existuje alespoň jedno pokrytí roviny tímto typem pětiúhelníka. Těchto pět typů je vidět na obr. 3 a všechna jsou „tile-transitive“.

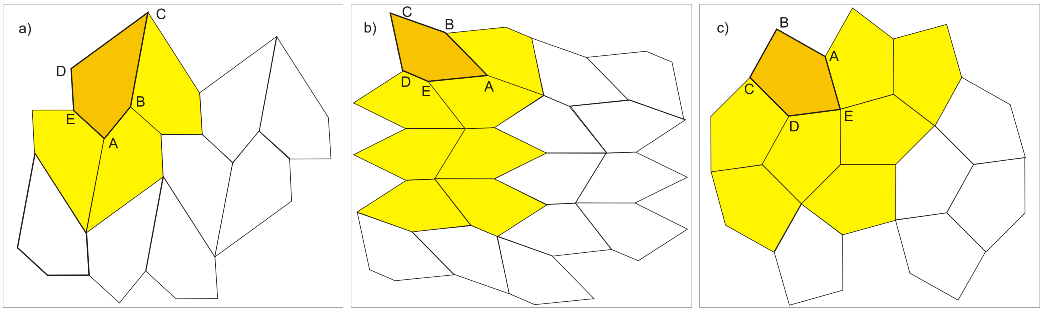


Obr. 3. Pětiúhelníková pokrytí popsaná K. Reinhardtem

Pak následovala padesátiletá přestávka a až v roce 1968 americký matematik Richard Kershner (1913 – 1982) publikoval článek On Paving the Plane v American Mathematical Monthly, kde klasifikoval pětiúhelníková pokrytí jiným způsobem, ale jeho seznam obsahoval navíc tři typy pokrytí, které nebyly popsány K. A. Reinhardtem (obr. 4). Tyto tři nové typy už nebyly tile-transitive, ale jsou 2-blok transitive.

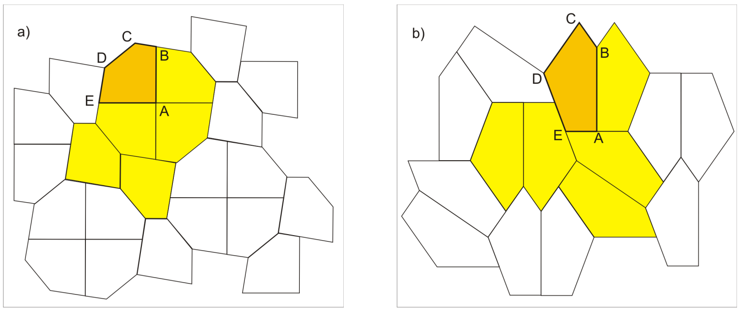
Nyní bylo tedy popsáno osm typů pokrytí a přestože se R. Kerschner mýlil ve svém předpokladu, že našel všechna pokrytí, jeho práce pomohla odstartovat nové výzkumy v této oblasti.

V letech 1956–1981 vedl známý americký popularizátor matematiky Martin Gardner (1914–



Obr. 4. Tři nová pětiúhelníková pokrytí popsaná R. Kerschnerem

2010) v časopise Scientific American sloupek Mathematical Games. V roce 1975 napsal o Kerschnerově článku a vyzval čtenáře k hledání nových způsobů pokrytí roviny pětiúhelníky. Na základě této výzvy bylo objeveno pět dalších typů pokrytí. Hned v roce 1975 objevil jeden nový typ dlaždic počítačový specialista z Kalifornie Richard James III., který se rozhodl najít pokrytí z Kerschnerova článku aniž by článek četl a podařilo se mu najít kromě osmi Kerschnerových pokrytí další, který označujeme jako typ 10 (viz obrázek 5 vlevo).



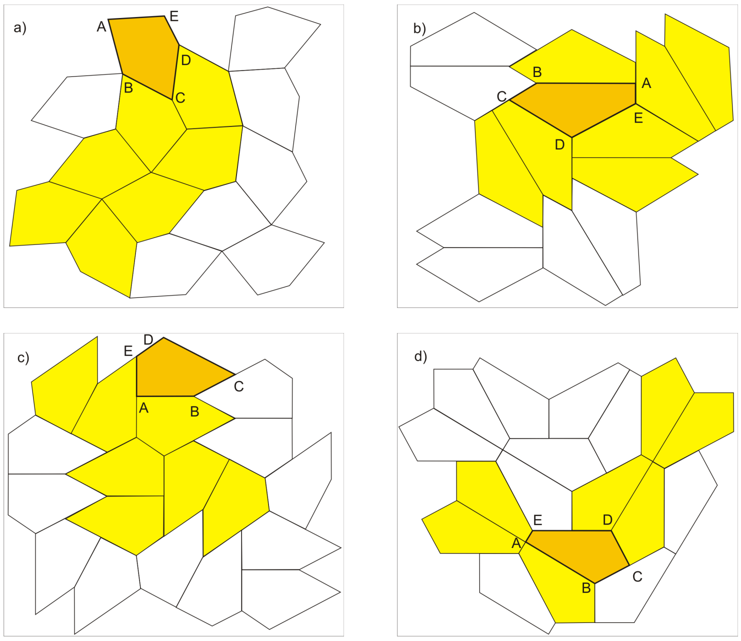
Obr. 5. Pětiúhelníkové pokrytí popsané Richardem Jamesem III (vlevo) a pětiúhelníkové pokrytí popsané Rolfem Steinem (vpravo)

Ještě zajímavější byl objev dalších čtyř typů pokrytí, který učinila na základě výzvy M. Gardnera kaliforňanka Marjorie Rice (narozena 1923). Velkou zásluhu na jejím uvedení do matematické komunity a zveřejnění nových typů dlaždic měla profesorka Doris Schattschneider. Marjorie Rice, která neměla hlubší matematické základy, byla tak fascinovaná výzvou M. Gardnera, že si vymyslela vlastní systém třídění a během několika měsíců objevila nový typ pokrytí, který poslala M. Gardnerovi. Ten poslal nový typ profesorce Doris Schattschneider, aby jej posoudila.

Doris Schattschneider si začala s Marjorie Rice dopisovat, posílala jí další informace o daném problému a povzbuzovala ji v její další práci. Tak během několika dalších let objevila Marjorie Rice tři další typy pokrytí. Všechny čtyři nové typy pokrytí Marjorie Rice jsou na obrázku 6 a jsou 2-blok transitive. Ukázky dlaždic a výtvarně pojatá pokrytí lze nalézt v [4].

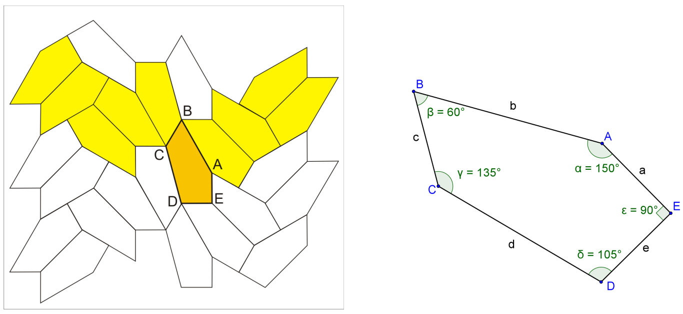
V roce 1985 objevil 14. typ pokrytí německý student na Univerzitě v Dortmundu Rolf Stein (viz obr. 5 vpravo), ale patnáctý typ čekal na své objevení dalších 30 let.

V červenci roku 2015 byl oznámen posun na tomto poli - Casey Mann, Jennifer McLoud a David Von Derau ohlásili objev 15. typu dlaždic (obr. 7), který byl učiněn pomocí počítačového programu. Jenifer McLoud a její manžel Casey Mann, oba matematici na University Washington



Obr. 6. Čtyři pětiúhelníková pokrytí popsaná Marjorie Rice

Bothell, strávili rok a půl vývojem algoritmu a David Von Derau napsal počítačový program, kde implementoval jejich algoritmus. Od předchozích typů pokrytí se liší tím, že jsou přesně stanoveny hodnoty všech úhlů. Podrobněji se jejich objevem zabývá [1].



Obr. 7. Nově objevený 15. typ pětiúhelníkového pokrytí a pětiúhelníková dlaždice

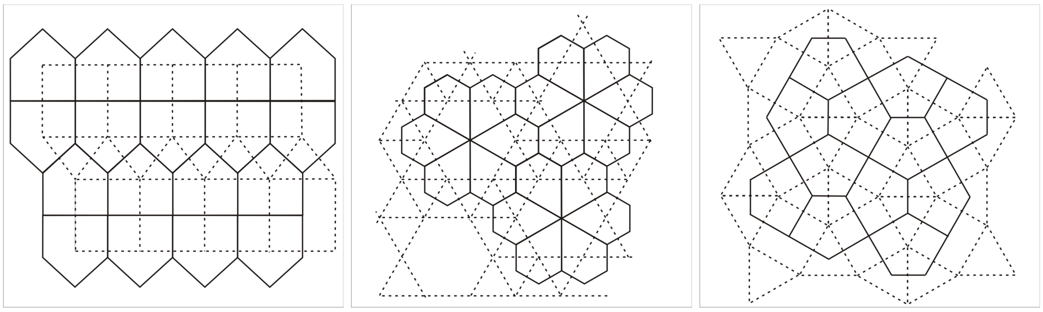
2.3 Přehled 15 typů dlaždic

Následující přehled včetně značení je převzat z článku [6], přidán je ještě nově objevený patnáctý typ pokrytí, který má, na rozdíl od předcházejících, přesně dané úhly u jednotlivých vrcholů. Ve svém dalším článku [7] stejní autoři klasifikují pokrytí ještě podrobněji a dělí pokrytí podle dalších kritérií, např. zda je pokrytí „edge to edge“. V následující tabulce je kromě označení a popisu pokrytí uvedeno, zda je pokrytí edge-to-edge, tile-transitive nebo k-blok transitive a jméno matematika, který daný typ popsal jako první. V obrázcích, na které jsou odkazy v tabulce, jsou také vyznačeny bloky dlaždic, kterými je možné reprodukovat dané pokrytí pomocí posunutí.

typ	popis	obrázek	edge-to-edge	tile transitive	objev
1	$A+B+C=2\pi$	3 a)	ano	tile-transitive	K. Reinhardt
2	$A+B+D=2\pi$	3 b)	ne	tile-transitive	K. Reinhardt
3	$A=C=D=2\pi/3$, $a=b, d=c+e$	3 c)	ne	tile-transitive	K. Reinhardt
4	$A=C=\pi/2$, $a=b$, $c=d$	3 d)	ano	tile-transitive	K. Reinhardt
5	$A=\pi/3$, $C=2\pi/3$, $a=b, c=d$	3 e)	ano	tile-transitive	K. Reinhardt
6	$A+B+D=2\pi$, $A=2C$, $a=b=e$, $c=d$	4 a)	ano	2-blok transitive	R. Kerschner
7	$2B+C=2\pi$, $2D+A=2\pi$, $a=b=c=d$	4 b)	ano	2-blok transitive	R. Kerschner
8	$2A+B=2\pi$, $2D+C=2\pi$, $a=b=c=d$	4 c)	ano	2-blok transitive	R. Kerschner
9	$2E+B=2\pi$, $2D+C=2\pi$, $a=b=c=d$	6 a)	ano	2-blok transitive	M. Rice
10	$A=\pi/2$, $C+D=3\pi/2, 2D+E=2C+B=2\pi, a=b=c+e$	5 a)	ne	3-blok transitive	Richard James III
11	$A=\pi/2, C+E=\pi$, $2B+C=2\pi, d=e=2a+c$	6 b)	ne	2-blok transitive	M. Rice
12	$A=\pi/2, C+E=\pi$, $2B+C=2\pi$, $2a=c+e=d$	6 c)	ne	2-blok transitive	M. Rice
13	$A=C=\pi/2$, $B=E=\pi-D/2$, $c=d$, $2c=e$	6 d)	ne	2-blok transitive	M. Rice
14	$A=\pi/2, C+E=\pi$, $2B+C=2\pi, d=e=2a, a=c$	5 b)	ne	3-blok transitive	Rolf Stein
15	$A=150°$, $B=60°$, $C=135°$, $D=105°$, $E=90°$	7	ne	3-blok transitive	C. Mann, J. McLoud, D. Von Derau

3 Zajímavé vlastnosti a použití

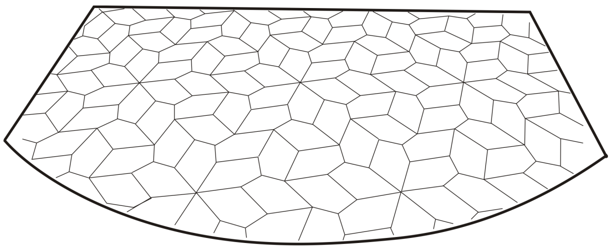
Zajímavá je také otázka duálních pokrytí k pětiúhelníkovým pokrytím, o kterých se zmiňuje D. Schattschneider v [5]. Na obrázku 8 jsou vidět tři pokrytí, ke kterým jsou duální polopravidelná Archimedova pokrytí (čárkovaně).



