



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU  
ročník 13, číslo 26, 2016  
ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

**SSGG****Vedúca redaktorka:**

Daniela Velichová

**Výkonné redaktorky:**

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

**Redakčná rada:**

Vojtech Bálint

Miloš Božek

Ján Čízmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Štefan Solčan

Martin Šperka

Margita Vajsálová

Valent Zaťko

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referaty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

**Redakcia:** Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku  
Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta  
Slovenská technická univerzita v Bratislave  
Námestie slobody 17  
812 31 Bratislava

**Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:**

Redakcia G - SSGG

ÚMF SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

ssgg@ssgg.sk

**Periodicita:** Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.  
Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Euro.  
Evidenčné číslo EV 3228/09

**Informácie a pokyny pre autorov na adresu:** [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

**Tlačí:** ForPress Nitrianske tlačiarne, s. r. o.

**Časopis G je citovaný v:** Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG december 2016, Bratislava

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkol'vek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.

SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU  
SLOVAK JOURNAL FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

ročník 13, číslo 26, 2016  
volume 13, number 26, 2016



## Obsah – Contents

Metódy výpočtu normál pre konštrukciu interpolantov nad trojuholníkovou siet'ou Methods for calculation of normal vectors for construction of interpolants above triangular network	5
Róbert Bohdal	
Folk ornament as an important factor in identifying plane geometric shapes Ľudový ornament ako dôležitý faktor pri rozpoznávaní rovinných geometrických útvarov	21
Ján Gunčaga, Jozef Zentko	
Discretization of the Laplace-Beltrami operator using numerical differentiation Diskretizácia Laplaceovho-Beltramiho operátora pomocou numerického derivovania	33
Samuel Struss, Pavel Chalmovianský	
Geometrické charakteristiky objektov pre aplikácie v geografii, kartografii a staviteľstve Geometric characteristics of objects for applications in geography, cartography and civil engineering	43
Margita Vajsálová	

## **SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ**



### **PRE GEOMETRIU A GRAFIKU**

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka  
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.  
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu a metodiku  
vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch  
škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého  
zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov  
a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy,  
e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

---

#### **Spoločnosť SSGG**

Ústav matematiky a fyziky  
Strojnícka fakulta STU v Bratislave

Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR  
e-mail: [ssgg@ssgg.sk](mailto:ssgg@ssgg.sk), URL: [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

# Metódy výpočtu normál pre konštrukciu interpolantov nad trojuholníkovou sietou

Róbert Bohdal

## Abstrakt

V tomto článku porovnáme niekoľko vybraných metód pre určenie normálových vektorov v daných bodoch, ktoré sú potrebné pre konštrukciu lokálnych interpolantov nad trojuholníkovou sieťou. Hodnoty normál v bodoch tvoriacich trojuholníkovú sieť majú veľký vplyv na výsledný tvar a hladkosť vytvorenej interpolačnej plochy. Vyčíslime odchýlku vypočítaných normál od normál určených pomocou parciálnej derivácie ako i presnosť s akou sa interpolačné plochy zhodujú s testovacími funkiami. Z našich testov vyplýva, že najlepšie výsledky pre výpočet normál dosahuje metóda využívajúca tenkostenné splajny. Metóda využívajúca vážený priemer, ktorá bola vytvorená kombináciou Littleho a Maxovej metódy, dosiahla druhú najlepšiu presnosť.

**Kľúčové slová:** výpočet normál, interpolácia nerovnomerne rozložených dát, tenkostenný splajn, Clough-Tocher, Powell-Sabin

## Abstract

In this article, we compare selected methods for the estimation of normal vectors, which are necessary for the construction of interpolants above the triangular network. The values of normals in individual points of the triangular network greatly affect the shape and the smoothness of the resulting interpolation surface. We compare the individual methods on in-advance given (calculated) normals of the test functions and on the accuracy with which the interpolation surfaces match the test functions. From our tests, the best results were achieved by the method of calculating normals using the local interpolation thin plate spline. The method of weighted average, which was created by combining Little's and Max's method, came the second in order.

**Key words:** normals calculation, scattered data interpolation, thin plate spline, Clough-Tocher, Powell-Sabin

## 1 Úvod

V mnohých aplikáciach sa často stretávame s problémom interpolácie nerovnomerne rozložených bodov. V prípade malého počtu zadaných bodov je najlepšie zvoliť (z pohľadu presnosti interpolácie a hladkosti výslednej plochy) tzv. globálne metódy, ktoré interpolujú vstupné body iba jedinou funkciou. Najčastejšie sa používajú metódy radiálnych bázických funkcií, medzi ktoré patria Hardyho multkvadriky (MQ), tenkostenné splajny (TPS) [2] a ďalšie [7]. Pre väčší počet vstupných bodov (rádovo niekoľko tisíc a viac) nemôžeme použiť také globálne metódy, ktoré pri vyčíslení využívajú riešenie sústav rovníc s hustými (plnými) maticami. V takom prípade je použitie lokálnych metód (aj za cenu menšej presnosti) oveľa vhodnejšie. Lokálne metódy využívajú čiastkové funkcie, ktoré interpolujú iba niekoľko bodov v určitom okolí. Príkladom

takýchto metód je Cloughova-Tocherova [1, 6, 11] či Powellova-Sabinova [1, 6, 13] interpolačná metóda, interpolácia najbližším susedom (*natural neighbour interpolation*) [10] a ďalšie. Mnohé z nich vyžadujú poznáť normálové vektory v daniých bodoch. Keďže tieto vektory obyčajne nie sú známe, musia byť vypočítané. Kvalita vytvorených interpolačných plôch (v zmysle vizuálnej hladkosti, spojitosť, presnosti atď.) veľmi závisí na presnosti s akou sú normálové vektory určené. Parciálne derivácie, ktoré určujú gradient plochy vo zvolenom bode, majú často väčší vplyv na tvar plochy ako stupeň hladkosti či stupeň polynomov, ktorým je interpolovaná plocha určená.

Jin a kol. [8] porovnávali vybrané metódy váženého priemeru pre výpočet normál na niekoľkých testovacích plochách, pre ktoré sú známe analyticky určené normály, pričom ich porovnávacia technika je založená na kumulatívnom histograme uhlu odchýliek medzi vypočítanými a známymi normálami. Ich porovnávanie však nezahrňuje normály na obvode neuzavretých plôch.

## 2 Metódy pre výpočet normál

Existuje mnoho metód ako odhadnúť hodnoty normál. Najčastejšie sa používajú metódy váženého priemeru a metódy využívajúce lokálne interpolanty či aproximanty. O niečo menej často sa používajú globálne metódy, obyčajne využívajúce minimalizáciu hodnoty určitého integrálu na triangulačnej sieti. Iný prístup, ktorý je založený na lineárnej regresii a na metóde konečných diferencií, môžeme nájsť v článku [9].

Väčšina metód využíva k odhadu normál dopredu vytvorenú trianguláciu, zostrojenú zo zadaných bodov. Normály sa potom vypočítajú pomocou váženého priemeru z normál prislúchajúcich trojuholníkov. Je vhodné použiť Delaunayovu trianguláciu, ktorá minimalizuje počet „dlhých a tenkých“<sup>1</sup> trojuholníkov vo vnútri siete, pretože táto triangulácia maximalizuje minimálne uhly všetkých trojuholníkov triangulácie.

Budem hľadať metódu dostatočne robustnú vzhľadom na vstupnú sieť bodov. Často sa totiž stáva, že triangulácia vytvorená z daniých bodov obsahuje na okraji „dlhé a tenké“ trojuholníky, ktoré nepriaznivo vplývajú na presnosť výpočtu normál metódami váženého priemeru. Zostrojené interpolačné plochy, ktoré tieto normály využívajú, môžu potom na okraji vytvárať nežiadúce tvary (pozri obrázok 4a).

### 2.1 Normály vypočítané váženým priemerom

Tieto metódy používajú dopredu vytvorenú trianguláciu vstupných bodov, ktoré má výsledná funkcia interpolovať.

Majme dané body  $B_i[x_i, y_i, z_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  (vrcholy trojuholníkovej siete  $\mathcal{T}$ ), z množiny dianých bodov v  $\mathbb{E}^3$ . Potom hodnoty normál  $\hat{\mathbf{n}}_i$  vo vrcholoch  $B_i$  môžeme odhadnúť pomocou predpisu uvedeného v [6]:

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \sum_{\mathcal{N}_i} \omega_{ijk} \mathbf{n}_{\triangle ijk}, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Tenké trojuholníky sú také, ktorých minimálne jeden uhol je oveľa menší oproti ostatným. Dlhé trojuholníky majú navyše dve strany výrazne dlhšie oproti ostatným trojuholníkom v sieti.

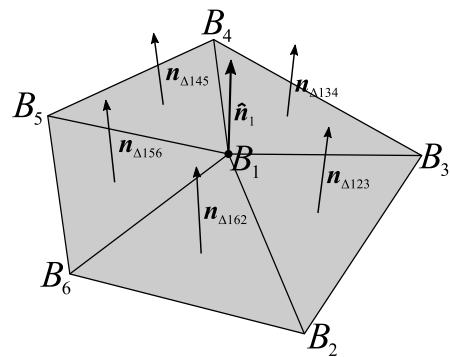
kde váha  $\omega_{ijk}$  je vyjadrená vzťahom:

$$\omega_{ijk} = \frac{\sigma_{ijk}}{\sum_{\mathcal{N}_i} \sigma_{ijk}} \quad (2)$$

a kde  $\mathbf{n}_{\Delta ijk}$  označuje normálu trojuholníka  $B_i B_j B_k$ . Suma vo vzťahu (1) je vyčíslená pre všetky trojice indexov  $(i, j, k)$  vrcholov triangulácie z množiny:

$$\mathcal{N}_i = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3; j \neq k, \text{ kde } B_j, B_k \text{ vyhovujú „kritériu výberu“}\}.$$

Kritérium výberu zahŕňa všetky vrcholy, ktoré buď tvoria hranu s vrcholom  $B_i$ , alebo ležia v predpísanom okolí vrcholu  $B_i$  (pozri obrázok 1).



Obr. 1. Príklad príľahlých trojuholníkov pre výpočet normály  $\hat{n}_1$  s indexmi vrcholov patriacich do množiny  $\mathcal{N}_1$

Podľa [6], hodnoty  $\sigma_{ijk}$  vo vzťahu (2) sú určené jednou z nasledujúcich možností (pozri obrázok 2):

- Aritmetický priemer (Gouraud):

$$\sigma_{ijk} = 1$$

Každý trojuholník prispeje rovnakou váhou do výslednej normály.

- Prevrátená hodnota dĺžok (Little):

$$\sigma_{ijk} = \frac{1}{|B_i B_j|^r |B_i B_k|^r}$$

Štandardne  $r = 1, 2$  alebo  $1/2$ . Váha závisí od prevrátenej hodnoty vzdialenosť jednotlivých vrcholov trojuholníka od bodu  $B_i$ . Čím je trojuholník dlhší, tým menej prispieva do výslednej normály.

- Uhol pri vrchole (Thurmer):

$$\sigma_{ijk} = \alpha_i$$

Symbol  $\alpha_i$  označuje uhol pri vrchole  $B_i$ . Do výslednej normály prispeje najviac trojuholník, ktorý má pri tomto vrchole najväčší uhol.

- Obsah trojuholníka (Akima):

$$\sigma_{ijk} = S_{\Delta B_i B_j B_k}$$

Trojuholník s najväčším obsahom prispeje do výslednej normály najviac. Symbol  $S$  označuje obsah trojuholníka  $B_i B_j B_k$ .

- Sklon plochy (Akima2):

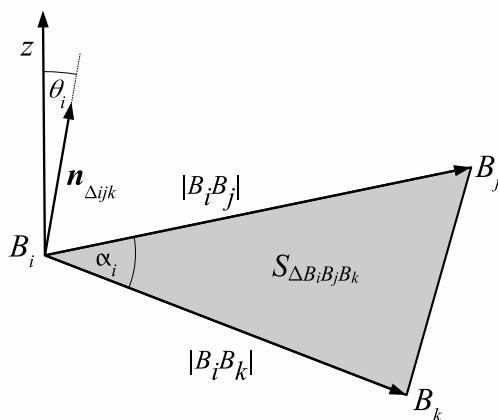
$$\sigma_{ijk} = \cos(\theta_i) S_{\Delta B_i B_j B_k}$$

Trojuholník, ktorého normála zviera so  $z$ -ovou osou menší uhol, prispieva k výslednej normále najmenej. To zabezpečuje rovnocennosť trojuholníkov, ktoré majú v priemete do roviny  $xy$  rovnaký obsah. Symbol  $\theta_i$  označuje uhol medzi osou  $z$  a  $\mathbf{n}_{\Delta ijk}$ .