Obr. 8. Duální pokrytí

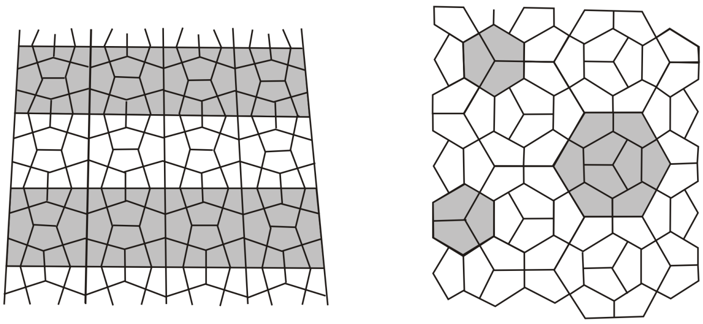
Existují ale i další otázky, na které se matematici zaměřují, například popis a vlastnosti isoperimetrických pokrytí, kterými se zabývá článek [2] nebo pokrývání roviny nekonvexními pětiúhelníky.

Některá z pětiúhelníkových pokrytí jsou využívána v architektuře, designu nebo dláždění. Takové dláždění (viz obr. 9) je např. ve vstupní hale Mathematical Association of America ve Washingtonu, D. C.



Obr. 9. Dláždění ve vstupní hale Mathematical Association of America ve Washingtonu, D. C.

Jeden z typů pokrytí zahrnutý ve třídě objevené K. Reinhardtem se nazývá Cairo a je používán poměrně často jako dláždění (viz obrázek 10 vlevo) nebo design budov. Najdeme ho například před hotelem v Tromso v Norsku nebo na budově hotelu Crystal Orange v Číně. Jiný typ dláždění bylo možné kolem roku 1960 najít na schodišti v Earlwoodu, Sydney, Austrálie (viz obrázek 10 vpravo), bohužel nyní se zde již nenachází.



Obr. 10. Dláždění Cairo (vlevo) a dláždění na schodišti v Earlwoodu (vpravo)

Jednotlivá pětiúhelníková pokrytí je možné generovat pomocí apletu „Pentagon Tilings“ vytvořeného Edem Peggem Jr., který je možné nalézt na adrese

http://demonstrations.wolfram.com/PentagonTilings/
(Wolfram Demonstrations Project, Published: May 13, 2009).

Uvedené a další příklady využití pětiúhelníkových pokrytí (a další geometrické zajímavosti) lze nalézt také na následujících www stránkách:

- http://www.tess-elation.co.uk/
- http://mathtourist.blogspot.cz/
- http://jsfiddle.net/jolumij/1qh7zav9/
- http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2014-04
- http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html

4 Závěr

Poslední typ pokrytí byl objeven v roce 2015 pomocí počítačového programu. Program stále běží a je otázkou, kdy a zda se podaří oznámit objev dalšího typu pokrytí. Dosud však není dokázáno, zda existují další typy, nevíme ani, zda je počet typů pokrytí konečný. To ale nelze dokázat pomocí uvedeného algoritmu, který je založen na hledání k-blok transitive pokrytí. Problém pokrývání roviny konvexními pětiúhelníky tak stále není uzavřen.

Literatura

[1] CIPRA, B. *A Pentagonal Search Pays Off.* What's Happening in the Mathematical Sciences, Volume 10, 2015, p. 87-95.

[2] CHUNG, P. N., FERNANDEZ, M. A., LI, Y., MARA, M., MORGAN, F., PLATA, I. R., SHAH, N., VIEIRA, L. S., WIKNER, E. *Isoperimetric Pentagonal Tilings.* Notices Amer. Math. Soc. 59 , 2012

[3] REINHARDT, K. *Extremale Polygone gegebenen Durchmessers.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 31, 1922, p. 251–270.

[4] RICE, M. *Escher-Like Patterns from Pentagonal Tilings.* M. C. Escher's Legacy, Springer, Berlin, 2003, p. 245-251.

[5] SCHATTSCHNEIDER, D. *Tiling the Plane with Congruent Pentagons.* Mathematics Magazine, 51, 1978, p. 29-44.

[6] SUGIMOTO, T., OGAWA, T. *Tiling problems of Convex Pentagon.* Forma 15, 2000, p. 75-79.

[7] SUGIMOTO, T., OGAWA, T. *Properties of Nodes in Pentagonal Tilings,* Forma 24, 2009, p. 117-121.

RNDr. Světlana Tomiczková, PhD.

Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni
Univerzitní 8, Plzeň, Česká republika
e-mail: svetlana@kma.zcu.cz

Asociované ideály ku špeciálnym triedam kriviek ako množinový úplný prienik

Michaela Holešová

Abstrakt
Asociované ideály k algebrickým varietam sa študujú v súvislosti s určením počtu plôch, ktorých je daná algebrická varieta prienikom. V článku sa venujeme asociovaným ideálom k monomiálnym krivkám. Ukážeme pre konkrétne triedy monomiálnych kriviek, že ich asociované ideály, a teda aj tieto monomiálne krivky, sú úplným alebo množinovým úplným prienikom.

Kľúčové slová: monomiálne krivky, asociované ideály, množinové úplné prieniky

Abstract
Associated ideals of algebraic varieties are studied in the connection to determining the number of surfaces of which the algebraic varieties are intersections. In this article we deal with associated prime ideals of monomial curves. We show for concrete classes of monomial curves that their associated ideals and these monomial curves are ideal or set-theoretic complete intersections.

Keywords: monomial curves, associated prime ideals, set-theoretic complete intersections

1 Úvod

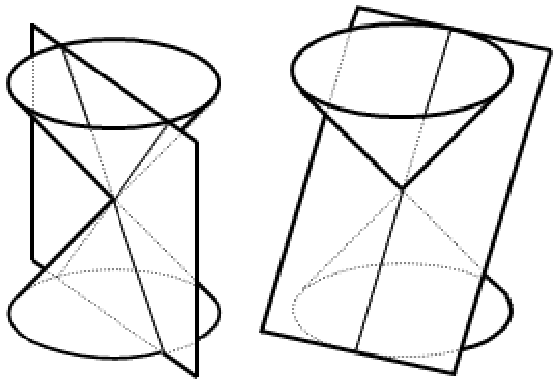
V súvislosti s riešením klasického problému algebraickej geometrie: Nájsť najmenší počet plôch, ktorých prienikom je daná algebrická afinná varieta v h-rozmernom afinnom priestore, sa venuje práve štúdiu monomiálnych kriviek a ich asociovaných ideálov. Uvedieme najskôr niektoré základné pojmy a vlastnosti.

Nech K je podpole poľa L, $char(K) = 0$, h-rozmerným afinným priestorom A_L^h nad poľom L rozumieme množinu všetkých bodov $(y_1, \ldots, y_h)$, ktorých súradnice $y_1, \ldots, y_h$ sú prvkami poľa L. Nech $R = K[x_1, \ldots x_h]$, $h \in N$ je okruh polynómov h neurčitých nad poľom K a nech $\mathbf{I}$ je ideálom tohto okruhu. Varietou ideálu $\mathbf{I}$ sa nazýva množina všetkých takých bodov $(y) = (y_1, \ldots, y_h)$ priestoru A_L^h, že $F(y) = 0$ pre všetky polynómy $F(x_1, \ldots x_h) \in \mathbf{I}$ (označujeme $\mathrm{B}(\mathbf{I})$). Algebrickou afinnou varietou V priestoru A_L^h je každá podmnožina priestoru A_L^h, ktorá je varietou nejakého ideálu $\mathbf{a}$ okruhu R, teda $V = \mathrm{B}(\mathbf{a})$. Množina všetkých polynómov okruhu R, ktoré sa anulujú každým bodom variety V, je ideál, ktorý nazývame *asociovaný ideál ku variete* V (označme $J(V)$).
Varieta V sa nazýva ireducibilnou práve vtedy, ak $J(V)$ je prvoideál. Vieme, že ideál $J(V)$ okruhu R je prvoideál práve vtedy, keď pre každé polynómy F, G z okruhu R platí, že ak polynóm FG je z ideálu $J(V)$, potom je polynóm $F \in J(V)$ alebo $G \in J(V)$. Platí, že $\mathrm{B}(J(V)) = V$, ale vo všeobecnosti neplatí $J(\mathrm{B}(\mathbf{I})) = \mathbf{I}$, čo sa dá ukázať na nasledujúcom príklade.

Príklad 1. Nech K je pole racionálnych čísel a L je pole reálnych čísel. Nech $\mathbf{a} = (x_1^2 + x_2^2)$ je ideál okruhu $K[x_1, x_2]$. Označme V =B($\mathbf{a}$) algebraickú afinnú varietu v A_L^2 pozostávajúcu z jediného bodu $(0, 0)$. Asociovaný ideál k variete V je $J(V) = (x_1, x_2) = J(\mathrm{B}(\mathbf{a})) \neq \mathbf{a}$. Platí však, že $\mathbf{a} \subseteq J(B(\mathbf{a}))$. Ako sme už spomínali, tiež platí, že $\mathrm{B}(J(V)) = (0, 0) = V$.

Ak ideál $\mathbf{I} = (F_1, ..., F_m) \subset R$ je generovaný polynómami $F_i = F_i(x_1, \ldots, x_h)$ z okruhu R, kde $i = 1, \ldots, m$, tak každý polynóm tohto ideálu je anulovaný v bode variety V práve vtedy, ak sú anulované v tomto bode variety všetky polynómy F_i, kde $i = 1, \ldots, m$, teda algebraickou afinnou varietou V =B($\mathbf{I}$) sa nazýva aj množina riešení systému rovníc $F_i(x_1, \ldots, x_h) = 0$, kde $i = 1, \ldots, m$.

Príklad 2. Nech K je pole racionálnych čísel a L je pole reálnych čísel.
a) Ideál $\mathbf{I} = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, x_1) = (x_1, x_2 - x_3) \cap (x_1, x_2 + x_3)$ je ideál okruhu $K[x_1, x_2, x_3]$. Algebrická varieta V =B($\mathbf{I}$) je prienikom kužeľa H_1 =B$(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$ a roviny H_2 =B(x_1). Na základe vyjadrenia ideálu $\mathbf{I}$ je algebraická varieta $V = V_1 \cup V_2$, kde V_1 =B$((x_1, x_2 + x_3))$, V_2 =B$((x_1, x_2 - x_3))$ sú dve rôzne priamky.
b) Ideál $\mathbf{I} = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, x_1 - x_3) = (x_2^2, x_1 - x_3)$ je ideál okruhu $K[x_1, x_2, x_3]$. Algebrická varieta V =B($\mathbf{I}$) je síce prienikom kužeľa H_1 =B$(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$ a roviny H_2 =B$(x_1 - x_3)$, ale aj prienikom roviny H_2 =B$(x_1 - x_3)$ a dvojnásobnej roviny H_3 =B(x_2^2). Z toho vyplýva, že algebraická varieta V je dvojnásobnou priamkou (Obr.1).



Obr. 1

Krullovým rozmerom $dim(R)$ okruhu R (pre nenulový okruh) sa nazýva suprémum dĺžok k všetkých reťazcov prvoideálov $P_0 \subset P_1 \subset \ldots P_k$ okruhu R. Rozmerom ideálu I nazveme rozmer faktorového okruhu R/I. Krullov rozmer afinnej algebrickej variety V je definovaný ako Krullov rozmer $dim(V)$ variety V chápanej ako topologický priestor so Zariského topológiou, tento rozmer sa teda definuje ako suprémum dĺžok všetkých reťazcov $X_0 \subset X_1 \subset \ldots X_k$ neprázdnych uzavretých ireducibilných podmnožín $X_i \subset V$.
Pre afinné variety je $dim(V) = dim(R/I)$, kde $I = J(V)$.

Číslom $\mu(I)$ budeme označovať minimálny počet generátorov asociovaného ideálu $I = J(V)$ a číslom $ht(I)$ výšku ideálu I. Pre výšku a minimálny počet generátorov platí vzťah $ht(I) \leqq \mu(I)$. Ak $I = (f_1, \ldots, f_k)$, $k \in N$, $f_i \in R$ a $\mu(I) = k$, tak množinu $M = \{f_1, \ldots, f_k\}$ budeme nazývať minimálna báza ideálu I.

Nech R je notherovský okruh a $I \neq R$ je ideál tohoto okruhu.
a) Ideál I sa nazýva *úplný prienik* práve vtedy, ak $ht(I) = \mu(I)$.
b) Ideál I je *množinový úplný prienik* práve vtedy, ak
$\exists\, a_1, \ldots, a_m \in I$ tak, že platí $Rad(I) = Rad(a_1, \ldots, a_m)$,
pričom $m = ht(I)$. Pozri [8, Kap.V, Def.3.11].

$Rad(I)$ je radikál ideálu I. Ak ideál I je prvoideál, tak $Rad(I) = I$ [19, Kap.III, §9, Veta 12], t.j. prvoideál I je množinový úplný prienik práve vtedy, keď pre tento ideál platí $I = Rad(a_1, \ldots, a_m)$, pričom $m = ht(I)$.

Pripomenieme už známe výsledky, ktoré súvisia s objasnením spomínaneného otvoreného problému. V roku 1882 Kronecker [9] vyslovil nasledujúcu vetu: Ľubovoľný systém algebraických rovníc o n neznámych možno nahradiť určitým systémom najviac $n + 1$ algebraických rovníc o n neznámych tak, že množiny všetkých koreňov oboch systémov sú totožné. V dnešnom, modernejšom jazyku by sme mohli túto vetu vysloviť nasledovne: Každá algebraická afinná varieta v n-rozmernom afinnom priestore je priesekom najviac $n + 1$ plôch. Van der Waerden [18] ukázal, že toto horné ohraničenie platí aj pre algebraické projektívne variety.