V článku [12] autor navrhuje vypočítanie  $\sigma_{ijk}$  vzťahom:

$$\sigma_{ijk} = \frac{\sin(\alpha_i)}{|B_i B_j|^r |B_i B_k|^r}$$

Táto metóda preferuje trojuholníky, ktorých uhol pri vrchole  $B_i$  sa blíži pravému uhlu a ktorých strany sú krátke.



Obr. 2. Prvky trojuholníka pre výpočet normál

Metódy váženého priemeru sú sice výpočtovo najmenej náročné, avšak dávajú spomedzi tu spomenutých metód najmenej presné výsledky. Sú nevhodné pre triangulácie s menším počtom vrcholov, v ktorých sa sklon trojuholníkov často mení.

## 2.2 Normály vypočítané pomocou lokálnej interpolácie alebo aproximácie

Ďalšou možnosťou určenia normály v bode  $B_i$  je preložiť týmto bodom lokálnu funkciu  $f_i(x, y)$ , ktorá interpoluje resp. approximuje množinu „blízkych susedov“ bodu  $B_i$ , a normálu vypočítať pomocou parciálnych derivácií:

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \left( \frac{\partial f_i(x_i, y_i)}{\partial x}, \frac{\partial f_i(x_i, y_i)}{\partial y}, -1 \right)$$

V práci [16] je porovnaných niekoľko typov lokálnych funkcií, medzi ktoré patria:

- Shepardov interpolant:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x, y) z_i,$$

kde váha  $\omega_i$  je vyjadrená vzťahom  $\omega_i(x, y) = \frac{d_i^2(x, y)}{\sum_{i=1}^n d_i^2(x, y)}$  a  $d_i^2(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$

- Hardyho MQ interpolant:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \sqrt{d_i^2(x, y) + R^2},$$

kde hodnota  $R^2$  je daný tvarovací parameter a neznáme  $c_i$  sú vypočítané zo sústavy rovníc daných interpolačnou podmienkou  $f(x_i, y_i) = z_i$

- lineárna polynomická funkcia určená metódou najmenších štvorcov
- kvadratická polynomická funkcia určená metódou najmenších štvorcov

Podľa testov uskutočnených Steadom, najlepšie výsledky dosahuje Hardyho MQ interpolant.

V článku [14] je uvedená metóda, podľa ktorej normálmu vo vrchole  $B_i$  určíme pomocou parciálnych derivácií kvadratickej polynomickej funkcie  $f(x, y) = z_i + a(x - x_i)^2 + b(x - x_i)(y - y_i) + c(y - y_i)^2 + d(x - x_i) + e(y - y_i)$ , ktorá interpoluje vrchol  $B_i$  a approximuje množinu „blízkych vrcholov“ v zmysle metódy najmenších štvorcov. Každému vrcholu  $B_j$  z množiny blízkych vrcholov je priradená váha  $\omega_j$  tak, aby vrcholy najviac vzdialené od  $B_i$  prispievali k výslednej hodnote derivácie čo najmenej:

$$\omega_j = \frac{(r_i - |B_i B_j|)_+}{r_i |B_i B_j|},$$

kde  $r_i$  je polomer vplyvu okolia vrcholu  $B_i$ .

### 2.3 Normály vypočítané pomocou globálnych metód

Najlepšie výsledky pri odhade normál dosiahneme pomocou globálnych metód, ktoré sú založené na hľadaní minima integrálnych funkcií. Príkladom je metóda Nielsonovej siete minimálnej normy (*Nielson's minimum norm network*) [15].

Globálne metódy pre odhad normál sice dávajú lepšie výsledky ako lokálne metódy, avšak pri ich výpočte musíme riešiť systémy rovníc s väčším počtom prvkov. Navyše je tento odhad podľa [6] len o málo presnejší ako metódy využívajúce lokálne interpolanty.

## 3 Metódy interpolácie nerovnomerne rozložených bodov

Riešením problému interpolácie nerovnomerne rozložených bodov je nájdenie takej funkcie  $f(x, y)$ , pre ktorú platí:

$$f(x_i, y_i) = z_i, \text{ kde } i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

pričom  $B_i[x_i, y_i, z_i]$  sú dopredu dané body v  $\mathbb{E}^3$ . Hľadaná funkcia musí byť spojitá a musíme vedieť vypočítať funkčnú hodnotu v ľubovoľnom bode konvexného obalu danej množiny bodov.

### 3.1 Tenkostenno-splajnová interpolačná metóda

Tenkostenne splajny (*thin plate splines*) patria medzi triedu polyharmonických splajnov [7]. Samotný názov „tenkostenne splajny“ zaviedol už v roku 1977 Duchon v práci [3]. Tento názov je odvodený zo vzťahu, v ktorom sa hľadá minimum integrálu opisujúceho rozloženie tzv. energie ohybu (*bending energy*) na nekonečne tenkej elastickej doske.

Interpolačná funkcia  $f(x, y)$  je daná predpisom uvedeným v [4]:

$$f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i^2(x, y) \ln(d_i^2(x, y)), \text{ kde } [x, y] \in \mathbb{E}^2.$$

Hodnoty  $a_0, a_1, a_2, \lambda_i, i = 1, \dots, n$  sú neznáme. Môžeme ich vypočítať na základe okrajových podmienok:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0. \quad (4)$$

Aplikovaním interpolačných (3) a okrajových (4) podmienok môžeme vypočítať tieto neznáme hodnoty pomocou nasledovného systému rovníc:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 & r_{21}^2 \ln(r_{21}^2) & \cdots & r_{n1}^2 \ln(r_{n1}^2) \\ 1 & x_2 & y_2 & r_{12}^2 \ln(r_{12}^2) & 0 & \cdots & r_{n2}^2 \ln(r_{n2}^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & r_{1n}^2 \ln(r_{1n}^2) & r_{2n}^2 \ln(r_{2n}^2) & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \\ \vdots \\ \lambda_n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

kde  $r_{ij}^2 = r_{ji}^2 = d_{ji}^2(x, y) = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$ .

### 3.2 Cloughova-Tocherova interpolačná metóda

Pre zstrojenie  $C^1$  spojitého kubického Cloughovho-Tocherovho (C-T) interpolantu, musíme rozdeliť každý trojuholník vstupnej siete na tri *minitrojuholníky*, spojením jeho vrcholov s bodom ležiacim vnútri každého trojuholníka (napr. v jeho ťažisku).

Výsledná funkcia  $f(x, y)$  bude  $C^1$  spojitá plocha, pozostávajúca z kubických Bèzierovych záplat:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(u, v, w) = & \mathbf{b}_{300}u^3 + 3\mathbf{b}_{210}u^2v + 3\mathbf{b}_{120}uv^2 + \\ & \mathbf{b}_{030}v^3 + 3\mathbf{b}_{021}v^2w + 3\mathbf{b}_{012}vw^2 + \\ & \mathbf{b}_{003}w^3 + 3\mathbf{b}_{102}w^2u + 3\mathbf{b}_{201}wu^2 + 6\mathbf{b}_{111}uvw. \end{aligned} \quad (5)$$

nad všetkými minitrojuholníkmi<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Prechod z karteziánskych súradníc  $(x, y)$  na barycentrické  $(u, v, w)$  dosiahneme tak, že nájdeme minitrojuholník, v ktorom bod  $[x, y]$  leží a potom vypočítame barycentrické súradnice tohto bodu vzhľadom na nájdený trojuholník.

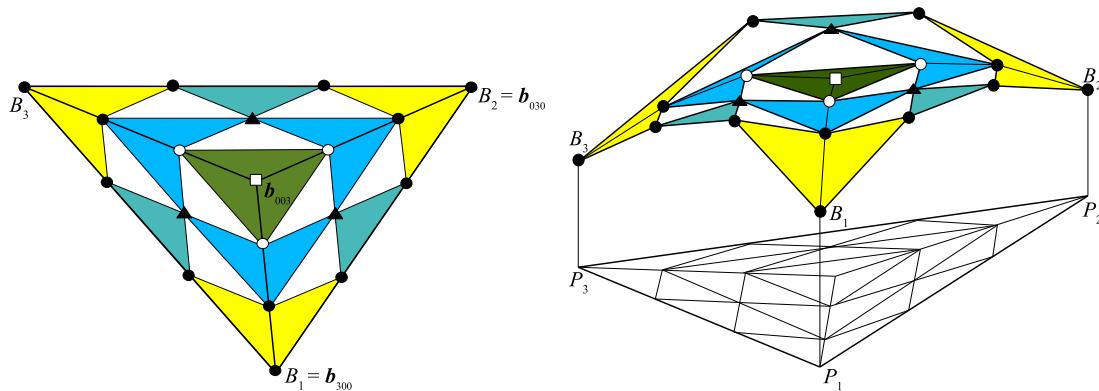
### 3.2.1 Výpočet riadiacich bodov Bèzierovych záplat

Bèzierove vrcholy riadiacej siete, troch stýkajúcich sa trojuholníkových záplat, vyčíslime nasledovným postupom [1, 6]:

Súradnice  $[x, y]$  Bèzierovych vrcholov v každom minitrojuholníku sa nachádzajú buď vo vrchochloch minitrojuholníka, alebo v  $1/3$  či v  $2/3$  príslušnej hrany, prípadne v ľažisku minitrojuholníka (pozri obrázok 3).

Súradnice z týchto Bèzierovych vrcholov sú určené nasledovným postupom:

1. Súradnice z Bèzierovych vrcholov nad  $P_1$  a  $P_2$  označené „●“ sú  $z$ -ové hodnoty bodov  $B_1$  a  $B_2$  z danej triangulácie.
2. Súradnice z vrcholov označených „●“, ktoré ležia na hranici riadiacej siete, sú vypočítané z podmienky, že tieto vrcholy ležia v dotykovej rovine určenej bodom  $B_1$  alebo  $B_2$  a normálou v tomto bode.
3. Súradnice z vrcholov označených „●“, ktoré ležia na spojniciach ľažiska trojuholníka s jeho vrcholmi, sú určené podmienkou, že ležia v rovine určenej jedným daným a dvoma vypočítanými bodmi „●“ v predošлом kroku (pozri žlté miketrojuholníky na obrázku 3).
4. Súradnice z troch vrcholov označených „▲“ vo vnútri minitrojuholníkov sú určené podmienkou, že ležia v rovine určenej vektorom odhadnutej priečnej derivácie<sup>3</sup> v strede každej z troch hrán trojuholníka  $B_1B_2B_3$  a príslušnými vrcholmi „●“ vypočítanými v kroku 2.
5. Súradnice z troch vrcholov označených „○“ môžu byť vypočítané z podmienky, že ležia v rovine určenej dvoma vrcholmi „▲“ vypočítanými v predošлом kroku a jedným vnútorným vrcholom „●“ vypočítaným v kroku 2<sup>4</sup>.
6. Posledný Bèzierov vrchol „□“, ležiaci nad ľažiskom trojuholníka  $P_1P_2P_3$ , leží v rovine určenej tromi vrcholmi „○“, pretože tri „stredové“ trojuholníky vyplnené zelenou farbou musia byť komplanárne.



Obr. 3. Konštrukcia Bèzierovych vrcholov nad tromi minitrojuholníkmi

Po určení všetkých potrebných vrcholov  $b_{ijk}$ , môžeme použiť predošlý vzťah (5) na vyčíslenie akéhokoľvek bodu Bèzierovej záplaty nad konkrétnym minitrojuholníkom<sup>5</sup>. Uvedeným postu-

<sup>3</sup>Táto môže byť určená napr. ako aritmetický priemer dvoch vektorov vypočítaných vektorovým súčinom normály v zadanom bode s vektorom smeru príslušnej hrany minitrojuholníka.

<sup>4</sup>Pretože platí, že dva príahlé miketrojuholníky tyrkysovej farby s vrcholmi „▲, ●, ○“ musia byť komplanárne.

<sup>5</sup>Na pokrytie trojuholníka  $B_1B_2B_3$  budeme teda potrebovať tri záplaty.