Na dôkaz toho, že túto hranicu nejde znížiť v roku 1891 Vahlen [17] našiel príklad reducibilnej priestorovej krivky v afinnom trojrozmernom priestore, ktorá sa údajne nedá vyjadriť ako prienik menej než štyroch plôch. Ale O. Perron [11] v roku 1941 dokázal, že táto krivka je prienikom troch kužeľových plôch, ktoré už okrem krivky nemajú žiadne spoločné body. Teda po 50 rokoch bola zasa otvorená otázka, či je možné hranicu uvedenú Kroneckerom znížiť. V roku 1960 sa M. Kneserovi podarilo hranicu spresniť, ale iba pre priestorové krivky, t.j. každá priestorová (reducibilná alebo ireducibilná) krivka v trojrozmernom (afinnom alebo projektívnom) priestore je priesekom najviac troch nadplôch.

V rokoch 1972 - 1973 nezávisle na sebe U. Storch [15] (pre afinný prípad) a Z. Eisenbud, E. G. Evans [5] dokázali, že každá algebrická (reducibilná alebo ireducibilná) varieta v n-rozmernom (afinnom alebo projektívnom) priestore je prienikom najviac n nadplôch.

Neustála snaha je túto hranicu znížiť a stanoviť jej dolné ohraničenie a v súvislosti s týmto snažením sa začala študovať aj špeciálna skupina algebrických ireducibilných variet a to monomiálnych kriviek, preto si uvedieme ešte základné definície a vlastnosti monomiálnych kriviek a ich asociovaných ideálov.

Nech $H = \langle n_1, n_2, \ldots, n_h \rangle = \{n, n = \sum a_i n_i, n_i \in N,\ a_i \in Z_0^+\}$ je numerická pologrupa, kde $(n_1, n_2, \ldots, n_h) = 1$. Potom množinu bodov $x_i = T^{n_i}, i = 1, \ldots, h$ v afinnom priestore A_K^h nazveme monomiálnou krivkou, čo budeme zjednodušene zapisovať $C(n_1, n_2, \ldots, n_h)$ alebo C. Ideál P okruhu R je asociovaný ideál ku krivke $C(n_1, n_2, \ldots, n_h)$ práve vtedy, keď je množinou všetkých polynómov $f \in R$, pre ktoré platí $f(t^{n_1}, t^{n_2}, \ldots, t^{n_h}) = 0$, kde t je neurčitá nad K [3].

Niekedy sa ideál P nazýva aj asociovaný (odpovedajúci) ideál k numerickej pologrupe H [6] a krivka C sa nazýva "všeobecným bodom" pre ideál P [12, Odst.3.2]. Nie je problém dokázať, že asociovaný ideál P je prvoideál [12, Odst.2.3, Príkl.3], t.j. krivka je ireducibilná a jej rozmer je $dim(C) = 1$.

Ak ideál P je asociovaný prvoideál ku krivke C, tak
A) krivka C a ideál P sa nazýva *úplným prienikom* práve vtedy, ak pre ideál P platí: $ht(P) = \mu(P) = h - 1$,
B) krivka C a ideál P sa nazýva *množinovým úplným prienikom* práve vtedy, ak ideál $P = Rad(a_1, \dots, a_{h-1})$, kde $a_i \in P, i = 1, 2, \dots, h - 1$.
C) krivka C a ideál P sa nazýva *takmer úplným prienikom* práve vtedy, ak $\mu(P) = h$.

Mohli by sme smery štúdia vlastností monomiálnych kriviek v súvislosti so spomínaným klasickým problémom algebrickej geometrie rozdeliť do troch základných skupín:

1. Vlastnosti asociovaného ideálu P.
   J. Herzog, W. Gastinger, E. Kunz;

2. Vlastnosti numerickej pologrupy H.
   H. Bresinsky, W. Gastinger, D. Patil;

3. Vzájomná súvislosť s projektívnymi krivkami.
   J. Stückrad, B. Renschuch, A. Thoma.

Uviedli sme aj autorov, ktorí sa štúdiu monomiálnych kriviek venujú, a ktorých práce dali základ aj našim výsledkom. V tomto článku sa budeme venovať hlavne štúdiu asociovaných ideálov k monomiálnym krivkám a ukážeme postup, ktorého výsledkom bude presný opis plôch, korých bude monomiálna krivka prienikom. Ukážeme však aj zopár známych výsledkov v súvislosti s vlastnosťami numerickej pologrupy H.

2 Vlastnosti numerickej pologrupy H

V práci E. Kunza [8, Kap.V,§3] nájdeme dôkaz toho, že každá monomiálna krivka v trojrozmernom afinnom priestore je prienikom dvoch nadplôch. Preto sa v ďalšom budeme hlavne zaoberať monomiálnymi krivkami v štvorrozmernom afinnom priestore. Jedným smerom bádania je skúmanie, či v závislosti od vyjadrenia numerickej pologrupy H by sme nevedeli jednoznačne ukázať, že je príslušná monomiálna krivka úplným alebo množinovým úplným prienikom.

Š. Solčan v [13], [14] sa venoval krivám $C(p^2, p^2 + p, p^2 + p + 1, (p + 1)^2)$ a ukázal, že sú množinovým úplným prienikom v afinnom priestore nad poľom ľubovoľnej charakteristiky. Ďalšie zaujímavé tvrdenie ukázal D. Patil v [10].

Veta 1. Nech $C(n_1, n_2, \dots, n_h)$ je monomiálna krivka v A^h_K. Ak $h - 1$ čísel z $n_1, n_2, \dots, n_h$ tvorí aritmetickú postupnosť, tak $C(n_1, n_2, \dots, n_h)$ je množinovým úplným prienikom.

V [16] môžeme nájsť dve triedy monomiálnych kriviek, sú to $C(4s - 1, 4s, 4s + 1, 6s)$ a $C(4s + 1, 4s + 2, 4s + 3, 6s + 3,\ s \in N,\ s \geq 2$. Ak aplikujeme predchádzajúcu vetu, tak tieto krivky sú množinovým úplným prienikom. My sme aj explicitne vyjadrili v [16] tri plochy, ktorých sú prienikom. V ďalšej časti sa budeme venovať iba monomiálnym krivkám v štvorrozmernom afinnom priestore A^4 nad poľom K.

2.1 Rozšírený takmer úplný prienik

Definícia 1. Numerická pologrupa H je *rozložiteľná* práve vtedy, ak existujú numerické pologrupy H_1, H_2 tak, že $H = d_1H_1 + d_2H_2$, pričom $d_1 \in H_2$, $d_2 \in H_1$, $d_i \geq 2$ $(i = 1, 2)$ a $(d_1, d_2) = 1$.
Pologrupa H sa nazýva *rozšírenie pologrupy* $H_2 = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle$, $m \in N$ práve vtedy, ak $H = d_1N_0 + d_2H_2$, kde $N_0 = N \cup \{0\}$, $d_1 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$, $\beta_j \in N_0$, $\sum_{j=1}^{m} b_j \geq 2$, $d_2 \geq 2$ a $(d_1, d_2) = 1$.

Definícia 2. Nech asociovaný prvoideál k pologrupe H_2 je takmer úplný prienik, potom asociovaný prvoideál k numerickej pologrupe H sa nazýva *rozšírený takmer úplný prienik* práve vtedy, ak H je rozšírením pologrupy H_2.

Ak $H = \langle n_1, n_2, n_3, n_4\rangle$ je numerická pologrupa a $(n_2, n_3, n_4) = d_2 \geq 2$, $H = n_1N_0 + d_2H_2$, kde $H_2 = \langle \frac{n_2}{d_2}, \frac{n_3}{d_2}, \frac{n_4}{d_2}\rangle$ je tiež numerická pologrupa a $n_1 \in H_2$, tak je pologrupa H rozšírením pologrupy H_2. Asociovaný ideál P ku monomiálnej krivke $C(n_1, n_2, n_3, n_4)$ a aj krivka C je rozšíreným takmer úplným prienikom. Analogicky možno uvažovať pre ľubovoľnú permutáciu množiny exponentov $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$.

Veta 2. Keď monomiálna krivka $C(n_1, n_2, n_3, n_4)$ je rozšírený takmer úplný prienik, potom je množinový úplný prienik.

Dôkaz Ideál P ako rozšírený takmer úplný prienik sa dá vyjadriť $P = (F_1, F_2, F_3) + (F_4)$, pričom $F_i \in K[x_1, x_2, x_3]$ $(i = 1, 2, 3)$ a $F_4 \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Označme $L = (F_1, F_2, F_3)$. Tento ideál je asociovaný ideál k pologrupe H_2 v okruhu $K[x_1, x_2, x_3]$. Ak je ideál L úplný prienik, tak $F_3 = 0$ a $P = (F_1, F_2, F_4)$. Ak ideál L nie je úplným prienikom, tak je ideál L množinovým úplným prienikom, t.j. existuje polynóm $Q \in L$ tak, že $L = Rad(Q, F_3)$, pozri [8, Kap.V,Príkl.3.13.f)] a $P = Rad(Q, F_3) + (F)$. Keďže $Q \in L$, je aj $Q \in P$ a z toho nám vyplýva, že $(Q, F_3, F_4) \subseteq P$, teda $Rad(Q, F_3, F_4) \subseteq P$. Naopak, ak $f \in P$, tak $f \in Rad(Q, F_3) + (F_4)$, čo znamená, že $f = g + h$, kde $h \in (F_4)$ a $g \in Rad(Q, F_3)$. Z toho vyplýva, že existuje $s \in N$ také, že $g^s \in (Q, F_3)$ a $f^s = g^s + qh$, $q \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$, t.j. $f^s \in (Q, F_3, F_4)$, teda $f \in Rad(Q, F_3, F_4)$. Z toho je $P \subseteq Rad(Q, F_3, F_4)$. Analogicky by sme postupovali pre ľubovoľnú permutáciu množiny exponentov $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$.

Príklad 3. Zoberme krivku $C(8, 10, 14, 9)$ v A^4 spomínanú v práci [6]. Bázu asociovaného ideálu $P = (x_1^3 - x_2x_3, x_2^3 - x_1^2x_3, x_3^2 - x_2x_4^2, x_4^2 - x_1x_2)$ k tejto krivke sme spočítali pomocou programu Macaulay. Numerická pologrupa $H = \langle 8, 10, 14, 9\rangle$ je rozšírením pologrupy $H_2 = \langle 4, 5, 7\rangle$, $H = 2H_2 + 9N_0$. Z toho vyplýva, že asociovaný ideál $P = L + (F_4 = x_4^2 - x_1x_2)$ k numerickej pologrupe H je rozšírený takmer úplný prienik, kde
$L = (F_1 = x_1^3 - x_2x_3, F_2 = x_2^3 - x_1^2x_3, F_3 = x_3^2 - x_1x_2^2)$ je asociovaný ideál k pologrupe H_2 v okruhu $K[x_1, x_2, x_3]$. Na základe predchádzajúcej vety je tento ideál aj množinový úplný prienik, pričom polynóm $Q = x_1^5 - 2x_1^2x_2x_3 + x_2^4$, pre ktorý platí $P = Rad(Q, F_3, F_4)$, kde $L = Rad(Q, F_3)$, získame postupom uvedeným v práci [7].

2.2 Asociovaný ideál ku Gorensteinovým krivkám

Definícia 3. Nech $H = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ je numerická pologrupa, pričom existuje také $z \in Z - H$, že $\forall j \in N$ je $z + j \in H$. Potom pologrupa H sa nazýva *symetrická* práve vtedy, keď $\forall c \in H,\ z - c \notin H$.

Definícia 4. Monomiálna krivka $C(n_1, n_2, n_3, n_4)$ v A^4 sa nazýva (monomiálna) *Gorensteinova krivka* práve vtedy, keď numerická pologrupa $H = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ je symetrická.

H. Bresinsky v práci [3] ukázal, že asociovaný ideál P ku Gorensteinovej krivke C v A^4 nad ľubovoľným poľom K je generovaný tromi alebo piatimi prvkami.

Ak $P = (F_1, F_2, F_3)$, tak $F_1 = x_1^{r_1} - x_2^{r_2}$, $F_2 = x_3^{r_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}$, $F_3 = x_4^{r_4} - x_1^{\alpha_{41}} x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}$,

kde $r_j \geq 2$ $(j = 1, \ldots, 4)$, $\alpha_{3i} \geq 0$, $\alpha_{4j} \geq 0$ $(i = 1, 2, j = 1, 2, 3)$,

alebo $F_1 = x_1^{r_1} - x_2^{r_2}$, $F_2 = x_3^{r_3} - x_4^{r_4}$, $F_3 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - x_3^{\beta_3} x_4^{\beta_4}$,

kde $r_j \geq 2$ $(j = 1, \ldots, 4)$, $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$, $\beta_3 + \beta_4 \geq 2$, $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$, $\beta_j \geq 0$ $(j = 3, 4)$.