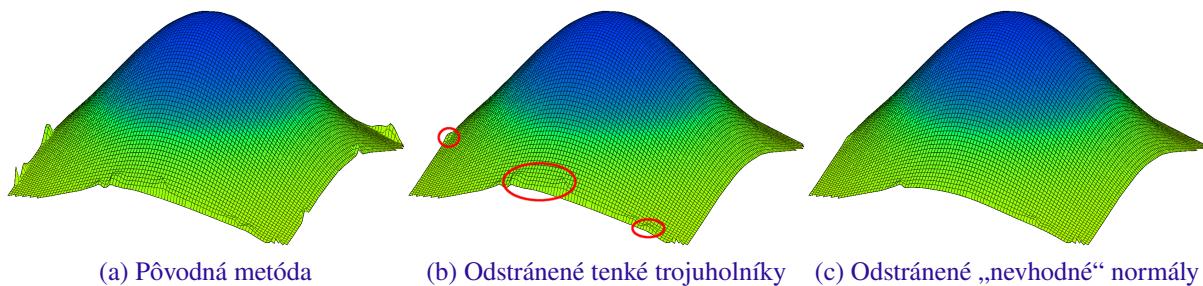
pom vypočítame trojicu záplat pre každý trojuholník vstupnej siete, čím získame  $C^1$  spojité interpolačné plochy.

## 4 Testovanie metód

Pre testovacie účely sme použili dátu, ktoré boli vytvorené pomocou 9-tich testovacích funkcií, v ktorých vieme vypočítať normály pomocou parciálnych derivácií. K siedmim testovacím funkciám uvedeným v [5] sme pridali dve vlastné (pozri obrázok 6 a prílohu 5).

Vzorky boli vytvorené z náhodne vybraných 100, 900, 2500 a 4900 bodov ležiacich v intervale  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ , rôznych pre každú testovaciu funkciu, čím sme získali 36 rôznych vstupných triangulácií. Porovnávali sme 7 metód výpočtu normál pomocou váženého priemeru s jednou metódou používajúcou lokálny interpolačný tenkostenný splajn. Všetky metódy boli testované na počítači s procesorom Intel(R) Core(TM) i5-4670K CPU @3.40GHz a 8GB RAM. Aplikácia na výpočet normál, interpolačných plôch a nižšie uvedených odchýliek bola naprogramovaná v jazyku C++. Pre vyhodnotenie pomerne veľkého množstva údajov bol vytvorený skript v jazyku R, pomocou ktorého sme vytvorili výsledné grafy a obrázky uvedené v prílohe. Príklad vstupnej triangulácie a výsledné normály pre vzorku bodov vytvorených z testovacej funkcie  $f_1(x, y)$  je na obrázku 5.

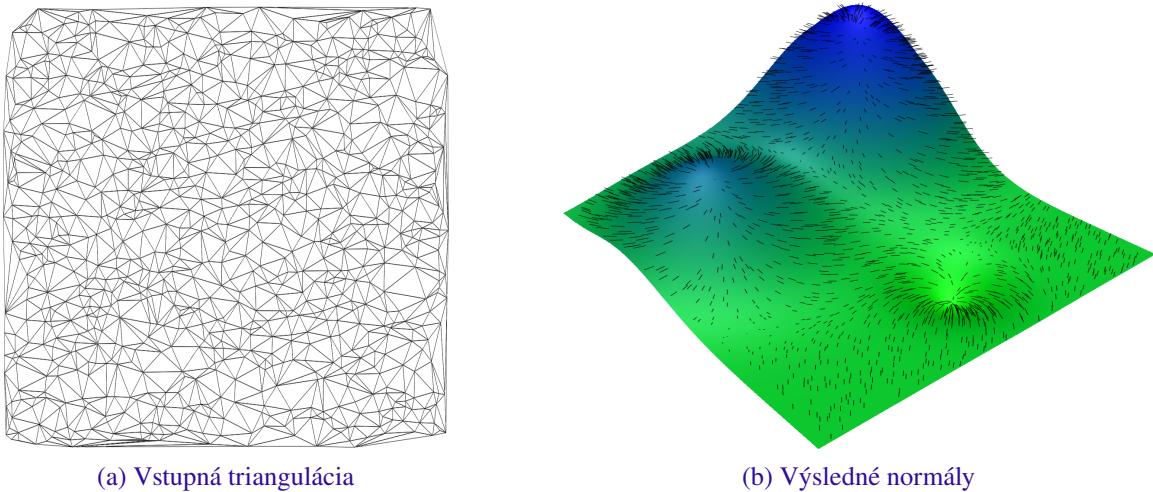
Niekteré z metód používajúcich vážený priemer (napr. metóda Akima) poskytujú zlé výsledky pre triangulácie obsahujúce veľmi „tenké a dlhé trojuholníky“, ktoré sa často vyskytujú na okraji triangulácie (pozri obrázok 5a). Po ich odstránení sme dosiahli zlepšenie výsledkov<sup>6</sup>, ale môže vzniknúť problém ako vypočítať hodnoty interpolačnej funkcie mimo triangulácie, ktorý je však riešiteľný. Ďalším pokusom bolo pre jednotlivé body z okraja trojuholníkovej siete nepoužívať vo váženom priemeru normály, ktoré sa veľmi líšia od „priemernej“ normály (pozri algoritmus 1). V tomto prípade bolo zlepšenie výsledkov miernejšie. Kombinácia oboch úprav poskytla pre menej robustné metódy výrazné zlepšenie tvaru výslednej interpolačnej plochy (pozri obrázok 4).



Obr. 4. Demonštrácia vplyvu úpravy výpočtu normál pre výsledný tvar interpolantu určeného vzorkou bodov z testovacej funkcie  $f_4(x, y)$ .

V kategórií metód používajúcich vážený priemer dosiahli najlepšie výsledky Littleho a Maxova metóda. Žiadna z nich nebola výrazne lepšia (pozri grafy na obrázku 7), pre niektoré dátu bola lepšia Littleho a pre iné Maxova. Rozhodli sme sa preto obe skombinovať do jedného vzťahu

<sup>6</sup>Odstránili sme trojuholníky, ktorých najväčší uhol bol väčší ako  $178^\circ$ .



Obr. 5. Príklad vstupnej triangulácie a vypočítaných normál metódou TPS pre vzorku bodov z testovej funkcie  $f_1(x, y)$ .

---

**Algoritmus 1** Odstránenie nevhodných normál

**vstup:** `num_normals, triangles_normals[], k`  
**výstup:** `triangles_normals`

---

```

1: if num_normals < 5 then
2:   return
3:   sum_norm = 0
4:   for all normal in triangles_normals do
5:     sum_norm += normal
6:   average_normal = sum_norm/num_normals
7:   sum_sqd = 0.0
8:   for i = 0 to num_normals do
9:     square_dif[i] = ||triangles_normals[i] - average_normal||2
10:    sum_sqd += square_dif[i]
11:   average_sqd = sum_sqd/num_normals
12:   for i = 0 to num_normals do
13:     delta_sqd = |square_dif[i] - average_sqd|
14:     if delta_sqd > k * average_sqd then
15:       odstráň triangles_normals[i] zo zoznamu

```

---

pomocou aritmetického priemeru (LittleMax):

$$\sigma_{ijk} = \frac{1 + \sin(\alpha_i)}{2|B_i B_j|^r |B_i B_k|^r}$$

čím sme dosiahli lepšiu „priemernú presnosť“ (pozri grafy na obrázku 7 a 8).

Z metód používajúcich lokálne interpolanty sme zo skupiny radiálnych bázických funkcií  $\phi(d_i^2(x, y))$  namiesto Hardyho multikvadrík  $\phi(d_i^2(x, y)) = \sqrt{d_i^2(x, y) + R^2}$  vybrali tenkostenné splajny  $\phi(d_i^2(x, y)) = 1/2d_i^2(x, y) \ln(d_i^2(x, y))$ , pretože nevyžadujú odhad parametra  $R^2$ .

V našom teste sme vypočítali:

1. odchýlky odhadnutých normál od normál vypočítaných pomocou parciálnych derivácií.  
Odchýlku sme vypočítali z uhla, ktorý zviera vypočítaná normála  $\hat{n}_i$  a skutočná normála

testovacej funkcie  $\nabla f_t(x, y)$  v danom bode  $(x_i, y_i)$ :

$$\text{RMSE}_\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left( \arccos \left( \frac{\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \nabla f_t(x_i, y_i)}{|\hat{\mathbf{n}}_i| |\nabla f_t(x_i, y_i)|} \right) \right)^2}{n}}.$$

Výsledky sú uvedené v grafoch na obrázku 7.

2. presnosť s akou sa výsledné interpolačné plochy vytvorené Cloughovou-Tocherovou či Powellovou-Sabinovou metódou zhodujú s príslušnou testovacou funkciou. Pre test presnosti interpolačnej plochy sme odchýlku vypočítali zo štvorca rozdielu medzi funkčnou hodnotou interpolačnej funkcie  $\hat{f}(x, y)$  a funkčnou hodnotou testovacej funkcie  $f_t(x, y)$  pre  $m = 2500$  náhodne vybratých bodov z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\hat{f}(x_i, y_i) - f_t(x_i, y_i))^2}{m}}.$$

Výsledky sú uvedené v grafoch na obrázku 8. Keďže poradie presnosti testovaných metód bolo takmer identické pre Cloughovu-Tocherovu a Powellovu-Sabinovu interpolačnú metódu, uvádzame iba výsledky v grafoch pre prvú z nich.

## 5 Zhodnotenie

Z testovaných metód sa podľa očakávania ukázala ako najlepšia metóda používajúca lokálny tenkospajnový interpolant (pozri grafy na obrázkoch 7 a 8). Druhá najlepšia metóda bola vo všeobecnosti kombinácia Littleho a Maxovej metódy. Oba prístupy pre výpočet boli dostatočne robustné vzhľadom na použité vstupné dátá a vypočítali pomerne presne normálly aj na okraji vstupnej siete. V prípade, že vstupných bodov je dostatočne veľa a vzdialenosť medzi nimi sú malé, je možné použiť akúkoľvek metódu, pretože odchýlky sú dostatočne malé.

Zaujímavým zistením bolo, že na rozdiel od Jin a kol. [8], kde ako najlepšia bola vyzdelená Thurmerova metóda, bola v našich testoch Littleho a Maxova metóda, resp. ich kombinácia, pre každú testovaciu funkciu lepšia. Pravdepodobne to bolo spôsobené nielen rozdielnymi testovacími funkciami<sup>7</sup>, ale aj tým, že Jin a kol. nezahrnuli do testov normálly vypočítané na okraji triangulácie. V našom prístupe sme jednak odstránili extrémne tenké obvodové trojuholníky, ale navyše sme normálly v bodoch na okraji triangulácie vypočítali s použitím algoritmu 1.

Pre aplikácie nevyžadujúce veľkú rýchlosť výpočtu normál je najvhodnejšie použiť metódu využívajúcu lokálny interpolačný tenkostenný splajn, v inom prípade doporučujeme použiť kombináciu Littleho a Maxovej metódy alebo niektorú z nich. Čas výpočtu jednotlivých metód v milisekundách je uvedený v tabuľke 1. Z tabuľky je vidno, že metóda používajúca tenkostenné splajny (TPS) je približne 5x časovo náročnejšia ako metódy používajúce vážený priemer.

<sup>7</sup>V našom prípade sme pre vzorku testovacích bodov používali explicitné funkcie, pretože sme sa zaoberali aj vplyvom normál na tvar skonštruovanej interpolačnej plochy. Jin a kol. používali aj implicitné funkcie guľovej plochy, torusu a ďalšie.

Metóda/počet bodov	10x10	30x30	50x50	70x70	90x90
<b>Gouraud</b>	0,34	7,93	43,24	169,00	436,86
<b>Little</b>	0,49	9,25	46,21	171,57	447,71
<b>Thurmer</b>	0,56	9,63	46,80	178,29	452,57
<b>Akima</b>	0,38	8,31	44,09	173,71	436,86
<b>Akima2</b>	0,53	9,56	47,90	171,71	454,57
<b>Max</b>	0,47	8,49	44,34	171,71	439,14
<b>LittleMax</b>	0,56	9,83	48,13	180,57	456,57
<b>TPS</b>	3,94	52,39	240,90	824,57	2025,43

Tabuľka 1. Porovnanie času výpočtov jednotlivých metód v milisekundách

## Zoznam testovacích funkcií

$$f_1(x, y) = \frac{3e^{-\frac{(9y+1)^2}{10} - \frac{(9x+1)^2}{49}}}{4} + \frac{3e^{-\frac{(9y-2)^2}{4} - \frac{(9x-2)^2}{4}}}{4} + \frac{e^{-\frac{(9y-3)^2}{4} - \frac{(9x-7)^2}{4}}}{2} - \frac{e^{-(9y-7)^2 - (9x-4)^2}}{5}$$

$$f_2(x, y) = \frac{1 - \tanh(9y - 9x)}{9}$$

$$f_3(x, y) = \frac{\cos\left(\frac{27}{5}y\right) + \frac{5}{4}}{6(3x - 1)^2 + 6}$$

$$f_4(x, y) = \frac{e^{-\frac{81\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}{16}}}{3}$$

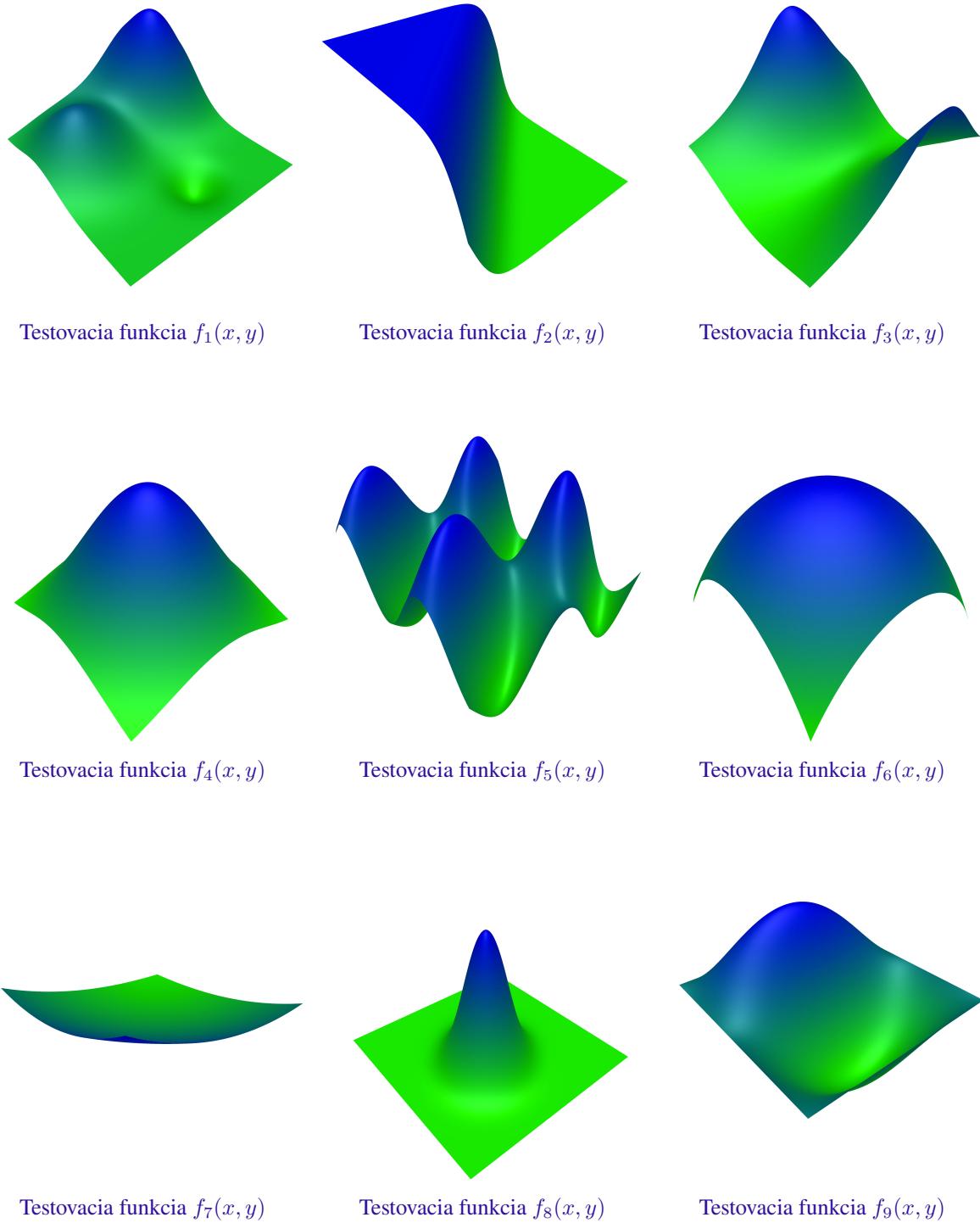
$$f_5(x, y) = \cos(10y) + \sin(10(x - y))$$

$$f_6(x, y) = \frac{\sqrt{64 - 81\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)}}{9} - \frac{1}{2}$$

$$f_7(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-3\left(\sqrt{y^2+x^2}-\frac{67}{10}\right)} + 1}}$$

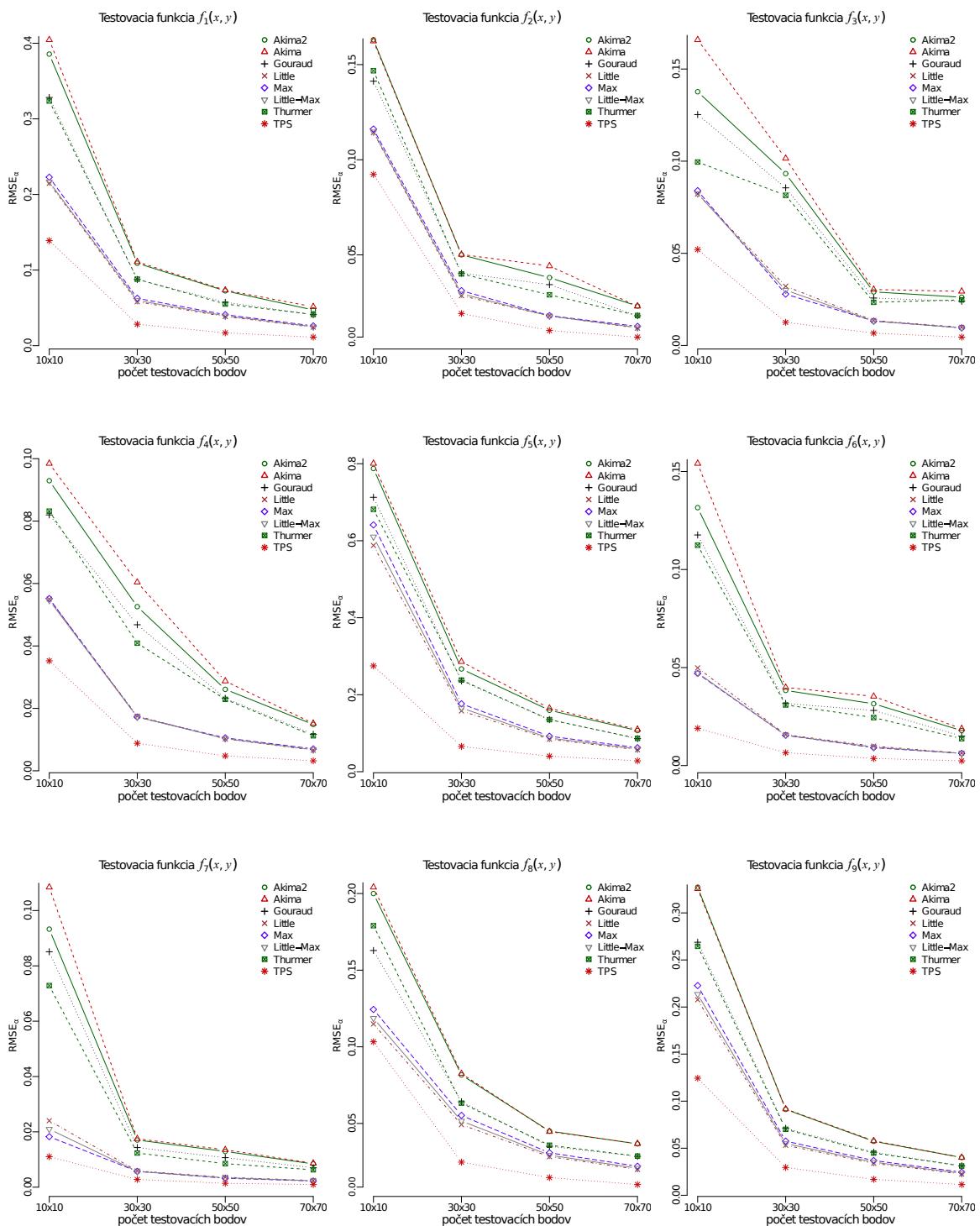
$$f_8(x, y) = 50e^{-200\left(\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{10}\right)^2\right)} + e^{-50\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)}$$

$$f_9(x, y) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$$



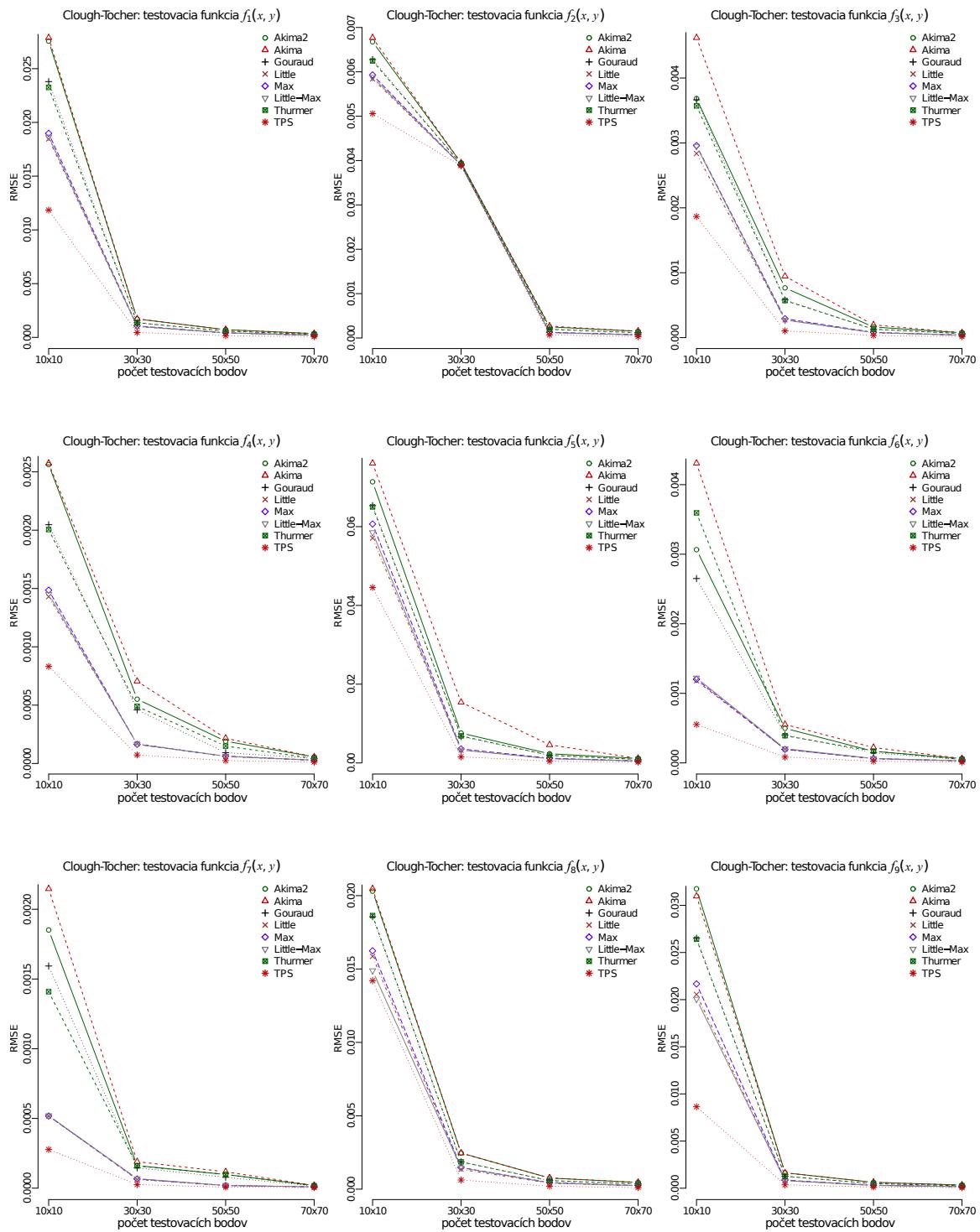
Obr. 6. Obrázky testovacích funkcií

## Odchýlky medzi vypočítanými a analyticky určenými normálami



Obr. 7. Grafy odchýliek medzi vypočítanou normálou a skutočnou normálou testovacej funkcie