Ak $P = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$, tak generátory sú

$F_1 = x_1^{r_1} - x_3^{\alpha_{13}} x_4^{\alpha_{14}}$, $F_2 = x_2^{r_2} - x_1^{\alpha_{21}} x_4^{\alpha_{24}}$, $F_3 = x_3^{r_3} - x_1^{\alpha_{31}} x_2^{\alpha_{32}}$, $F_4 = x_4^{r_4} - x_2^{\alpha_{42}} x_3^{\alpha_{43}}$,

pričom

$r_1 = \alpha_{21} + \alpha_{31}, r_2 = \alpha_{32} + \alpha_{42}, r_3 = \alpha_{13} + \alpha_{43}, r_4 = \alpha_{14} + \alpha_{24}$

a $0 < \alpha_{ij} < r_j,\ 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 4$.

Je zrejmé, že v prípade troch generátorov je asociovaný prvoideál ideálovým úplným prienikom. V svojej ďalšej práci [2] dokázal nasledujúcu vetu.

Veta 3. Nech P je prvoideál asociovaný ku Gorensteinovej krivke v A^4 nad ľubovoľným poľom K, potom $\exists\, g_1 \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$, pre ktorý platí $P = Rad(g_1, g_2 = F_2, g_3 = F_3)$.

Ak je asociovaný prvoideál P úplný prienik, tak je aj množinový úplný prienik, t.j. $g_1 = F_1$. Ak asociovaný prvoideál P má päť generátorov, tak je množinový úplný prienik. V tomto prípade Bresinsky uviedol v [2] aj návod na konštrukciu polynómu g_1, kde

$g_1 = \pm x_4^q + h$, $h \in (x_1, x_2, x_3)$, $q \in N$ a $P = Rad(g_1, F_2, F_3)$.

Najskôr sa nájde taký polynóm g_0, pre ktorý platí, že $F_1^{r_3} \equiv x_1^{\alpha_{13}\alpha_{31}} g_0 \mod (F_2, F_3)$. Presné vyjadrenie polynómu g_0 nájdeme v článku [2]. Zároveň $g_0^{r_2} \equiv x_1^{\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}} g_1 \mod (F_2, F_3)$. Z toho je zrejmé, že $F_1^{r_2 r_3} \equiv x_1^{\alpha_{13}\alpha_{31} r_2 + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}} g_1 \mod (F_2, F_3)$.

Použitím myšlienok z tejto práce sme skonštruovali taký polynóm Q, pre ktorý tiež platí $P = Rad(Q, F_2, F_3)$. Pozri prácu [7].

$$Q = \sum_{h=0}^{\alpha_{13}\alpha_{32}-1} (-1)^h \binom{r_2 r_3}{h} {x_2}^{\alpha_{42}h} {x_3}^{\alpha_{43}h} x_4^{\alpha_{14}r_2r_3+\alpha_{13}\alpha_{24}\alpha_{32}-r_4h} +$$
$$+ \sum_{h=\alpha_{13}\alpha_{32}}^{\alpha_{13}r_2-1} (-1)^h \binom{r_2 r_3}{h} x_1^{\alpha_{21}(h-\alpha_{13}\alpha_{32})} {x_2}^{\alpha_{32}(\alpha_{13}r_2-h)} {x_3}^{\alpha_{43}h} {x_4}^{\alpha_{14}(r_2r_3-h)} +$$
$$+ \sum_{h=\alpha_{13}r_2}^{r_2r_3} (-1)^h \binom{r_2 r_3}{h} x_1^{r_1h-\alpha_{13}\alpha_{31}r_2+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}} ({x_3}^{\alpha_{13}} {x_4}^{\alpha_{14}})^{r_2r_3-h}.$$

Príklad 4. Zoberme konkrétnu Gorensteinovu krivku $C(5,6,8,7)$ v A_4. Asociovaný prvoideál P má bázu
$M = \{F_1 = x_1^3 - x_3x_4, F_2 = x_2^2 - x_1x_4, F_3 = x_3^2 - x_1^2x_2, F_4 = x_4^2 - x_2x_3, F_5 = x_1x_3 - x_2x_4\}$.
Priamo z našich úvah vyplýva, že polynóm má tvar $Q = x_4^5 - 4x_2x_3x_4^3 + 6x_1x_3^2x_4^2 - 4x_1^4x_3x_4 + x_1^7$ a $P = Rad(Q, F_2, F_3)$. Ak použijeme Bresinského postup, tak
$g_1 = x_4^5 - 4x_2x_3x_4^3 + 6x_1^3x_2x_4^2 - 4x_1^4x_3x_4 + x_1^7$, pričom polynóm $Q = g_1 + 6x_1x_4^2F_3$.

3 Vlastnosti asociovaného ideálu ku monomiálnej krivke

Sú známe výsledky, kedy sa podarilo ukázať, že počet nadplôch, ktorých je monomiálna krivka prienikom, sa znížil na $h-1$, čo je ekvivalentné s tým, že monomiálna krivka je buď úplným prienikom alebo množinovým úplným prienikom. H. Bresinsky, W. Gastinger ukázali, že niektoré triedy monomiálnych kriviek v štvorrozmernom afinnom priestore sú prienikom troch nadplôch. H. Bresinsky v [2] sa zaoberal Gorensteinovými krivkami a ich asociovanými ideálmi, W. Gastinger v [6] takmer úplnými prienikmi, kedy asociovaný ideál má minimálnu bázu zloženú zo štyroch generátorov. Uvedieme základné vlastnosti minimálnej bázy asociovaného ideálu ku monomiálnej krivke v štorrozmernom afinnom priestore.

3.1 Minimálna báza asociovaného ideálu ku monomiálnej krivke

Zoberme binóm $\prod_{i=1}^4 {x_i}^{\gamma_i} - \prod_{i=1}^4 {x_i}^{\vartheta_i}$ z ideálu P taký, že $\gamma_i\vartheta_i = 0$, $i = 1,2,3,4$. Je zrejmé, že pre takýto binóm platí $\sum_{i=1}^4 \gamma_i n_i = \sum_{i=1}^4 \vartheta_i n_i$.

Máme dva základné typy binómov z ideálu P:

i) $x_i^{\gamma_i} x_j^{\gamma_j} - x_k^{\gamma_k} x_l^{\gamma_l}, \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}, \gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l = 0\!\!\!/$ alebo

ii) $x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}, \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}, r_i = 0\!\!\!/$.

Označme binóm $x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$ ako $(x_i^{r_i})$, ak r_i je minimálne, ďalej ako $(x_i^{r_i}, x_j^{r_j})$, ak $x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}} \in P$ s minimálnym r_j, pričom $\alpha_{ji} = r_i, \alpha_{jk} = \alpha_{jl} = 0$. Každá báza ideálu P obahuje pre každé $i = 1,2,3,4$ najmenej jeden polynón $x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$ s minimálnym r_i.

Označme ešte polynóm $x_i^{r'_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$ ako $(x_i^{r'_i}(k,l))$, ak r'_i je minimálne pri splnení nasledujúcej podmienky $\alpha_{ik} \neq 0$ alebo $\alpha_{il} \neq 0$. Definujme podobne ako Bresinsky v [1] množinu B, ktorá môže mať vyjadrenie:

1. Zoberme binómy $(x_s^{r_s}), s = 1,2,3,4$ s najmenej dvoma nenulovými exponentami α_{sh}, $h \in \{1,2,3,4\} - \{s\}$. $B = \{(x_1^{r_1}), (x_2^{r_2}), (x_3^{r_3}), (x_4^{r_4})\}$

2. Nech $(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}) \in P$ a $(x_k^{r_k}, x_l^{r_l}) \notin P$, potom buď $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l})\}$, alebo $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l}), (x_j^{r'_j}(k,l))\}$,

3. $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}, x_l^{r_l})\} \cup C,\ C \subseteq \{(x_j^{r'_j}(k,l)), (x_l^{r'_l}(i,j))\}$.

Na množine monómov definujeme reláciu $\not<$. Pre dva monómy platí $x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} \not< x_i^{\gamma_{i2}} x_j^{\gamma_{j2}}$ práve vtedy, keď pre ich exponenty platia nerovnosti $\gamma_{i1} > \gamma_{i2}$ a $\gamma_{j1} < \gamma_{j2}$ alebo nerovnosti opačné.
Pre dva binómy sa definuje relácia $\not<$ analogicky. $x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} - x_k^{\gamma_{k1}} x_l^{\gamma_{l1}} \not< x_i^{\gamma_{i2}} x_j^{\gamma_{j2}} - x_k^{\gamma_{k2}} x_l^{\gamma_{l2}}$ práve vtedy, keď $x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} \not< x_i^{\gamma_{i2}} x_j^{\gamma_{j2}}$ a súčasne $x_k^{\gamma_{k1}} x_l^{\gamma_{l1}} \not< x_k^{\gamma_{k2}} x_l^{\gamma_{l2}}$.
Definujme ďalej množinu $D_{ij}, i \neq j, \{i,j\} \subset \{1,2,3,4\}$, $D_{ij} = \{f = x_i^{\gamma_i} x_j^{\gamma_j} - x_k^{\gamma_k} x_l^{\gamma_l}$, $\{k,l\} \subset \{1,2,3,4\} - \{i,j\}, \gamma_h < r_h$ pre polynómy $(x_h^{r_h}(k,l))$, ak $h \in \{i,j\}$, pre polynómy $(x_h^{r_h}(i,j))$, ak $h \in \{k,l\}$. Ďalej pre každý binóm $f' = x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} - x_k^{\gamma_{k1}} x_l^{\gamma_{l1}} \in P, f' \neq f$ platí $f' \not< f\}$.
Z definície množiny D_{ij} dostaneme nasledujúce jednoduché dôsledky, ktoré hovoria o vzťahu exponentov polynómov z množín $B, D_{ij}, D_{ik}, D_{il}$.

Dôsledok 1. Nech $B = \{(x_1^{r_1}), (x_2^{r_2}), (x_3^{r_3}), (x_4^{r_4})\}$ a $x_i^{\gamma_i} x_j^{\gamma_j} - x_k^{\gamma_k} x_l^{\gamma_l} \in D_{ij},\ \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, tak $\gamma_h < r_h,\ h = 1,2,3,4$.

Dôsledok 2. Nech $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l})\}$. Ak $x_i^{\gamma_i} x_k^{\gamma_k} - x_j^{\gamma_j} x_l^{\gamma_l} \in D_{ik}$, alebo $x_i^{\gamma_i} x_l^{\gamma_l} - x_j^{\gamma_j} x_k^{\gamma_k} \in D_{il},\ \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, tak $\gamma_h < r_h,\ h = i,j$.
Ak $x_i^{\gamma_i} x_j^{\gamma_j} - x_k^{\gamma_k} x_l^{\gamma_l} \in D_{ij},\ \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, tak $\gamma_h < r_h,\ h = k,l$.

Dôsledok 3. Nech $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l}), (x_j^{r'_j}(k,l))\}$ a $x_i^{\gamma_i} x_k^{\gamma_k} - x_j^{\gamma_j} x_l^{\gamma_l} \in D_{ik}$, alebo $x_i^{\gamma_i} x_l^{\gamma_l} - x_j^{\gamma_j} x_k^{\gamma_k} \in D_{il},\ \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, tak $\gamma_h < r_h,\ h = i,j$.
Ak $x_i^{\gamma_i} x_j^{\gamma_j} - x_k^{\gamma_k} x_l^{\gamma_l} \in D_{ij},\ \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, tak $\gamma_j < r'_j, \gamma_h < r_h,\ h = k,l$.

Dôsledok 4. Nech $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}, x_l^{r_l})\} \cup C,\ C \subseteq \{(x_j^{r'_j}(k,l)), (x_l^{r'_l}(i,j))\}$ a $x_i^{\gamma_i} x_k^{\gamma_k} - x_j^{\gamma_j} x_l^{\gamma_l} \in D_{ik}$, alebo $x_i^{\gamma_i} x_l^{\gamma_l} - x_j^{\gamma_j} x_k^{\gamma_k} \in D_{il},\ \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, tak $\gamma_h < r_h,\ h = 1,2,3,4$.
Ak $x_i^{\gamma_i} x_j^{\gamma_j} - x_k^{\gamma_k} x_l^{\gamma_l} \in D_{ij},\ \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, tak $\gamma_h < r'_h,\ h = j,l$.

Bresinsky dokázal vety, ktoré by sme mohli sformulovať nasledovne.
Veta 4. (Veta 3 v [1, s. 362]) Ak $P = P(n_1, n_2, n_3, n_4)$ je asociovaný prvoideál ku monomiálnej krivke v A^4, tak minimálna báza tohoto ideálu má vyjadrenie $M = B \cup D_{ij} \cup D_{ik} \cup D_{il}, \{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$.