## Odchýlky medzi C-T interpolantom a testovacou funkciou



Obr. 8. Grafy odchýliek medzi funkčnou hodnotou interpolačnej a testovacej funkcie

## Literatúra

- [1] Amidror, I. Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems: a survey. *Journal of electronic imaging*, ročník 11, č. 2, 2002: s. 157–176.
- [2] Bookstein, F. L., ai. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, ročník 11, č. 6, 1989: s. 567–585.
- [3] Duchon, J. Splines minimizing rotation invariant semi-norms in Sobolev spaces. V *Constructive Theory of Functions of Several Variables, Lecture Notes in Math.*, ročník 571, 1977, s. 85–100.
- [4] Fogel, D., Tinney, L. Image registration using multiquadric functions, the finite element method, bivariate mapping polynomials and the thin plate spline. 1996.
- [5] Franke, R. Scattered data interpolation: Tests of some methods. *Mathematics of computation*, ročník 38, č. 157, 1982: s. 181–200.
- [6] Hoschek, J., Lasser, D. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. Natick, MA, USA: A. K. Peters, Ltd., 1993, ISBN 1-56881-007-5.
- [7] Iske, A. Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems. *Rendiconti del Seminario Matematico, Polytechnic University of Turin*, ročník 61, č. 3, 2003: s. 247–285.
- [8] Jin, S., Lewis, R. R., West, D. A comparison of algorithms for vertex normal computation. *The Visual Computer*, ročník 21, č. 1-2, 2005: s. 71–82.
- [9] Jirka, T., Skala, V. Gradient Vector Estimation and Vertex Normal Computation. Technická správa, University of West Bohemia, Pilsen, 2002.
- [10] Ledoux, H., Gold, C. An efficient natural neighbour interpolation algorithm for geoscientific modelling. V *Developments in Spatial Data Handling*, Springer, 2005, s. 97–108.
- [11] Mann, S. Cubic precision clough-tocher interpolation. *Computer aided geometric design*, ročník 16, č. 2, 1999: s. 85–88.
- [12] Max, N. Weights for computing vertex normals from facet normals. *Journal of Graphics Tools*, ročník 4, č. 2, 1999: s. 1–6.
- [13] Powell, M., Sabin, M. Piecewise quadratic approximations on triangles. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ročník 3, č. 4, 1977: s. 316–325.
- [14] Renka, R., Cline, A. A triangle-based C1 interpolation method. *Rocky Mountain Journal*, 1984.
- [15] Scheuermann, G., Tricoche, X., Hagen, H. C1-interpolation for vector field topology visualization. V *Visualization'99. Proceedings*, IEEE, 1999, s. 271–533.
- [16] Stead, S. Estimation of gradients from scattered data. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, ročník 14, č. 1, 1984.

---

**RNDr. Róbert Bohdal, PhD.**

Katedra algebra, geometrie a didaktiky matematiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského  
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, SR  
e-mail: bohdal@fmph.uniba.sk

# Folk Ornament as an Important Factor in Identifying Plane Geometric Shapes

Ján Gunčaga, Jozef Zentko

## Abstrakt

Článok prezentuje možnosť identifikácie geometrických útvarov prostredníctvom ľudovej kultúry. Zameriame sa na možnosti využitia ľudového ornamentu ako nástroja na prezentáciu a identifikáciu rovinných geometrických útvarov vo vyučovaní matematiky. Budeme analyzovať geometrické útvary v rozličných ornamentálnych vzoroch používaných v ľudovej kultúre, v rozličných textilných a iných objektoch. Poukážeme na špecifika primárneho vzdelávania na Slovensku s ohľadom na interdisciplinárny kontext.

**Kľúčové slová:** rovinný geometrický útvar, vyučovanie geometrie podľa Štátneho vzdelávacieho programu ISCED 1, ornament v textile

**MSC 2010:** 97D40

## Abstract

The paper presents the possibility of developing geometric competencies through folk culture. Our attention is focused on a particular folk ornament that can be used for presentation and identification of a plane geometric shape by pupils during the teaching of mathematics. We will focus on the possibilities for the analysis of geometric shapes in a variety of ornaments used in folk culture, in different textile and functional objects. We will describe the specifics of primary education in Slovakia with regard to the interdisciplinary context.

**Key words:** plane geometric shape, geometry teaching according Slovak state curriculum ISCED1, ornament in textile

The space for applying the folk art in the State Education Program is constantly increasing. This is particularly important just in the time of constant formation of the European Union. It is important that each state as a member of the Union should have the opportunity to keep their cultural and historical heritage. One of these possibilities is the creative application of folk ornaments in the educational process. The options for it are offered in various relationships between school subjects and interdisciplinary overlaps (see [13]). Extensive application is in the primary stage of education in mathematics and technical and art education.

Folk ornament can be characterized as linear or planar decoration, respectively, which is formed by rhythmic and symmetrical repetition of naturalistic (stylized) and abstract (geometrical) elements (as specified in [6]). Thus it is here that just gives us the versatility of folk ornamentation especially in teaching within cognitive science of plant and animal and geometric motifs in the basic mathematical and geometrical imagination. Naturally, except for these important information, the child acquires an idea of the colour and shape composition, which is especially important in the development of artistic creativity. At the actual realization, elementary technical and manual skills are developed. It is therefore essential that the selection of the art techniques used in the interpretation of the ornament was chosen with regard to its typology.

State educational program ISCED 1 - primary education determines the compulsory subjects which are to be incorporated in various educational areas. In the frame of their school curriculum, each school can also create their own teaching subject (using free – available hours). In addition to teaching subjects, cross-cutting themes are introduced that cut across all learning areas (ISCED 1).

The ideal use of folk ornaments is also offered in the educational field of the State educational program ISCED 1 *Mathematics and information work*.

## 1 Mathematics and information work

This educational area includes two subjects: mathematics and informatics education (ISCED 1). Individual subjects are integral basis of natural and technical sciences, essential to modern society marked by technological progress. Just the world of information and technological procedures is progressing at high speed in modern times and therefore it is necessary for each student to be educated with regard to the numerous existing opportunities and trends of today's world. In addition to the educational dimension, the education to values is extremely important for these subjects.

*Mathematics* belongs to the natural sciences which develop pupils' mathematical thinking, which is an essential part of the problem solutions arising in everyday situations. Mathematics in primary education is focused on the application of mathematical knowledge into practice (ISCED 1). Educational content of mathematics in the first grade of primary school is divided into five thematic areas (see [11], p. 13).

- Numbers, variables and numerical performances with numbers;
- Sequences, relations, functions, tables, diagrams;
- Geometry and measurement;
- Combinatorics, probability, statistics;
- Logic, the reasoning, evidence.

"Mathematics as a scientific discipline has its undeniable value in being able to abstract peculiarities of tangible objects and phenomena and to study the quantitative and spatial relationships of reality in their purest foundations" (see [2], p. 137). The state education program offers several options within the content and performance standards, as well as individual recommending themes for the application of geometric ornamentation in the educational process. Significant opportunities are offered mainly for the proper use of relationships between school subjects (ISCED 1). For the application of folk ornaments, geometry and measurement is the most appropriate area. In particular, the work with basic geometric shapes.

Similarly, it is possible to focus on exploring the beauty of folk ornamentation and then to explore subjects, shapes, groups - pairs, triples, as well as symbols of object logical system (ISCED 1). This thematic level is significantly related to the application of cultural heritage in education.

## 2 Geometry and measurement in Upgrading State Education Programme ISCED1

Since 2014, the public education program has been complemented by an innovative program with performance standards for various thematic areas and various school years. In the first year, the teaching process focused on planar geometric shapes: curved line, straight line, open and closed line, circle, square, triangle, rectangle (see [8]). As for the three-dimensional structure, cube, cylinder, and sphere were recommended. Over this year, pupils learn to understand orientation in plane and space (right, left, up, down, over, under, in, on, in the front of, behind, beside, between, in the front, in the back). Units of length are taught only on an intuitive level, taking advantage of both historical units (foot, thumb, palm, elbow, another subject – e.g. clip), and comparing dimensional geometric figures (longer, shorter, higher, lower, wider, narrower, longest, shortest, lowest). On propaedeutic level, the pupils are acquainted with identical display - axial symmetry.

In the second year, students already get to know the basic geometric objects - point, line, ray, line segment, point belongs (does not belong) to the formation, the point lies (does not lie) on the formation, the endpoints of the line segment. Over this school year, the standard units are introduced: millimetre (mm), centimetre (cm), meter (m) and the length of the line segment in centimetres is determined. Comparison and arrangement of line segments is realized by a strip of paper, measurements and estimates, and are also used instruments for measuring length: ruler, meter, measuring tape. At a propaedeutic level, the pupils are acquainted with identical display - slide. They learn to name polygons: a triangle, quadrilateral and so on and identify their sides and vertices.

In the third year, students determine the length of line segment or dimensions of geometric shapes in decimetres and kilometres. Great attention is paid to the drawing basics: purity and precision of drawing, choice of suitable drawing equipment, hygiene and safety at drawing. In the area of plane figures, the square grid begins to be used: drawing a square and a rectangle in the square grid, marking the tops of square and rectangular by block capitals, zoom in and out of plane figures in a square grid. On propaedeutic level, pupils get to similar structures. In the three-dimensional structure, pupils become familiar with vertices, edges and sides of the cube. They form the building from cubes, the plan of building from cubes (plan structure with the indicated number of cubes standing on each other), rows and columns (for buildings from cubes).

In the fourth year, the students learn to convert the unit of length (mm, cm, dm, m, km), mixed unit of an example of 1 m 10 cm. In the area of plane figures, attention is paid to drawing triangle and polygon - vertices, side, diagonal, opposite and adjacent sides, number of sides and vertices, length of adjacent and opposite sides. Here students will meet with the first construction tasks: drawing any triangle, drawing triangle if the lengths of its sides, the sum and difference of the lengths of line segments are known. Next topics are multiple of side length, circumference of square, rectangle and triangle as the sum of the side length at the propaedeutic level.

In addition to these geometric figures, pupils acquired the basic knowledge about the circle, circular arc, and how they can be drawn by using compasses.

### 3 Interdisciplinary link between Mathematics and Art Education

Art education is a fundamental component of aesthetic education. At children, it develops art feeling through receptive and active components. Similarly, it also builds relationships to beauty. Art education at the primary level of education is a subject that develops through authentic experience gained by art activities pupil's personality in its entirety (ISCED 1). By means of various art techniques, the child can get familiar with valuables of folk fine art. Space is also devoted to the necessary curricular activities.

For inspiration of utilization of the Art motifs in mathematics, folk ornament with geometric ornamentation is suitable. This ornamented specimen is based on linear or circular form, usually arranged in the belt composition. The most common linear motif in folk ornaments include: a square divided by diagonal, wavy line, chessboard and spiral. Except for circle, also star, rose and rosette belong to circular motifs.

In Slovakia, the geometric ornamentation is most notably represented in textiles, carvings and ceramic decor. Lots of originally plant, zoomorphic and anthropomorphic ornaments were often gradually geometrized during the development of folk decorative expression (see also [6] and Figures 1-8).



Fig. 1. Example of folk embroidery with regular geometric ornament



Fig. 2. Example of folk embroidery with the ornament of plant motif



Fig. 3. Children painting created as a result of folk ornament inspiration



Fig. 4. Demonstration of children's art work realized by drawing a dry track  
- drawing with coloured pencils. The work was inspired by folk ornaments transformed into copyright ornament created from basic geometric shapes (circle, rectangle, square, and triangle). Individual shapes are freely composed to itself compositional whole limited by paper size.



Fig. 5. Demonstration of children's art work realized by drawing a dry track  
- drawing with coloured pencils. The work was inspired by folk ornaments transformed into copyright ornament created from basic geometric shapes (circle, rectangle, square, and triangle).



Fig. 6. Coloured composition created through the folk ornament interpretation

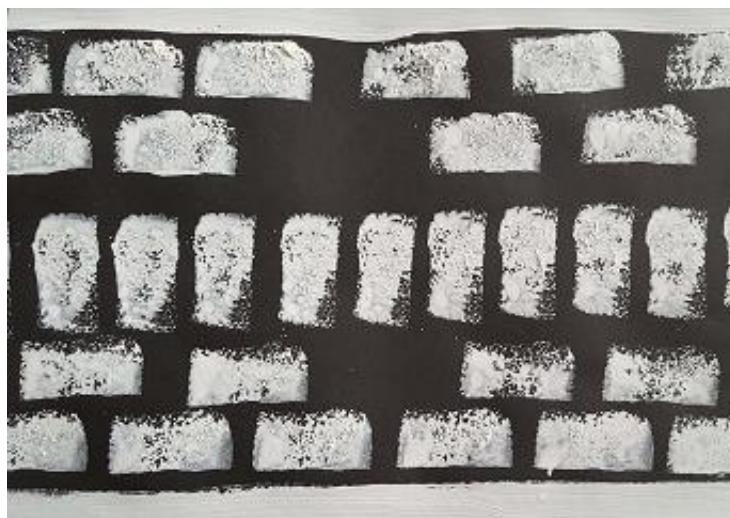


Fig. 7. Black and white composition created through the folk ornament interpretation.  
Repetition and regularity, creating rhythm and gradation



Fig. 8. Coloured composition created through the folk ornament interpretation.  
Inspiration in plant and zoomorphic motifs

#### 4 Case study with children on the use of folk ornament as an incentive for the identification of a figure

The above visual motifs of the ornament we have used for the implementation of pedagogical experiment with children in pre-primary and primary levels of education. The first pupil was Natanael aged eight years, he was active gifted student who knew the tasks of creative approaches. Firstly, he should identify and count on planar geometries for the next part of folk embroidery with regular geometric ornament.



Fig. 9. Folk ornament for identification of geometric figures

The ornament on this embroidery (Fig. 9) comprises features discussed in the first year of primary school which include circle, square, triangle, and rectangle. This made it possible to repeat the terms of the second year which include polygons: a triangle, quadrilateral and so on. Moreover, it was possible to identify their sides and vertices. Therefore, we set out that embroidery seemed suitable for the mentioned student of the 2nd year of primary school.

Nathanael knew to name of squares, triangles, rectangles, regardless of their position in the plane and was able to correctly identify the number of the parts of embroidery. We did not record any problems at solving this task and pupil was at the same time explained what folk ornament was, so that he could solve the following task. In this problem, the child was expected to repaint folk ornament according to this specimen (Fig. 10).



Fig. 10. Specimen for redrawing

Pupil correctly repainted that model in terms of colour, shape and number of geometric shapes (Fig. 11).

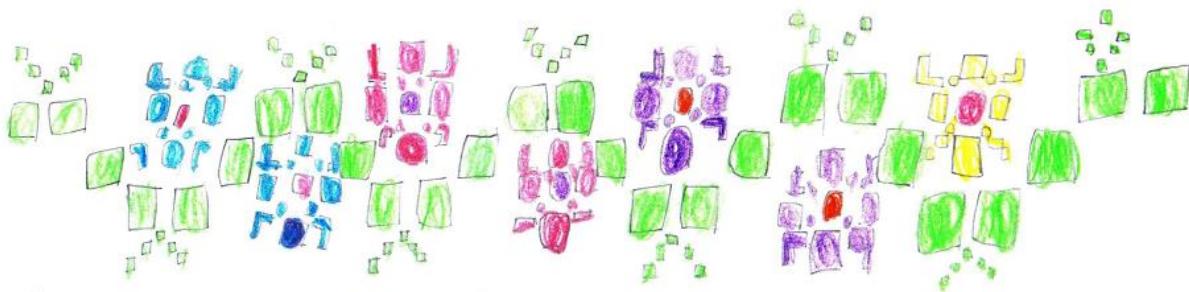


Fig. 11. Redrawing pattern by an 8-year-old Nathanael

According to the State education program in the first year of primary school the propaedeutic level, pupil acquaints himself with the consistent displaying - axial symmetry. Therefore, in another experiment, the student is expected to create ornament imagine in axial symmetry which was specified (Fig. 12). This task was not a problem for this pupil.

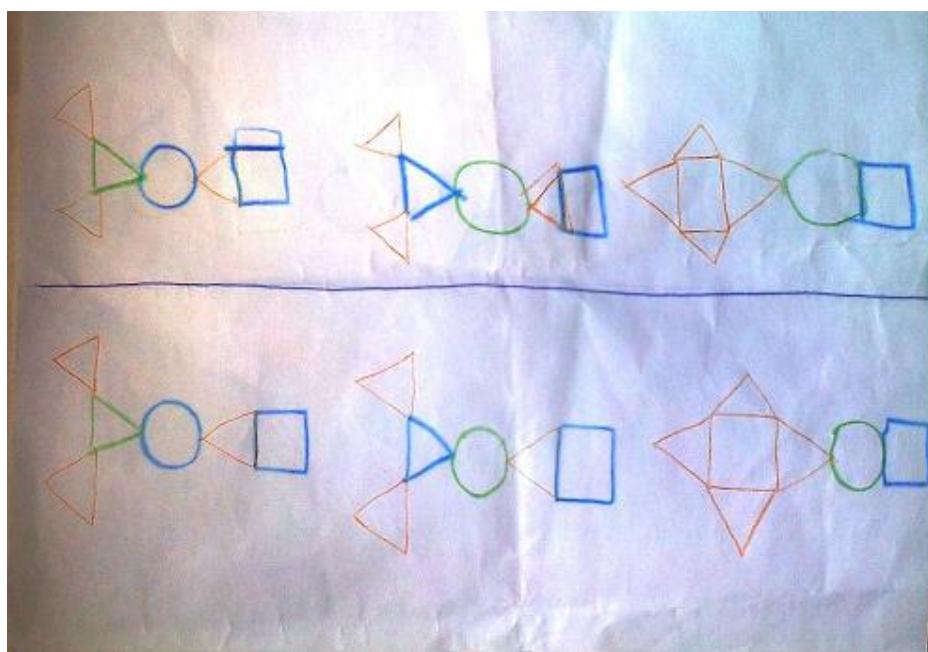


Fig. 12. Top ornament – the work of a 8-year-old Nathanael, bottom ornament – by this pattern.

In the last task a pupil himself should create his own folk ornament. Pupils utilized the classic children's drawings of the ship at sea (Fig. 13).

In the second case study, individual assignments were worked out by a 5-year-old Simon. Once again we worked with geometric motifs of folk ornament, which was applied in the implementation of pedagogical experiment. The child knew correctly to name squares, triangles, rectangles, regardless of their position in the plane and was able to correctly identify the number of the selected part of the embroidery. He knew to express his own opinion on depicted compositions and a way of repetition of individual parts of axial symmetry. Simon determined correctly colours used at textile embroidery.



Fig. 13. Natanael own ornament, an 8-year-old pupil

Simon is a child of a harmonious family, which is closely related to folklore, folk culture and art. Child acquires knowledge mainly by older siblings aged 13 and 14 years old. Older brother, who is 13 years old, attends School of Arts, Department of dance. Simon is therefore constantly in touch with various folk costumes and textile components, which explains the fact that the child has a clear vision and lots of information on the folk costume, ornaments and embroideries alone.

After determining the geometric shapes, the learning process followed by verification of information on basic geometric shapes in visual form. Simon drew individual geometric forms of task (triangle, square, circle, and rectangle) by basic drawing technique. We have verified the fact whether the individual figures were located on embroidery, which was no longer in front of the child. This task was perfectly mastered (Fig. 14).

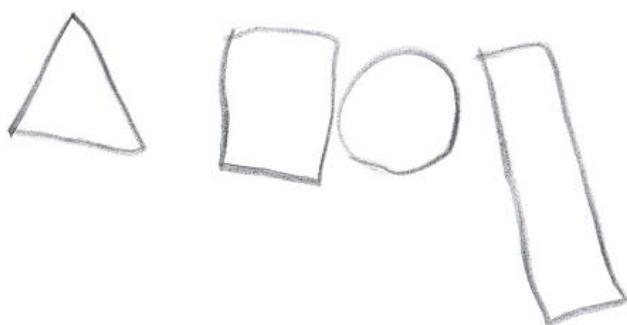


Fig. 14. Drawings formations by Simon, a 5-year-old child, who drew them after being instructed to do so

In the second assignment, Simon drew different parts of geometrical ornament as he memorized them from looking at them. But the child did not know in advance that he was to take special notice or to remember the individual details as well as the whole. In the drawing, two accurate records appeared copying the real composition. Child so demonstrated excellent memory for various geometric shapes on their own, or in a composition (Fig. 15).

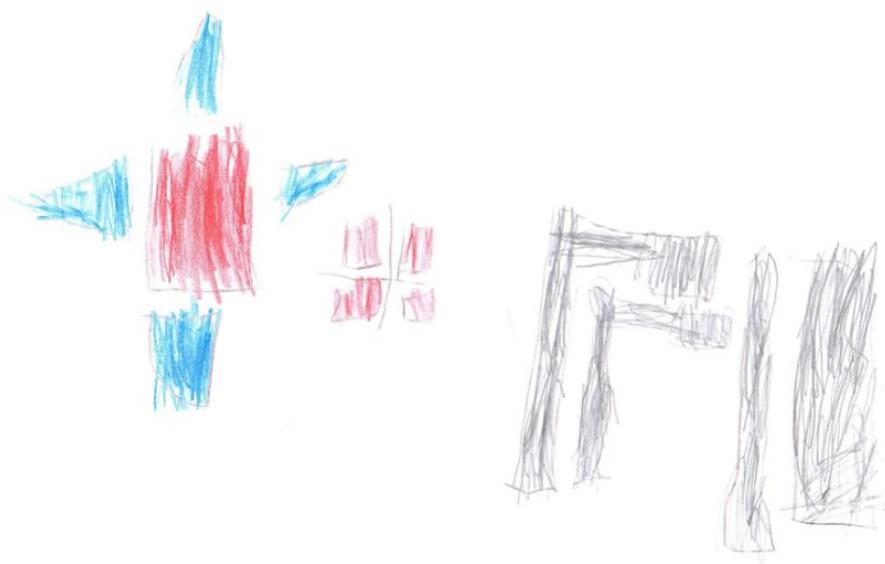


Fig. 15. Drawing of the ornament by 5-year-old Simon, as he remembered from embroidery

In a third assignment, the child worked out its own composition. The kid was able to create a balanced composition with the bright colour and shape of construction. Circle was spontaneously placed in the central portion of the sheet of A4 (Fig. 16).



Fig. 16. Its own composition by 5-year-old Simon

## 5 Conclusion

For today's society it is extremely important that relationships to national consciousness and identity was already built in pre-primary and primary level of education within the educational process at schools. A child needs to know in detail the culture of his people in order to subsequently strengthen his national identity (see [14]). Possibilities that support this fact are together with the development of mathematical and geometrical ideas extremely

useful and also encouraging. One of the possibilities of creative and experience form is precisely the implementation of elements of mathematics and geometry in the interdisciplinary relationship with material culture in the educational process that develops these interdisciplinary planes necessary for the versatile development of children.

Ornament has been proved as an intensive tool for teaching planar geometric figures at primary as well as at pre-primary level. It provides the possibility of development of mathematical thinking and artistic creativity at children of pre-school and early school age. The stated activities contribute to the development of mathematical concepts, while providing the possibility of using different models for the establishment of basic geometric figures in the plane. Furthermore, these activities will support at children the formation of cognitive structures consisting of knowledge that either child or pupil understands and can explain how they are joined together. The stated activities were implemented as motivational hints due to the content of the existing State education program, and therefore they are considered appropriate in the normal teaching course at primary schools.

**Acknowledgements:** The authors gratefully acknowledge the Scientific Grant Agency of the Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic for supporting this work under the Grant No. VEGA 1/0440/15 “Geometric conceptions and misconceptions of pre-school and school age children”.