Veta 5. (Veta 4 v [1, s. 363]) Nech P je asociovaný prvoideál k monomiálnej krivke v A^4 a nech sú dané dva ľubovoľné rôzne prvky $x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} - x_k^{\gamma_{k1}} x_l^{\gamma_{l1}}$, $x_i^{\gamma_{i2}} x_j^{\gamma_{j2}} - x_k^{\gamma_{k2}} x_l^{\gamma_{l2}}$ z množiny D_{ij}, kde $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Potom existuje jednoznačne určený prvok f z množiny D_{ik} alebo D_{il} určený nasledovne:

Ak $\gamma_{i1} < \gamma_{i2}$, $\gamma_{j1} > \gamma_{j2}$, $\gamma_{k1} > \gamma_{k2}$, $\gamma_{l1} < \gamma_{l2}$, tak $f = x_i^{\gamma_{i2}-\gamma_{i1}} x_k^{\gamma_{k1}-\gamma_{k2}} - x_j^{\gamma_{j1}-\gamma_{j2}} x_l^{\gamma_{l2}-\gamma_{l1}}$.
Ak $\gamma_{i1} < \gamma_{i2}$, $\gamma_{j1} > \gamma_{j2}$, $\gamma_{k1} < \gamma_{k2}$, $\gamma_{l1} > \gamma_{l2}$, tak $f = x_i^{\gamma_{i2}-\gamma_{i1}} x_l^{\gamma_{l1}-\gamma_{l2}} - x_j^{\gamma_{j1}-\gamma_{j2}} x_k^{\gamma_{k2}-\gamma_{k1}}$.
Ak $\gamma_{i1} > \gamma_{i2}$, $\gamma_{j1} < \gamma_{j2}$, $\gamma_{k1} > \gamma_{k2}$, $\gamma_{l1} < \gamma_{l2}$, tak $f = x_i^{\gamma_{i1}-\gamma_{i2}} x_l^{\gamma_{l2}-\gamma_{l1}} - x_j^{\gamma_{j2}-\gamma_{j1}} x_k^{\gamma_{k1}-\gamma_{k2}}$.
Ak $\gamma_{i1} > \gamma_{i2}$, $\gamma_{j1} < \gamma_{j2}$, $\gamma_{k1} < \gamma_{k2}$, $\gamma_{l1} > \gamma_{l2}$, tak $f = x_i^{\gamma_{i1}-\gamma_{i2}} x_k^{\gamma_{k2}-\gamma_{k1}} - x_j^{\gamma_{j2}-\gamma_{j1}} x_l^{\gamma_{l1}-\gamma_{l2}}$.

Veta 6. (Tvrdenie v [3, s. 4])Ak pre asociovaný prvoideál P ku monomiálnej krivke v A^4 platí $\{x_1^{r_1} - x_2^{r_2}, x_3^{r_3} - x_4^{r_4}, x_1^{r_1} - x_3^{r_3}\} \subseteq P = P(n_1, n_2, n_3, n_4)$, tak je táto krivka, resp. ideál P (ideálovým) úplným prienikom.

Gastinger uviedol nasledujúcu podmienku pre minimálnu bázu ideálu P.

Lema 1. Nech $g_j = \prod_{i=1}^4 x_i{}^{\gamma_i}, j = 1, \ldots, t$ sú monómy v R. Nech $M = \{x_1^{r_1} - g_1, x_2^{r_2} - g_2, g_3 - g_4, \ldots, g_{t-1} - g_t\}$ je minimálna báza asociovaného prvoideálu P k monomiálnej krivke v A^4. Nech $x_2 \mid g_1$ a $x_1 \mid g_2$, potom existuje také $k, 3 \leq k \leq t$, že $g_k = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2}$.
Dôkaz: Lema 7.1 v [6, s. 68].

Uvedieme ešte vety, ktoré nám určia ďalšie podmienky pre exponenty polynómov z množiny B.

Veta 7. Nech $B = \{(x_1^{r_1}), (x_2^{r_2}), (x_3^{r_3}), (x_4^{r_4})\} \subseteq M$, kde M je minimálna báza asociovaného prvoideálu P k monomiálnej krivke v A^4. Nech $x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}} \in B$, kde $\alpha_{ij} \neq 0$, $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, potom $\alpha_{ji} < r_i$.
Dôkaz: Predpokladajme, že $x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}, x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}} \in B$, kde $\alpha_{ij} \neq 0$, $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ a súčasne $\alpha_{ji} \geq r_i$. Teda $x_j^{r_j} - x_j^{\alpha_{ij}} x_i^{\alpha_{ji}-r_i} x_k^{\alpha_{jk}+\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{jl}+\alpha_{il}} \in P$. Ak $\alpha_{ij} < r_j$ a vieme, že P je prvoideál, dostaneme $x_j^{r_j-\alpha_{ij}} - x_i^{\alpha_{ji}-r_i} x_k^{\alpha_{jk}+\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{jl}+\alpha_{il}} \in P \subseteq P + (x_i, x_k, x_l) \subseteq (x_i, x_j^{r_j}, x_k, x_l)$. Z toho je $x_j^{r_j-\alpha_{ij}} \in (x_i, x_j^{r_j}, x_k, x_l)$, čo je spor. Ak $\alpha_{ij} \geq r_j$, tak $1 - x_j^{\alpha_{ij}-r_j} x_i^{\alpha_{ji}-r_i} x_k^{\alpha_{jk}+\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{jl}+\alpha_{il}} \in P$ a aspoň jedno $\alpha_{hs} \neq 0$, $h \in \{i, j\}$, $s \in \{k, l\}$ a takýto binóm nemôže patriť prvoideálu P.

Veta 8. Nech $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l}), (x_j^{r'_j}(k, l))\}$ a $B \subseteq M$, kde M je minimálna báza asociovaného prvoideálu P k monomiálnej krivke v A^4 a $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Nech $\alpha_{kl} \neq 0$, potom $\alpha_{lk} < r_k$.
b) Nech $\alpha_{lk} \neq 0$, potom $\alpha_{kl} < r_l$.
c) Nech $\alpha_{ju} \neq 0$, potom $\alpha_{uj} < r'_j, u = k, l$.
d) Nech $\alpha_{uj} \neq 0$, potom $\alpha_{ju} < r_u, u = k, l$.

Dôkaz: a) Nech $x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}} x_l^{\alpha_{kl}}, x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}} x_k^{\alpha_{lk}} \in B$, kde $\alpha_{kl} \neq 0$, $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\alpha_{lk} \geq r_k$. Potom $x_l^{r_l} - x_l^{\alpha_{kl}} x_k^{\alpha_{lk}-r_k} x_i^{\alpha_{li}+\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{lj}+\alpha_{kj}} \in P$. Ak $\alpha_{kl} < r_l$ a vieme, že P je prvoideál, dostaneme $x_l^{r_l-\alpha_{kl}} - x_k^{\alpha_{lk}-r_k} x_i^{\alpha_{li}+\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{lj}+\alpha_{kj}} \in P \subseteq P + (x_i, x_j, x_k) \subseteq (x_i, x_j, x_k, x_l^{r_l})$. Z toho

je $x_l^{r_l-\alpha_{kl}} \in (x_i, x_j, x_k, x_l^{r_l})$, čo je spor. Ak $\alpha_{kl} \geq r_l$, tak $1 - x_l^{\alpha_{kl}-r_l} x_k^{\alpha_{lk}-r_k} x_i^{\alpha_{li}+\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{lj}+\alpha_{kj}} \in P$ a aspoň jedno $\alpha_{hs} = 0,\ s \in \{i,j\},\ h \in \{k,l\}$, tak takýto binóm nepatrí prvoideálu P. Ak by všetky $\alpha_{hs} = 0,\ s \in \{i,j\},\ h \in \{k,l\}$, tak by $x_k^{r_k} - x_l^{\alpha_{kl}} \in P$, čo je v rozpore s predpokladom, že takýto binóm do ideálu P nepatrí. Tým je tvrdenie a) dokázané.
c) Nech napríklad $u = k$ a $x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}} x_l^{\alpha_{kl}}, x_j^{r'_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}} \in B$, kde $\alpha_{jk} \neq 0$ a nech $\alpha_{kj} \geq r'_j$. Potom je $x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ji}+\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}-r'_j} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}+\alpha_{kl}} \in P$.
Ak $\alpha_{jk} < r_k$, tak $x_k^{r_k-\alpha_{jk}} - x_i^{\alpha_{ji}+\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}-r'_j} x_l^{\alpha_{jl}+\alpha_{kl}} \in P$, čo je v rozpore s minimálnosťou exponentu r_k.
Ak $\alpha_{jk} \geq r_k$, tak $1 - x_k^{\alpha_{jk}-r_k} x_i^{\alpha_{ji}+\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}-r'_j} x_l^{\alpha_{jl}+\alpha_{kl}} \in P$, kde aspoň jedno $\alpha_{hs} \neq 0,\ s \in \{j,k\},\ h \in \{i,l\}$ a takýto binóm nepatrí prvoideálu P. Ak by všetky $\alpha_{hs} = 0,\ s \in \{j,k\},\ h \in \{i,l\}$, tak by $\alpha_{jk} = r_k, \alpha_{kj} = r'_j$ a $(x_k^{r_k}) = (x_j^{r'_j}(k,l))$, čo je však v rozpore s definíciou množiny B. Tým je tvrdenie c) pre $u = k$ dokázané. Pre ostatné časti tvrdenia je dôkaz analogický.
Je zrejmé, že množina $B' = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l})\} \subseteq B \subseteq M$ a tvrdenia a), b) platia aj pre množinu B'.

Veta 9. Nech $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}, x_l^{r_l})\} \cup C \subseteq M,\ C \subseteq \{(x_j^{r'_j}(k,l)) = x_j^{r'_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}}$, $(x_l^{r'_l}(i,j)) = x_l^{r'_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}} x_k^{\alpha_{lk}}\}$, kde $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$ a M je minimálna báza asociovaného prvoideálu P k monomiálnej krivke v A^4. Potom $\alpha_{ji} < r_i$ a $\alpha_{lk} < r_k$.

Dôkaz: Ak $\alpha_{ji} \geq r_i$, tak $x_j^{r'_j} - x_j^{r_j} x_i^{\alpha_{ji}-r_i} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}} \in P$. $r'_j \geq r_j$ a P je prvoideál, t.j. $x_j^{r'_j-r_j} - x_i^{\alpha_{ji}-r_i} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}} \in P$, čo je v rozpore s minimálnosťou r'_j v $(x_j^{r'_j}(k,l))$. Analogicky by sme postupovali pre druhú časť tvrdenia.

Predchádzajúce tvrdenia dávajú nutné podmienky pre minimálnu bázu asociovaného prvoideálu P k monomiálnej krivke. V ďalšej časti ak budeme hovoriť o ideále P, tak budeme myslieť asociovaný prvoideál ku monomiálnej krivke C v A^4.

Lema 2. Nech $P = (f_1, f_2, \ldots, f_s) \subset R = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ je asociovaný ideál k monomiálnej krivke v A^4. Nech je daný ideál $L = (f_h, f_q)$ $[h \neq q, h,q \in \{1,2,\ldots,s\}]$, kde $f_h = x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$, $f_q = x_j^{r_j} - x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}}$, pričom platí, že $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,3,4\}$, $k \neq l, k,l \in \{1,2,3,4\} - \{i,j\}$, $\alpha_{jk} = 0, \alpha_{jl} = 0, \alpha_{ij} < r_j$ a aspoň dve $\alpha_{im} = 0$ pre $m \in \{1,2,3,4\} - \{i\}$.
Potom $(R/L,+)$ spolu s operáciou násobenia $\bullet$ definovanou tak, že pre
$\forall a \in K[x_k, x_l]$ a pre $\forall \overline{f} \in R/L$, $a \bullet \overline{f} = \overline{af}$ je voľný modul nad $K[x_k, x_l]$.

Dôkaz: Ľahko overíme, že $(R/L,+)$ je modul nad $K[x_k, x_l]$. Zoberme lexikografické usporiadanie kde $x_i > x_j > x_k > x_l$. Množina $\{f_h, f_q\}$ je Gröbnerova báza ideálu (f_h, f_q) s rešpektovaním tohto usporiadania. Ak zoberieme ľubovoľný polynóm $f \in R = K[x_j, x_k, x_l][x_i]$ a binóm f_h, tak existujú jednoznačne určené polynómy $w, g \in K[x_j, x_k, x_l][x_i]$, pričom pre stupeň polynómu g pre neurčitú x_i platí $\mathrm{st}_{x_i}(g) < \mathrm{st}(f_h) = r_i$, $f = wf_h + g$ a $g = b_1 + b_2 x_i + b_3 x_i^2 + \cdots + b_{r_i} x_i^{r_i-1}$, $b_d \in K[x_j, x_k, x_l]$. Analogicky pre každý $b_d \in K[x_k, x_l][x_j], d = 1, 2, \ldots, r_i$ a binóm $f_q \in K[x_k, x_l][x_j]$ existujú jednoznačne určené polynómy $w_d, g_d \in K[x_k, x_l][x_j]$, pričom pre stupeň polynómu g_d pre neurčitú x_j platí $\mathrm{st}_{x_j}(g_d) < \mathrm{st}(f_q) = r_j$, $b_d = w_d F_q + g_d$ a $g_d = a_d^1 + a_d^2 x_j + a_d^3 x_j^2 + \cdots + a_d^{r_j} x_j^{r_j-1}$, $a_d^n \in K[x_k, x_l]$, $n = 1, 2, \ldots, r_j$. Polynóm f sa dá vyjadriť nasledovne

$f = wf_h + g = wF_h + b_1 + b_2x_i + b_3x_i^2 + \cdots + b_{r_i}x_i^{r_i-1} =$
$= \quad wf_h + (w_1 + w_2x_i + w_3x_i^2 + \cdots + w_{r_i}x_i^{r_i-1})f_q + \; g_1 + g_2x_i + g_3x_i^2 + \cdots + g_{r_i}x_i^{r_i-1} =$
$= \quad wf_h + (w_1 + w_2x_i + w_3x_i^2 + \cdots + w_{r_i}x_i^{r_i-1})f_q + \; a_1^1 + a_1^2x_j + a_1^3x_j^2 + \cdots + a_1^{r_j}x_j^{r_j-1} +$
$+ a_2^1x_i + a_2^2x_ix_j + a_2^3x_ix_j^2 + \cdots + a_2^{r_j}x_ix_j^{r_j-1} + a_3^1x_i^2 + a_3^2x_i^2x_j + \cdots + a_3^{r_j}x_i^2x_j^{r_j-1} + \ldots + a_{r_i}^1x_i^{r_i-1} +$
$\cdots + a_{r_i}^{r_j}x_i^{r_i-1}x_j^{r_j-1}$ [4, Chapter 1,§2, Exercise 5].
Teda každú triedu $\overline{f} \in R/L$ môžeme jednoznačne [4, Chapter 1,§3, Exercise 4] vyjadriť
$\overline{f} = a_1^1 \bullet \overline{1} + \cdots + a_1^{r_j} \bullet \overline{x_j^{r_j-1}} + a_2^1 \bullet \overline{x_i} + \cdots + a_2^{r_j} \bullet \overline{x_ix_j^{r_j-1}} + a_3^1 \bullet \overline{x_i^2} + \ldots$
$+ a_3^{r_j} \bullet \overline{x_i^2x_j^{r_j-1}} + \ldots + a_{r_i}^1 \bullet \overline{x_i^{r_i-1}} + \cdots + a_{r_i}^{r_j} \bullet \overline{x_i^{r_i-1}x_j^{r_j-1}}$.