## References

- [1] BIARINCOVÁ, P. *Tradičná ľudová kultúra na sekundárnom stupni vzdelávania. Tvorivost'-umenie-remeslo-dizajn.* Ružomberok: Verbum, 2014. ISBN 978-80-561-0119-3.
- [2] BLAŽKOVÁ, R., SYTAŘOVÁ, I. Výchova k hodnotám ve výuce matematiky. In ŠIMONIK, O., HORKÁ, H., STŘELEC, S. (ed.). 2007. *Hodnoty a výchova.* Sborník referátů z vědecké konference. Brno: Pedagogická fakulta MU v Brně, Katedra pedagogiky, 2007, ISBN 978-80-86633-78-7.
- [3] BOŠELOVÁ, M. *Rozvíjanie etnopedagogických tém na PF KU v Ružomberku v oblasti výtvarného umenia. Aktuálne hodnoty ľudovej kultúry a umenia vo vzdelávaní.* Ružomberok: Verbum, 2010. ISBN 978-80-8084-603-9.
- [4] ČELLÁROVÁ, L. Postavenie regionálnej výchovy v edukačnom procese. In *Regionálna výchova a škola.* Banská Bystrica: Pedagogická fakulta UMB, 2002. s. 12-19. ISBN 80-8055-753-5.
- [5] CSACHOVÁ, L. Rovinná Voronojova teselácia. In *Obzory matematiky, fyziky a informatiky,* Nitra: PROTONIT, 2014, Nr. 4, s. 1-8. ISSN 1335-4981.
- [6] DANGLOVÁ, O. Geometrická ornamentika. In: Botík, J. *Encyklopédia ľudovej kultúry Slovenska.* Bratislava: VEDA, 1995. ISBN 80-224-0234-6.
- [7] CHANASOVÁ, Z. *Vybrané kapitoly z literatúry pre deti so zameraním na výchovu k cnotiam.* Ružomberok: Verbum, 2014. ISBN 978-80-561-0158-2.
- [8] *Inovovaný štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie ISCED1.* In [http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika\\_pv\\_2014.pdf](http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf)
- [9] KOŽUCHOVÁ, M. *Obsahová dimenzia technickej výchovy so zameraním na predškolskú a elementárnu edukáciu.* Bratislava: Univerzita Komenského, 2003. ISBN 80-223-1747-0.

- [10] SABOVÁ, J. *Ludová ornamentika ako zdroj inšpirácie pre výtvarnú tvorbu a aktivity vo výtvarnej výchove na prvom stupni ZŠ*. [Diplomová práca]. Katolícka univerzita v Ružomberku. Pedagogická fakulta KU, Ružomberok, 2015.
- [11] Štátny vzdelávací program Matematika príloha ISCED1. In: [www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/statny-vzdelavaci-program/matematika\\_isced1.pdf](http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/statny-vzdelavaci-program/matematika_isced1.pdf)
- [12] UHRINOVÁ, M. *Kulturelle Aspekte der regionalen Erziehung in den Dimensionen der Primarstufe*. Wien: Internationale Stiftung, Schulung, Kunst, 2015. ISBN 978-3-9504061-8-4.
- [13] VARGOVÁ, M. *Multikultúrna výchova a jej aplikácie v predprimárnom vzdelávaní*.: Ružomberok: Verbum, 2012. ISBN 978-80-8084-916-0.
- [14] VARGOVÁ, M. *Tvorivosť rómskych žiakov v primárnom vzdelávaní*. Ružomberok: Verbum, 2010. ISBN 978-80-8084-635-0.
- [15] ZENTKO, J., UHRINOVÁ, M. *Učiteľ a európske hodnoty*. Ružomberok: Verbum, 2012. ISBN 978-80-8084-944-3.
- [16] ZENTKO, J. UHRINOVÁ, M. *Regional Studies within the context of education*. Milano: EDUCatt, 2014. ISBN 978-88-6780-082-7.

---

**Doc. PaedDr. Ján Gunčaga, PhD.**

Pedagogická fakulta  
Katolícka univerzita v Ružomberku  
Hrabovecká 1, 034 01 Ružomberok, SR  
e-mail: jan.guncaga@ku.sk

**PaedDr. Jozef Zentko, PhD.**

Pedagogická fakulta  
Katolícka univerzita v Ružomberku  
Hrabovecká 1, 034 01 Ružomberok, SR  
e-mail: jozef.zentko@ku.sk

# Discretization of the Laplace-Beltrami Operator Using Numerical Differentiation

Samuel Struss, Pavel Chalmovianský

## Abstract

We propose a method for discretization of Laplace-Beltrami operator using numerical differentiation. This approach requires specific mesh shape, but in some cases, it offers more accurate results than more general methods. We also discuss generalizations and limitations of our method and test it on selected functions.

**Key words:** Laplace-Beltrami operator, discretization, regular surface

## Abstrakt

V texte ponúkame metódu diskretizácie Laplaceovho-Beltramiho operátora s využitím numerickej derivácie. Tento prístup funguje iba na pletivách špecifického tvaru, no v niektorých prípadoch dáva presnejšie výsledky než všeobecnejšie metódy. Rozoberáme aj obmedzenia našej diskretizácie, uvádzame možnosti jej zovšeobecnenia a testujeme ju na vybraných funkciách.

**Kľúčové slová:** Laplaceov-Beltramiho operátor, diskretizácia, regulárne plochy

## 1 Introduction

There are many ways to discretize the Laplace-Beltrami operator on regular surfaces. The most common method is the cotangent formula [6]. In [8], the author proposes two methods using quadratic fitting and Gauss theorem. More methods of approximation can be found in [1] and [4]. Other valuable sources concerning the discrete Laplacian are in the papers describing its properties ([3], [2]) and applications ([7], [5]).

We propose our own method, based on numerical differentiation and uniform sampling of the parameterized rectangular surface  $S$ . This restricts our algorithm to only certain special situations, but offers a simpler and, in some cases, more accurate procedure for such computations. We start by approximating the tangent plane and metric at a point and then, we approximate the following formula for Laplace-Beltrami operator in local coordinates of a regular surface

$$\Delta_B f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \frac{1}{\sqrt{\det(G)}} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_j} \left( g^{jk} \sqrt{\det(G)} \frac{\partial f}{\partial u_k} \right). \quad (1)$$

In formula (1), we work with a differentiable function  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , restricted to the surface  $S$  by local parametrization  $f \circ \mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{x}(u_1, u_2))$ . Later we show, that except for special cases, our method converges point-wise. We finish this paper by experiments concerning error measurement, discuss the limitations of this algorithm and offer some suggestions for generalizations in the future.

## 2 Approximation of the tangent plane, metric and the explicit formula in local coordinates

Let  $\mathbf{x}(u_1, u_2)$  be a parameterization of the regular surface  $S$ , with rectangular domain  $[0, l_1] \times [0, l_2]$ . We start with domain sampled in each coordinate with densities  $h_1 > 0$  and  $h_2 > 0$ , where  $l_1 = k_1 h_1$  and  $l_2 = k_2 h_2$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ . Hence, the point  $p(i, j)$  has coordinates  $p(i, j) = \mathbf{x}(ih_1, jh_2)$ . If we define a differentiable function  $\hat{f}: S \rightarrow \mathbb{R}$ , we can write  $f(i, j) = \hat{f}(ih_1, jh_2)$ . Then, we call  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , where  $I \subset N \times N$  is the maximum subset such that  $(ih_1, jh_2) \in [0, l_1] \times [0, l_2]$ , the discrete parameterization of the surface  $S$ .

We apply the formula for numerical differentiation in each variable to obtain approximation of the first partial derivatives. We denote it as

$$f_1^d(i, j) = \frac{1}{2h_1}[f(i+1, j) - f(i-1, j)], \quad (2a)$$

$$f_2^d(i, j) = \frac{1}{2h_2}[f(i, j+1) - f(i, j-1)]. \quad (2b)$$

The principle used in (2a),(2b) for scalar functions can be applied for vector fields and local parameterizations, when used in each coordinate

$$p_1(i, j) = \frac{1}{2h_1}[p(i+1, j) - p(i-1, j)], \quad (3a)$$

$$p_2(i, j) = \frac{1}{2h_2}[p(i, j+1) - p(i, j-1)]. \quad (3b)$$

Since  $p_k(i, j)$  converges in each coordinate to the vector  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k}(ih_1, jh_2)$ , for  $h_k \rightarrow 0$ , we can say that unless,  $p_1(i, j)$  and  $p_2(i, j)$  are linearly dependent in the ambient space  $\mathbb{R}^3$ , the point  $p(i, j)$  and the vectors  $p_1(i, j)$ ,  $p_2(i, j)$  define approximation of the tangent plane to  $S$  at  $p(i, j)$ .

**Definition 2.1.** Given discrete parameterization  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  of the surface  $S$ , we define at a point  $p(i, j)$  the approximated metric  $G(i, j)$  as

$$G(i, j) = \begin{pmatrix} g_{11}(i, j) & g_{12}(i, j) \\ g_{12}(i, j) & g_{22}(i, j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle p_1(i, j), p_1(i, j) \rangle & \langle p_1(i, j), p_2(i, j) \rangle \\ \langle p_1(i, j), p_2(i, j) \rangle & \langle p_2(i, j), p_2(i, j) \rangle \end{pmatrix}, \quad (4)$$

under the condition, that  $p_1(i, j) \wedge p_2(i, j) \neq 0$ , where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the standard Euclidean dot product of the ambient space  $\mathbb{R}^3$  and  $\wedge$  is the cross product.

**Definition 2.2.** We define the approximated volume form  $\text{Vol}(i, j)$  as

$$\text{Vol}(i, j) = \sqrt{\det G(i, j)}. \quad (5)$$

Using the formula for inverse matrix, we can rewrite the coefficients of  $G^{-1}$  in (1) as

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\det G}, \quad (6a)$$

$$g^{12} = -\frac{g_{12}}{\det G}, \quad (6b)$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{\det G}. \quad (6c)$$

This change in formula (1) allows us to directly compute inverse matrix before we discretize it. We rewrite (1) using (6a)-(6c) and substitute the exact values by approximated ones, using (2)-(5) to obtain our formula for discrete Laplace-Beltrami operator.

**Definition 2.3.** Let  $p(i, j)$  be a point of discrete parametrization  $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  of a regular surface  $S$ . Let the following condition  $p_1(i, j) \wedge p_2(i, j) \neq 0$  hold for all  $(i, j) \in I$ . We define the following quantities

$$L_{11} = \frac{1}{4h_1^2} \left( \frac{g_{22}(i+1, j)f_1(i+1, j)}{\text{Vol}(i+1, j)} - \frac{g_{22}(i-1, j)f_1(i-1, j)}{\text{Vol}(i-1, j)} \right), \quad (7a)$$

$$L_{12} = -\frac{1}{4h_1 h_2} \left( \frac{g_{12}(i+1, j)f_2(i+1, j)}{\text{Vol}(i+1, j)} - \frac{g_{12}(i-1, j)f_2(i-1, j)}{\text{Vol}(i-1, j)} \right), \quad (7b)$$

$$L_{21} = -\frac{1}{4h_1 h_2} \left( \frac{g_{12}(i, j+1)f_1(i, j+1)}{\text{Vol}(i, j+1)} - \frac{g_{12}(i, j-1)f_1(i, j-1)}{\text{Vol}(i, j-1)} \right), \quad (7c)$$

$$L_{22} = \frac{1}{4h_2^2} \left( \frac{g_{11}(i, j+1)f_2(i, j+1)}{\text{Vol}(i, j+1)} - \frac{g_{11}(i, j-1)f_2(i, j-1)}{\text{Vol}(i, j-1)} \right). \quad (7d)$$

Using our method of approximation, the discrete Laplace-Beltrami operator of a function  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  in point  $p(i, j)$  is denoted  $\Delta_B^{d,h} f(i, j)$  and its value is given as

$$\Delta_B^{d,h_1,h_2} f(i, j) = \frac{L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}}{\text{Vol}(i, j)}. \quad (8)$$

### 3 Convergence and examples

Let us denote  $p^* = p(i, j)$  and  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(ih_1, jh_2)$  for some arbitrary  $(i, j) \in I$ . Using (3a) and (3b), we have that vectors  $p_k^* \rightarrow \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial u_k}$  in each coordinate, for  $h_k \rightarrow 0, k = \{1, 2\}$ . We know, that the standard dot product is a continuous function in three-dimensional vector space. Hence, if the two vectors converge in each coordinate,  $p_k^* \rightarrow \mathbf{x}_k^*$  and  $p_l^* \rightarrow \mathbf{x}_l^*$ , the following holds for  $l, k \in \{1, 2\}$

$$\lim_{h_l, h_k \rightarrow 0} \langle p_l^*, p_k^* \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial u_l}, \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial u_k} \right\rangle. \quad (9)$$

We also directly obtain the result

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} G(i, j) = G_{\mathbf{x}^*}, \quad (10)$$

where  $G_{\mathbf{x}^*}$  is the Riemannian metric of  $S$  at  $\mathbf{x}^*$ .

The possibility of  $p_1(i, j)$  and  $p_2(i, j)$  being linearly dependent for some  $h_1, h_2$ , is the only obstacle standing in the way of the point-wise convergence of  $\Delta_B^{d,h} f(i, j)$  from (8) to the continuous/differentiable version  $\Delta_B f(i, j)$  in (1). Even though, this case was dismissed in definition 2.3 and our method converges point-wise to the continuous case of Laplace-Beltrami operator, let us take a closer look at the situation of linear dependence.