Teda aj $\overline{0} = a_1^1 \bullet \overline{1} + \cdots + a_1^{r_j} \bullet \overline{x_j^{r_j-1}} + a_2^1 \bullet \overline{x_i} + \cdots + a_2^{r_j} \bullet \overline{x_ix_j^{r_j-1}} + a_3^1 \bullet \overline{x_i^2} + \cdots + a_3^{r_j} \bullet \overline{x_i^2x_j^{r_j-1}} + \ldots$
$+ a_{r_i}^1 \bullet \overline{x_i^{r_i-1}} + \cdots + a_{r_i}^{r_j} \bullet \overline{x_i^{r_i-1}x_j^{r_j-1}} =$
$= a_1^1 + a_1^2x_j + a_1^3x_j^2 + \cdots + a_1^{r_j}x_j^{r_j-1} + a_2^1x_i + a_2^2x_ix_j + a_2^3x_ix_j^2 + \cdots + a_2^{r_j}x_ix_j^{r_j-1} + + a_3^1x_i^2 +$
$a_3^2x_i^2x_j + \cdots + a_3^{r_j}x_i^2x_j^{r_j-1} + \ldots + a_{r_i}^1x_i^{r_i-1} + \cdots + a_{r_i}^{r_j}x_i^{r_i-1}x_j^{r_j-1} + (f_h, f_q) = = W + (f_h, f_q)$,
kde $a_d^n \in K[x_k, x_l], \; n = 1, 2, \ldots, r_j, \; d = 1, 2, \ldots, r_i$.

Keďže polynóm W nie je deliteľný pri danom usporiadaní binómami f_h, f_q, už musí byť nulový polynóm, aby patril ideálu (f_h, f_q). Na základe vlastností polynómov v okruhu

$R = K[x_i, x_j, x_k, x_l], \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ je to možné práve vtedy, keď

$a_d^n = 0, \; n = 1, 2, \ldots, r_j, \; d = 1, 2, \ldots, r_i$. To je ekvivalentné s tvrdením, že báza

$\{\overline{1}, \ldots, \overline{x_j^{r_j-1}x_i^{r_i-1}}\}$ je nezávislá nad $K[x_k, x_l]$ a teda (R/L,+) je voľný modul nad $K[x_k, x_l]$.

Dôsledok 5. Ak ideál $L = (f_h, f_q)$ spĺňa vlastnosti uvedené v leme 2, tak $x_k^px_l^qf \equiv 0 \bmod L$, $p, q \in Z_0^+$ práve vtedy, keď $f \equiv 0 \bmod L$.

Dôkaz: Platnosť postačujúcej podmienky je zrejmá. Dokážeme nutnú podmienku.
Ak zoberieme ľubovoľný polynóm $f \in R = K[x_i, x_j, x_k, x_l]$, tak patrí do triedy

$\overline{f} = a_1^1 \bullet \overline{1} + \cdots + a_{r_i}^{r_j} \bullet \overline{x_i^{r_i-1}x_j^{r_j-1}}$, kde $a_d^n \in K[x_k, x_l], \; n = 1, 2, \ldots, r_j, d = 1, 2, \ldots, r_i$.

Nech $x_k^px_l^qf \equiv 0 \bmod L$, $p, q \in Z_0^+$ a (R/L,+) je voľný modul nad $K[x_k, x_l]$, potom je

$x_k^px_l^q \bullet \overline{f} = \overline{x_k^px_l^qf} = \overline{0} = b_1^1 \bullet \overline{1} + \cdots + b_{r_i}^{r_j} \bullet \overline{x_i^{r_i-1}x_j^{r_j-1}}$, kde

$b_d^n \in K[x_k, x_l], \; n = 1, 2, \ldots, r_j, \; d = 1, 2, \ldots, r_i$, teda

$b_d^n = x_k^px_l^qa_d^n = 0$, pre $\forall n \in \{1, 2, \ldots, r_j\}, \; \forall d \in \{1, 2, \ldots, r_i\}$.

Z toho je zrejme už $a_d^n = 0$, pre $\forall n \in \{1, 2, \ldots, r_j\}, \; \forall d \in \{1, 2, \ldots, r_i\}$., teda $\overline{f} = \overline{0}$, čo je ekvivalentné s $f \equiv 0 \bmod L$.

3.2 Minimálna báza asociovaného ideálu ku monomiálnej krivke má päť generátorov

Využitím predchádzajúcich tvrdení sa nám v [7] podarilo dokázať, že ak pre asociovaný ideál P ku monomiálnej krivke v A^4 platí, že $\mu(P) = 5$, tak má minimálnu bázu M v tvare

$M = \{x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}}x_k^{\alpha_{ik}}x_l^{\alpha_{il}}, x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}}x_k^{\alpha_{jk}}x_l^{\alpha_{jl}}, x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}}x_l^{\alpha_{kl}}, x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}}x_j^{\alpha_{lj}}, x_i^{\gamma_i}x_k^{\gamma_k} - x_j^{\gamma_j}x_l^{\gamma_l}\}$,

kde $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, pričom môže nastať práve jeden z nasledujúcich dvoch prípadov:

I) iba α_{il} alebo α_{ji} môže byť nulové a všetky exponenty musia spĺňať nasledujúce rovnosti:

$$\begin{aligned} r_i &= \alpha_{ji} + \alpha_{ki} + \alpha_{li}, \\ r_j &= \alpha_{ij} + \alpha_{lj}, \\ r_k &= \alpha_{ik} + \alpha_{jk}, \\ r_l &= \alpha_{il} + \alpha_{jl} + \alpha_{kl}, \\ \omega_i &= \alpha_{ji} + \alpha_{li}, \omega_j = \alpha_{ij}, \omega_k = \alpha_{jk}, \omega_l = \alpha_{il} + \alpha_{kl}, \end{aligned} \tag{1}$$

II) $\alpha_{jl} = 0$, iba α_{il} môže byť nulové a existuje také $u \in N$, že všetky exponenty spĺňajú nasledujúce rovnosti:

$$\begin{aligned} & r_i = \alpha_{li} + \alpha_{ji} + (u+1)\alpha_{ki}, \\ & r_j = \alpha_{lj} + \alpha_{ij}, \\ & r_k = \alpha_{ik} + \omega_k, \\ & r_l = \alpha_{il} + (u+1)\alpha_{kl}, \\ & \alpha_{jk} + \alpha_{ik} = (u+1)r_k, \\ & \omega_i = \alpha_{li} + \alpha_{ji} + u\alpha_{ki},\ \omega_j = \alpha_{ij}, \\ & \omega_k = r_k - \alpha_{ik},\ \omega_l = \alpha_{il} + \alpha_{kl}. \end{aligned} \tag{2}$$

Veta 10. Nech P je asociovaný ideál ku monomiálnej krivke $C(n_1, n_2, n_3, n_4)$ v A^4, pričom $\mu(P) = 5$. Potom je tento ideál (táto krivka) množinovým úplným prienikom.

Pre takto vyjadrené minimálne bázy ideálu P už stačí iba ukázať, že ideál $P = Rad(g_1, g_2, g_3)$, $g_s \in P, s = 1, 2, 3$.
Spojením myšlienok uvedených v prácach [2], [6] konkrétne vyjadríme tri nadplochy
$g_1 = 0, g_2 = 0, g_3 = 0$, ktorých prienikom je daná monomiálna krivka v A^4, teda aj dokážeme, že je daná krivka množinovým úplným prienikom. Najskôr sa budeme zaoberať takými minimálnymi bázami, ktorých prvky spĺňajú podmienky **I)**.
I) Nech $g_2 = f_2 = x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}}$, $g_3 = f_3 = x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_l^{\alpha_{kl}}$, $\{i, j, k, l\} = = \{1, 2, 3, 4\}$. Zmenu ľubovoľného polynómu $f \in R$ pričítaním vhodného násobku binómov g_2, g_3 označíme znakom $\longrightarrow$. Zoberme $f_4 = x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}}$, t.j.

$$f_4^{r_j r_k} = (-1)^{r_j r_k} \sum_{h=0}^{r_j r_k} \binom{r_j r_k}{h} (-1)^h (x_i^{\alpha_{li}} x_j{}^{\alpha_{lj}})^{r_j r_k - h} x_l^{r_l h}.$$

Pri označení $b_h = \binom{r_j r_k}{h}(-1)^{r_j r_k + h}$, $h = 0, \ldots, r_j r_k$ je $f_4^{r_j r_k} \longrightarrow$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad & \sum_{h=0}^{\alpha_{lj} r_k - 1} b_h x_i^{\alpha_{li}(r_j r_k - h) + \alpha_{ji}(\alpha_{lj} r_k - h)} x_j{}^{\alpha_{ij} h} x_k{}^{\alpha_{jk}(\alpha_{lj} r_k - h)} x_l^{(\alpha_{il} + \alpha_{kl})h + \alpha_{jl}\alpha_{lj} r_k} \\ + \quad & \sum_{h=\alpha_{lj} r_k}^{r_j r_k} b_h (x_i^{\alpha_{li}} x_j{}^{\alpha_{lj}})^{r_j r_k - h} x_l^{r_l h} \end{aligned}$$

$[x_j{}^{\alpha_{lj}(r_jr_k-h)} \longrightarrow x_j{}^{\alpha_{ij}h}(x_i^{\alpha_{ji}}x_k^{\alpha_{jk}}x_l^{\alpha_{jl}})^{(\alpha_{lj}r_k-h)}$, ak $h < \alpha_{lj}r_k]$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow & \sum_{h=0}^{\alpha_{jk}\alpha_{lj}-1} b_h x_i^{\alpha_{li}r_jr_k+\alpha_{lj}(\alpha_{ji}r_k+\alpha_{ki}\alpha_{jk})-r_ih}(x_j^{\alpha_{ij}}x_k{}^{\alpha_{ik}})^h x_l{}^{\alpha_{il}h+\alpha_{lj}(\alpha_{jl}r_k+\alpha_{jk}\alpha_{kl})} \\
+ & \sum_{h=\alpha_{jk}\alpha_{lj}}^{\alpha_{lj}r_k-1} b_h x_i^{\alpha_{li}(r_jr_k-h)+\alpha_{ji}(\alpha_{lj}r_k-h)} x_j{}^{\alpha_{ij}h} x_k{}^{\alpha_{jk}(\alpha_{lj}r_k-h)} x_l^{(\alpha_{il}+\alpha_{kl})h+\alpha_{jl}\alpha_{lj}r_k} \\
+ & \sum_{h=\alpha_{lj}r_k}^{r_jr_k} b_h (x_i^{\alpha_{li}}x_j{}^{\alpha_{lj}})^{r_jr_k-h} x_l^{r_lh}
\end{aligned}$$

$[x_k{}^{\alpha_{jk}(r_k\alpha_{lj}-h)} \longrightarrow x_k{}^{\alpha_{ik}h}(x_i^{\alpha_{ki}}x_l^{\alpha_{kl}})^{(\alpha_{jk}\alpha_{lj}-h)}$, ak $h < \alpha_{jk}\alpha_{lj}]$

$$\begin{aligned}
= \; & x_l^{\alpha_{lj}(\alpha_{jl}r_k+\alpha_{jk}\alpha_{kl})} \left(\sum_{h=0}^{\alpha_{jk}\alpha_{lj}-1} b_h x_i^{\alpha_{li}r_jr_k+\alpha_{lj}(\alpha_{ji}r_k+\alpha_{ki}\alpha_{jk})-r_ih}(x_j^{\alpha_{ij}}x_k{}^{\alpha_{ik}})^h x_l{}^{\alpha_{il}h} \right. \\
+ & \sum_{h=\alpha_{jk}\alpha_{lj}}^{\alpha_{lj}r_k-1} b_h x_i^{\alpha_{li}(r_jr_k-h)+\alpha_{ji}(\alpha_{lj}r_k-h)} x_j{}^{\alpha_{ij}h} x_k{}^{\alpha_{jk}(\alpha_{lj}r_k-h)} x_l^{\alpha_{il}h+\alpha_{kl}(h-\alpha_{jk}\alpha_{lj})} \\
+ & \left. \sum_{h=\alpha_{lj}r_k}^{r_jr_k} b_h (x_i^{\alpha_{li}}x_j{}^{\alpha_{lj}})^{r_jr_k-h} x_l^{\alpha_{il}h+\alpha_{jl}(h-\alpha_{lj}r_k)+\alpha_{kl}(h-\alpha_{jk}\alpha_{lj})} \right) \\
= \; & x_l^{\alpha_{lj}(\alpha_{jl}r_k+\alpha_{jk}\alpha_{kl})} g_1 .
\end{aligned}$$

Označme ďalší prvok $x_i^{\alpha_{ji}+\alpha_{li}}x_k^{\alpha_{jk}} - x_j^{\alpha_{ij}}x_l^{\alpha_{il}+\alpha_{kl}}$ minimálnej bázy ideálu P ako f_5. Platí rovnosť $x_j^{\alpha_{lj}}f_5 = -x_l^{\alpha_{il}+\alpha_{kl}}g_2 - x_i^{\alpha_{ji}}x_k^{\alpha_{jk}}f_4$. Zrejme je

$$x_j^{\alpha_{lj}}f_5 \equiv -x_i^{\alpha_{ji}}x_k^{\alpha_{jk}}f_4 \mod (g_2, g_3),$$

a tiež

$$x_j^{\alpha_{lj}r_jr_k}f_5^{r_jr_k} \equiv (-1)^{r_jr_k}x_i^{\alpha_{ji}r_jr_k}x_k^{\alpha_{jk}r_jr_k}f_4^{r_jr_k} \mod (g_2, g_3)$$

a

$$f_4^{r_jr_k} \equiv x_l^{\alpha_{lj}(\alpha_{jl}r_k+\alpha_{jk}\alpha_{kl})}g_1 \mod (g_2, g_3). \tag{3}$$

Pre lexikografické usporiadanie, kde $x_j > x_k > x_i > x_l$ je množina $\{g_2, g_3\}$ Gröbnerova báza pre ideál (g_2, g_3) a z lemy 2 je $R/(g_2, g_3)$ voľný modul nad $K[x_i, x_l]$. Z dôsledku 5 je teda aj

$$f_5^{r_jr_k} \equiv (-1)^{r_jr_k}x_i^{\alpha_{ij}(\alpha_{jk}\alpha_{ki}+\alpha_{ji}r_k)}x_l^{\alpha_{jk}\alpha_{kl}r_j}g_1 \mod (g_2, g_3). \tag{4}$$

Ďalší generátor ideálu P označme $f_1 = x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}}x_k{}^{\alpha_{ik}}x_l{}^{\alpha_{il}}$ a platí, že

$$x_j^{\alpha_{lj}}f_1 \equiv -x_i^{\alpha_{ji}+\alpha_{ki}}f_4 \mod (g_2, g_3).$$

Použitím rovnakých vlastností ako pri generátore f_5 dostaneme

$$f_1^{r_j r_k} \equiv (-1)^{r_j r_k} x_i^{\alpha_{ij}\alpha_{ji} r_k + \alpha_{ki} r_j r_k - \alpha_{jk}\alpha_{ki}\alpha_{lj}} g_1 \mod (g_2, g_3). \tag{5}$$

Ak P je asociovaný ideál ku monomiálnej krivke, tak je prvoideál a $P = Rad(P)$, $g_1 \in P$. Z toho nám vyplýva, že $(g_1, g_2, g_3) \subseteq P$ a táto inklúzia dáva
$Rad(g_1, g_2, g_3) \subseteq P = Rad(P)$. Keďže sú platné (3),(4),(5), veľmi ľahko si uvedomíme, že $P \subseteq Rad(g_1, g_2, g_3)$. Z toho je $P = Rad(g_1, g_2, g_3)$ a tým je časť vety pre **I)** dôkázaná (pozri [7]).

II) Teraz sa zaoberajme minimálnymi bázami M, pre ktoré sú splnené podmienky **II)**. Ako sme už vyššie uviedli, stačí ukázať, že $P = Rad(G_1, G_2, G_3)$, $G_s \in P$, $s = 1, 2, 3$. Nech $G_2 = F_2 = x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}}$, $G_3 = F_3 = x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_l^{\alpha_{kl}}$, $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Zmenu ľubovoľného polynómu $f \in R$ pričítaním vhodného násobku binómov G_2, G_3 označíme znakom $\longmapsto$.
Zoberme $F_4 = x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}}$, t.j.

$$F_4^{r_j r_k} = (-1)^{r_j r_k} \sum_{h=0}^{r_j r_k} \binom{r_j r_k}{h} (-1)^h (x_i^{\alpha_{li}} {x_j}^{\alpha_{lj}})^{r_j r_k - h} x_l^{r_l h}.$$

Pri označení $b_h = \binom{r_j r_k}{h} (-1)^{r_j r_k + h}$, $h = 0, \ldots, r_j r_k$ je $F_4^{r_j r_k} \longmapsto$

$$\begin{aligned} \longmapsto \quad & \sum_{h=0}^{\alpha_{lj} r_k - 1} b_h x_i^{\alpha_{li}(r_j r_k - h) + \alpha_{ji}(\alpha_{lj} r_k - h)} {x_j}^{\alpha_{ij} h} {x_k}^{\alpha_{jk}(\alpha_{lj} r_k - h)} x_l^{r_l h} \\ + \quad & \sum_{h=\alpha_{lj} r_k}^{r_j r_k} b_h (x_i^{\alpha_{li}} {x_j}^{\alpha_{lj}})^{r_j r_k - h} x_l^{r_l h} \end{aligned}$$

$[{x_j}^{\alpha_{lj}(r_j r_k - h)} \longmapsto {x_j}^{\alpha_{ij} h} (x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}})^{(\alpha_{lj} r_k - h)}$, ak $h < \alpha_{lj} r_k]$

$$\begin{aligned} \longmapsto \quad & \sum_{h=0}^{\alpha_{lj} r_k - 1} b_h x_i^{\alpha_{li}(r_j r_k - h) + (\alpha_{ji} + u\alpha_{ki})(\alpha_{lj} r_k - h)} {x_j}^{\alpha_{ij} h} {x_k}^{\omega_k(\alpha_{lj} r_k - h)} x_l^{h(\alpha_{il} + \alpha_{kl}) + u\alpha_{lj} r_k \alpha_{kl}} \\ + \quad & \sum_{h=\alpha_{lj} r_k}^{r_j r_k} b_h (x_i^{\alpha_{li}} {x_j}^{\alpha_{lj}})^{r_j r_k - h} x_l^{r_l h} \end{aligned}$$

$[{x_k}^{\alpha_{jk}(\alpha_{lj} r_k - h)} \longmapsto {x_k}^{\omega_k(\alpha_{lj} r_k - h)} (x_i^{\alpha_{ki}} x_l^{\alpha_{kl}})^{u(\alpha_{lj} r_k - h)}$, ak $h < \alpha_{lj} r_k]$

$$
\begin{aligned}
\longmapsto\ & \sum_{h=0}^{\omega_k\alpha_{lj}-1} b_h x_i^{\alpha_{li}r_jr_k+\alpha_{lj}((\alpha_{ji}+u\alpha_{ki})r_k+\alpha_{ki}\omega_k)-r_ih}(x_j^{\alpha_{ij}}x_k{}^{\alpha_{ik}})^h x_l{}^{\alpha_{il}h+\alpha_{lj}\alpha_{jk}\alpha_{kl}}\\
+\ & \sum_{h=\omega_k\alpha_{lj}}^{\alpha_{lj}r_k-1} b_h x_i^{\alpha_{li}(r_jr_k-h)+(\alpha_{ji}+u\alpha_{ki})(\alpha_{lj}r_k-h)} x_j{}^{\alpha_{ij}h} x_k{}^{\omega_k(\alpha_{lj}r_k-h)} x_l^{h(\alpha_{il}+\alpha_{kl})+u\alpha_{lj}r_k\alpha_{kl}}\\
+\ & \sum_{h=\alpha_{lj}r_k}^{r_jr_k} b_h (x_i^{\alpha_{li}}x_j{}^{\alpha_{lj}})^{r_jr_k-h} x_l^{r_lh}
\end{aligned}
$$

$[x_k{}^{\omega_k(r_k\alpha_{lj}-h)} \longmapsto x_k{}^{\alpha_{ik}h}(x_i^{\alpha_{ki}}x_l^{\alpha_{kl}})^{(\omega_k\alpha_{lj}-h)}$, ak $h<\omega_k\alpha_{lj}]$

$$
\begin{aligned}
=\ & x_l^{\alpha_{lj}\alpha_{jk}\alpha_{kl}}\left(\sum_{h=0}^{\omega_k\alpha_{lj}-1} b_h x_i^{\alpha_{li}r_jr_k+\alpha_{lj}((\alpha_{ji}+u\alpha_{ki})r_k+\alpha_{ki}\omega_k)-r_ih}(x_j^{\alpha_{ij}}x_k{}^{\alpha_{ik}})^h x_l{}^{\alpha_{il}h}\right.\\
+\ & \sum_{h=\omega_k\alpha_{lj}}^{\alpha_{lj}r_k-1} b_h x_i^{\alpha_{li}(r_jr_k-h)+(\alpha_{ji}+u\alpha_{ki})(\alpha_{lj}r_k-h)} x_j{}^{\alpha_{ij}h} x_k{}^{\omega_k(\alpha_{lj}r_k-h)} x_l^{h\alpha_{il}+\alpha_{kl}(h-\omega_k\alpha_{lj})}\\
+\ & \left.\sum_{h=\alpha_{lj}r_k}^{r_jr_k} b_h (x_i^{\alpha_{li}}x_j{}^{\alpha_{lj}})^{r_jr_k-h} x_l^{\alpha_{il}h+u\alpha_{kl}(h-\alpha_{lj}r_k)+\alpha_{kl}(h-\alpha_{lj}\omega_k)}\right)\\
=\ & x_l^{\alpha_{lj}\alpha_{jk}\alpha_{kl}} G_1.
\end{aligned}
$$

Ďalší generátor ideálu P označme $F_1 = x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}}x_k{}^{\alpha_{ik}}x_l{}^{\alpha_{il}}$. Vieme, že platí

$$x_j^{\alpha_{lj}}F_1 \equiv -x_i^{\alpha_{ji}+(u+1)\alpha_{ki}}F_4 \quad \mathrm{mod}(G_2,G_3)$$

a tiež

$$x_j^{\alpha_{lj}r_jr_k}F_1^{r_jr_k} \equiv (-1)^{r_jr_k}x_i^{(\alpha_{ji}+(u+1)\alpha_{ki})r_jr_k}F_4^{r_jr_k} \quad \mathrm{mod}(G_2,G_3)$$

a súčasne je

$$F_4^{r_jr_k} \equiv x_l^{\alpha_{lj}\alpha_{jk}\alpha_{kl}}G_1 \quad \mathrm{mod}(G_2,G_3). \tag{6}$$

Pre lexikografické usporiadanie, kde $x_j > x_k > x_i > x_l$ je množina $\{G_2, G_3\}$ Gröbnerova báza pre ideál (G_2, G_3) a z lemy 2 je $R/(G_2, G_3)$ voľný modul nad $K[x_i, x_l]$. Z dôsledku 5 je teda aj

$$F_1^{r_jr_k} \equiv (-1)^{r_jr_k}x_i^{\alpha_{ij}\alpha_{ji}r_k+u\alpha_{ki}\alpha_{ij}r_k+\alpha_{ki}(r_jr_k-\omega_k\alpha_{lj})}G_1 \quad \mathrm{mod}(G_2,G_3). \tag{7}$$

Označme ďalší prvok $x_i^{\omega_i}x_k^{\omega_k} - x_j^{\omega_j}x_l^{\omega_l}$ minimálnej bázy ideálu P ako F_5. Platí, že $x_i^{\alpha_{ki}}F_5 \equiv x_k^{\omega_k}F_1 \quad \mathrm{mod}(G_2,G_3)$ a tiež
$x_i^{\alpha_{ki}r_jr_k}F_5^{r_jr_k} \equiv x_k^{\omega_kr_jr_k}F_1^{r_jr_k} \quad \mathrm{mod}(G_2,G_3)$. Použitím rovnakých vlastností ako pri generátore F_1 dostaneme

$$F_5^{r_jr_k} \equiv (-1)^{r_jr_k}x_i^{\alpha_{ij}(ur_k\alpha_{ki}+\alpha_{ji}r_k)+\omega_k\alpha_{ki}\alpha_{ij}}x_l^{\omega_k\alpha_{kl}r_j}G_1 \quad \mathrm{mod}(G_2,G_3). \tag{8}$$

Ak P je asociovaný ideál ku monomiálnej krivke, tak je aj prvoideál a $P = Rad(P)$, $G_1 \in P$. Z toho vyplýva, že $(G_1, G_2, G_3) \subseteq P$ a $Rad(G_1, G_2, G_3) \subseteq P = Rad(P)$. Keďže platia (6), (7), (8), veľmi ľahko si uvedomíme, že $P \subseteq Rad(G_1, G_2, G_3)$. Z toho je $P = Rad(G_1, G_2, G_3)$ a tým je veta dôkázaná.

Ak zoberieme prvoideál P pre prípad **I)** môžu nastať tieto štyri prípady:

a) $\alpha_{il} = 0 \ \wedge \ \alpha_{ji} = 0$
b) $\alpha_{il} \neq 0 \ \wedge \ \alpha_{ji} \neq 0$
c) $\alpha_{il} \neq 0 \ \wedge \ \alpha_{ji} = 0$
d) $\alpha_{il} = 0 \ \wedge \ \alpha_{ji} \neq 0$

Ak asociovaný ideál P ku monomiálnej krivke $C(n_1, n_2, n_3, n_4)$ nie je ideálovým úplným prienikom a numerická pologrupa $H = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ je symetrická, dá sa ľahko overiť, že tento ideál patrí do triedy a).
V [16] môžeme nájsť dve triedy monomiálnych kriviek

$$C(4s-1, 4s, 4s+1, 6s) \qquad \text{a}$$
$$C(4s+1, 4s+2, 4s+3, 6s+3),\ s \in N,\ s \geq 2.$$

Minimálna báza ich asociovaných prvoideálov je

$$\{x_i^{s+1} - x_j x_k {x_l}^{s-1}, x_j^2 - x_i x_k x_l, x_k^2 - x_i x_l, x_l^{s+l} - x_i^{s-1} x_j, x_i^s x_k - x_j {x_l}^s\}$$

a

$$\{x_i^{s+2} - x_j x_k {x_l}^{s-1}, x_j^2 - x_i x_k x_l, x_k^2 - x_i x_l, x_l^{s+l} - x_i^s x_j, x_i^{s+1} x_k - x_j {x_l}^s\}$$

pre $(i, j, k, l) = (3, 4, 2, 1)$ a $(i, j, k, l) = (1, 4, 2, 3)$. Priamym výpočtom zistíme, že rovnosti (1) platia pre exponenty generátorov týchto ideálov. Asociované prvoideály oboch tried kriviek patria teda do triedy b), a tým je dokázané, že sú aj množinovým úplným prienikom.
Ak použijeme vhodnú permutáciu indexov i, j, k, l pre ideál z triedy d) [triedy c)], získame vyjadrenie ideálu z triedy c) [triedy d)]. Ukážeme aspoň dva konkrétne príklady monomiálnych kriviek, ktorých asociované prvoideály patria do tried c) alebo d).
Ďalej uvedieme jeden príklad monomiálnej krivky, ktorej asociovaný prvoideál má vyjadrenie pre prípad **II)**. Asociovaný prvoideál k týmto krivkám sme spočítali pomocou už spomínaného programu Macaulay vytvoreného D. Bayernom a M. Stillmanom.

Príklad 5. Zoberme monomiálnu krivku $C(8, 9, 15, 19)$. Jej asociovaný ideál je $P = (x_1^3 - x_2 x_3, {x_2}^3 - x_1 x_4, x_3^3 - x_1 x_2^2 x_4, x_4^2 - x_1 x_3^2, x_1^2 x_2^2 - x_3 x_4)$. Pre $(i, j, k, l) = (3, 2, 4, 1)$ má vyjadrenie ako ideál pre **I)** z triedy c) alebo pre $(i, j, k, l) = (1, 3, 2, 4)$ z triedy d). Odtiaľ je krivka $C(8, 9, 15, 19)$ množinovým úplným prienikom a

$$P = \text{Rad}(g_1, x_2^3 - x_1 x_4, x_4^2 - x_1 x_3^2), \text{ kde}$$

$$g_1 = x_3^8 - 6x_1 x_2^2 x_3^5 x_4 + \sum_{h=2}^{6} (-1)^{6+h} \binom{6}{h} (x_2 x_3)^{6-h} x_1^{3h-3} \quad \text{[trieda c)], alebo}$$

$$P = \text{ Rad}(g_1', x_2^3 - x_1x_4, x_3^3 - x_1x_2^2x_4), \quad \text{kde}$$

$$g_1' = \sum_{h=0}^{3}(-1)^{9+h}\binom{9}{h}x_1^{19-3h}x_2^hx_3^h + \sum_{h=4}^{5}(-1)^{9+h}\binom{9}{h}x_1^{15-h}x_2^hx_3^{2(6-h)}x_4^{h-4} +$$

$$+\sum_{h=6}^{9}(-1)^{9+h}\binom{9}{h}(x_1x_3^2)^{9-h}x_4^{2h-10} \quad \text{[trieda d)].}$$

Príklad 6. Minimálna báza asociovaného ideálu ku monomiálnej krivke $C(12, 13, 20, 23)$ je

$$M = \{x_1^3 - x_2x_4, {x_2}^4 - x_1x_3^2, x_3^3 - x_1^2x_2x_4, x_4^2 - x_2^2x_3, x_1^2x_2^3 - x_3^2x_4\}.$$

Ideál J generovaný takouto množinou má vyjadrenie ako ideál pre **I)** z triedy d) pre $(i, j, k, l) = (2, 3, 1, 4)$ alebo z triedy c) pre $(i, j, k, l) = (3, 1, 4, 2)$. Z toho je daná krivka množinovým úplným prienikom a pre triedu d) je

$$J = \text{ Rad}(g_1, x_1^3 - x_2x_4, x_3^3 - x_1^2x_2x_4), \quad \text{kde}$$

$$g_1 = -x_2^{23} + 9x_1x_2^{19}x_3^2 - 36x_1^4x_2^16x_3x_4 + \sum_{h=3}^{9}(-1)^{9+h}\binom{9}{h}(x_2^2x_3)^{9-h}x_4^{2h-5}$$

alebo pre triedu c) je $\quad J = \text{ Rad}(g_1', x_1^3 - x_2x_4, x_4^2 - x_2^2x_3), \quad$ kde

$$g_1' = x_3^{13} - 6x_1^2x_2x_3^{10}x_4 + \sum_{h=2}^{6}(-1)^{6+h}\binom{6}{h}(x_1x_3^2)^{6-h}x_2^{4h-4}.$$

Príklad 7. Minimálna báza asociovaného ideálu I ku monomiálnej krivke $C(34, 20, 75, 37)$ je

$$M = \{x_1^5 - x_2x_3^2, {x_2}^9 - x_1^2x_3x_4, x_3^3 - x_2^2x_4^5, x_4^2 - x_1x_2^2, x_1^3x_3 - x_2^7x_4\}.$$

Ideál I generovaný takouto množinou má vyjadrenie ako ideál pre **II)** pre $(i, j, k, l) = (2, 3, 4, 1)$. Z toho je daná krivka množinovým úplným prienikom a

$$I = \text{ Rad}(G_1, x_3^3 - x_2^2x_4^5, x_4^2 - x_1x_2^2), \quad \text{kde}$$

$$G_1 = x_2^{34} - 6x_1^2x_2^{25}x_3x_4 + \sum_{h=2}^{3}(-1)^{6+h}\binom{6}{h}x_1^{3h-2}x_2^{30-7h}x_3^hx_4^{4-h} +$$

$$\sum_{h=4}^{6}(-1)^{6+h}\binom{6}{h}x_1^{5h-10}(x_2x_3^2)^{6-h}.$$

4 Záver

Klasický problém algebrickej geometrie nájsť najmenší počet plôch, ktorých prienikom je daná algebraická afinná varieta v h-rozmernom afinnom priestore, je síce vo všeobecnosti stále otvorený, ale v tejto práci sme ukázali niekoľko špeciálnych tried algebraických ireducibilných variet, pre ktoré sa podarilo počet nadplôch, ktorých sú prienikom, určiť. Venovali sme sa hlavne monomiálnym krivkám v štvorrozmernom afinnom priestore, ktorých asociovaný ideál má minimálnu bázu s piatimi generátormi. Ukázali sme, že všetky takéto ideály, a teda aj monomiálne krivky, sú úplným alebo množinovým úplným prienikom, a teda najmenší počet plôch, ktorých sú tieto ireducibilné lineárne variety prienikom, sa rovná trom. Okrem toho sme ukázali aj konkrétne vyjadrenie týchto troch plôch.

Literatúra

[1] BRESINSKY, H. *Binomial generating sets for monomial curves, with applications in* A^4. Rend.Sem.Mat., Univers. Politecn. Torino, 46, 1988, pp. 353-370.

[2] BRESINSKY, H. *Monomial Gorenstein curves in* A^4 *as set-theoretic complete intersections.* Manuscripta Math, 27, 1979, pp. 353-358.

[3] BRESINSKY, H. *Symmetric semigroup of integers generated by* 4 *elements.* Manuscripta Math, 17, 1975, pp. 205-219.

[4] COX, D., LITTLE, J., O'SHEA, D. *Using Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, Volume 185, Springer - Verlag, 1998.

[5] EISENBUD, Z., EVANS,E.G., Jr. *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces.* Inventiones. math., 19: 380-383, 1973.

[6] GASTINGER, W. *Über die Verschwindungsideale monomialer Kurven.* Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften, Landshut, 1989.

[7] HOLEŠOVÁ, M. *Associated ideals of monomial curves in* A^4, PhD. thesis [slovak], FMFI UK Bratislava, 2005.

[8] KUNZ, E. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie.* Vieweg, Braunschweig, 1980.

[9] KRONECKER, L. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen.* J. Reine Angew. Math. 92, 1882.

[10] PATIL, D. *Certain monomial curves are set-theoretical complete intersections.* In: Manuscripta Math. 68, 1990, p. 399-404.

[11] PERRON, O. *Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker.* Math. Z. 47: 318-324, 1941.

[12] RENSCHUCH, B. *Elementare und praktische Idealtheorie.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

[13] SOLČAN, Š. *Monomiálne krivky* $C(p^2, p^2+p, p^2+p+1, (p+1)^2)$ *ako množinové úplné prieniky.* Zborník vedeck ych prác z medzinárodnej vedeckej konferencie Matematika vo výučbe, výskume a praxi, Nitra 2002, pp. 94 - 97.

[14] SOLČAN, Š. *Monomiálne krivky a množinové úplné prieniky.* Slovenský časopis pre geometriu a grafiku, ročník 8, číslo 15, 2011, pp. 29 - 40.

[15] STORCH, U. *Bemerkung zu einem Satz von M. Kneser.* Arch. Math, 23: 403-404, 1972.

[16] TURČANOVÁ, M. *Niektoré monomiálne krivky v* A^4 *ako množinový úplný prienik.* Rigorózna práca, FMFI UK Bratislava, 2000.

[17] VAHLEN, K.T. *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumkurven.* J. reine u. angew. Math., 108: 346-347, 1891.

[18] VAN DER WAERDEN, B.L. *Referat zur Arbeit "Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker" von O.Peron.* Zentralblatt für Math., 24: 276, 1941.

[19] ZARISKI, O., SAMUEL, P. *Commutative Algebra,vol. I.* D. van Nostrand Comp., Princeton-New York-Toronto-London, 1958, ruský preklad: Moskva 1963.

RNDr. Michaela Holešová, PhD.

Katedra stavebnej mechaniky a aplikovanej matematiky
Stavebná fakulta Žilinskej univerzity v Žiline
Univerzitná 8215/1, Žilina, SR
e-mail: michaela.holesova@fstav.uniza.sk

Abstracts

J. Čižmár: On a Certain Cyclic Birational Correspondence in $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{k})$

In this paper a birational cyclic correspondence T is described in an n-dimensional projective space $\boldsymbol{P}^n(k)$ ($n \geq 2$) over an algebraically closed field k of characteristic 0. The correspondence T is described as follows: in the space $\boldsymbol{P}^n(k)$ a non-incident point O and a regular hyperquadric are given. A point $(y')\in \boldsymbol{P}^n(k)$ corresponds to an arbitrary point $(y) \in \boldsymbol{P}^n(k)$ if: a) points O, (y), (y') are collinear; b) if $({}^1r)$, $({}^2r)$ are intersection points of the straight line $O(y)$ with the hyperquadric Q, then the cross-ratio $(({}^1r)({}^2r)(y)(y')) = \varepsilon$, ε being the primitive m^{th} root of 1 ($m \geq 3$). The following sets are found: a) the fundamental variety; b) the set of all irregular points; c) the set of all biregular points; d) the homaloidal system and its properties; e) structural properties of the associated map.

M. Kočandrlová, J. Marková: Sum of a Finite Sequence of Powers of Natural Numbers and Perfect Suqares

Two possible approaches to find the final sum of the powers of natural numbers are shown, by means of solving linear equations. Simple algorithm is derived to generate sums, comparing the table of known coefficients of polynomials with Pascal triangle. Finally, application of sum of squares of natural numbers to finding perfect squares is presented.

S. Tomiczková: Pentagonal Tiling of the Plane

Pentagonal tiling is a tiling or tessellation of the plane where each piece (tile) is a pentagon. We describe classification, history and some properties of pentagonal tiling.

H. Holešová: Associated Ideals of Special Classes of Monomial Curves as Set-Theoretic Complete Intersections

Associated ideals of algebraic varieties are studied in the connection to determining the number of surfaces of which the algebraic varieties are intersections. In this article we deal with associated prime ideals of monomial curves. We show for concrete classes of monomial curves that their associated ideals and these monomial curves are ideal or set-theoretic complete intersections.

G
Slovak Journal for Geometry and Graphics

Volume 13 (2016), No. 25
ISSN 1336-524X

Edited by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, brief reports, state-of-the-art reviews, analyses, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, analytic, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social and technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17
812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:
Redakcia G - SSGG
SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia
ssgg@ssgg.sk

Frequency: One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.
Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s. r. o.

G is cited in: Zentralblatt für Mathematik

www.ssgg.sk