Using regularity, we have, that  $p(i+k, j) \neq p(i, j+l)$  for  $k, l \neq 0, k, l \in \mathbb{Z}$ . Other case, in which the linear dependence can occur, is the surface having an extremely small angle of the coordinate curves at  $p(i, j)$ , causing problems for the computer arithmetic. Another problematic situation is depicted in figure 1. In this case of regular surface, the isoparametric curves meet only at one point. But still the linear dependence of the approximated tangent vectors  $p_1(i, j)$  and  $p_2(i, j)$  occurs.

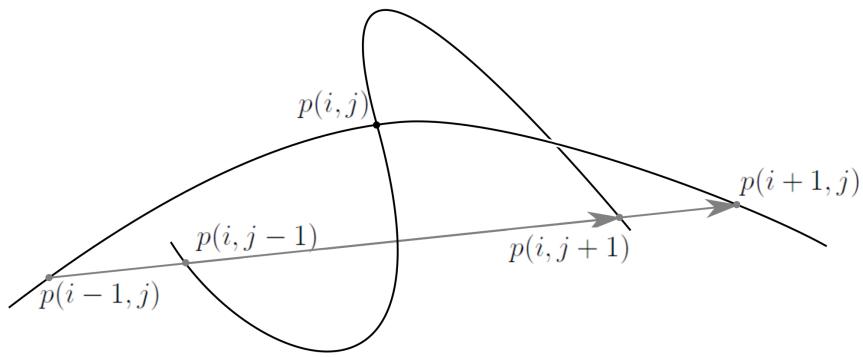


Fig. 1. Two isoparametric curves on a regular surface sharing a common point. Because of the shape of the curves, the approximated tangents at the common point are linearly dependent.

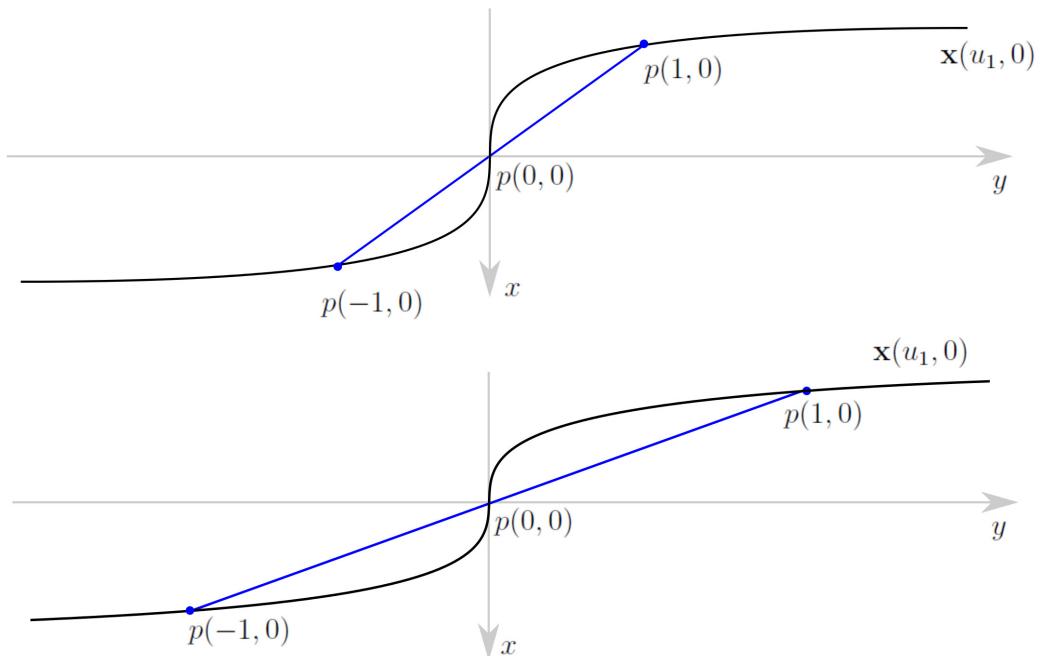


Fig. 2. The curve  $\mathbf{x}(u_1, 0)$  with two different values of parameter  $a$ , where in the lower (second) graph, the value of  $a$  is twice the value of  $a$  in the higher (first) graph

**Example 3.1.** The first example is the surface with parametrization  $\mathbf{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x}(u_1, u_2) = (u_1, au_1^3, u_2)$ . It is sufficient to study the behavior of the discretization in the plane  $z = 0$ . At the point  $\mathbf{x}(0, 0)$ , the curve  $\mathbf{x}(u_1, 0)$  has an inflection point, and as the value  $|a|$  rises, the convergence of  $p_1(0, 0)$  gets slower. The graph of curve  $\mathbf{x}(u_1, 0)$  with approximations of  $p_1(0, 0)$  is demonstrated in figure 2. The tangent line to the curve at point  $\mathbf{x}(0, 0)$  coincides with the  $x$ -axis. We can see, that our approximated tangent line is inaccurate and the error rises with the increase of value of  $|a|$ .

If there exists a limited number of such problematic points, we do not need to resample the whole domain. It is sufficient to chose properly smaller parameters  $h_1$  and  $h_2$  in the neighbour-

hood of these points. An example of such resampling with half the directional step sizes is in figure 3. This approach leaves the global sampling intact, while the accuracy of approximation improves locally. The value of normal curvature in isoparametric directions is a good criterion for finding such points.

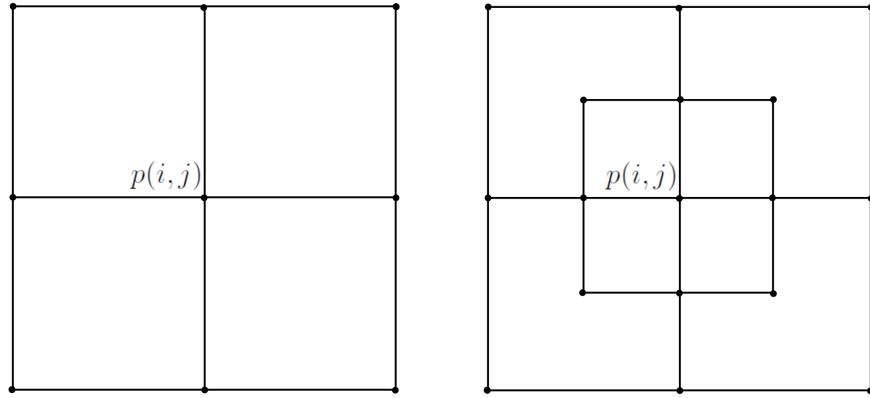


Fig. 3. Local resampling of the neighbourhood of point  $p(i,j)$  with half the directional step sizes  $h_1$  and  $h_2$

**Example 3.2.** Consider a unit sphere. Here, the symmetry of the surface allows our method to approximate the tangent plane exactly for the points on curve  $\mathbf{x}(\pi/2, u_2)$  when using the standard parameterization. The reasoning behind this fact is demonstrated, in one of the coordinates, in figure 4. We have chosen indexes, so that  $i = 0$  corresponds to  $u_1 = \pi/2$ .

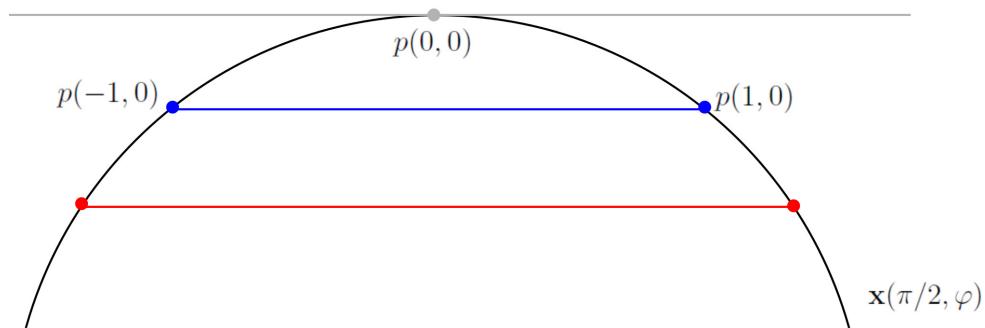


Fig. 4. The isoparametric curve  $\mathbf{x}(\pi/2, u_2)$  on a sphere, where the approximated tangent lines are parallel to the real tangent line at the point  $p(0, 0)$

**Example 3.3.** The third and last example is the case of plane  $\mathbf{x}(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$  with uniform sampling for  $h_1 = h_2 = h$ . In this case, our method gives approximated metric

$$G(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

for all  $(i, j) \in I$ . This leads to the simplified formula

$$\Delta_B^{d,h} f(i, j) = \frac{f(i+2, j) + f(i-2, j) + f(i, j+2) + f(i, j-2) - 4f(i, j)}{4h^2}, \quad (11)$$

which is the value of standard discrete Laplace operator in plane  $\Delta^{d,2h} f(i, j)$  with the parameter  $2h$ . This makes sense, since we used same techniques as in deriving the commonly used planar formula, but we also approximated the geometry of the surface.

## 4 Experiments and error measurement

In this section, we evaluate the error of two methods for calculating the Laplace-Beltrami operator for the case of five functions on two surfaces. These surfaces and the parameterized functions were already used to test discrete Laplace-Beltrami operators in (1). In tests, we use our method (8) and the cotangent method from [6]. To express the total error and the average error of these methods we define two functional norms.

**Definition 4.1.** Let  $P$  be a finite set and let  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  be a function on the set  $P$ . Then, we define  $l_2$  norm of a function  $f$  on a set  $P$  as

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{p \in P} f(p)^2}. \quad (12)$$

We also define the  $l_{2,a}$  norm of a function  $f$  on a set  $P$  as

$$\|f\|_{2,a} = \frac{\|f\|_2}{|P|}, \quad (13)$$

where  $|P|$  is the cardinality of the set  $P$ .

In the notion of  $l_{2,a}$  norm the  $a$  stands for average, since it computes the average error per point. The first experiment is the case of a plane and the function  $f(x, y, z) = x$ . The values in the following tables express specifically  $\|Lf - \Delta_B f\|_2$  and  $\|Lf - \Delta_B f\|_{2,a}$ , where  $Lf$  is the used method applied on the function  $f$  and  $\Delta_B f$  is the exact value of Laplace-Beltrami operator of  $f$ . We tested the functions in plane on domain  $D = [0, h\sqrt{|P|}] \times [0, h\sqrt{|P|}]$ . With the given parameter  $h$ , we sampled the domain  $D$  uniformly by  $|P|$  values. Both parameters are mentioned in the following tables.

In the following table 'Cotangent' denotes the cotangent method and 'Num.Dif.' denotes our method using numerical differentiation. In all these experiments, the cotangent method requires a triangulation. We acquire this by adding edge, that joins  $p(i, j)$  and  $p(i+1, j+1)$  diagonally in each quadrilateral  $\{p(i, j), p(i+1, j), p(i, j+1), p(i+1, j+1)\}$ . This can be done differently. For example by adding an edge, that joins  $p(i, j)$  and  $p(i-1, j+1)$ . Both triangulations are depicted in figure 5. In our experiments, we tried few different triangulations, which led to the same results. But this does not mean, that the results are independent from the choice of triangulation. Therefore it is important to consider this factor in future tests.

As we can see in table 1, the cotangent method's convergence is linear, while our method provides in this specific case the exact value, except for minimal rounding errors (approximately

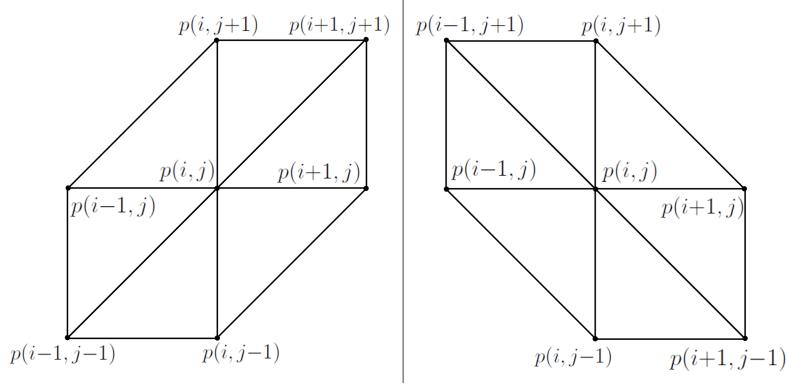


Fig. 5. Two examples of triangulations used in experiments

$l_2$	$h = 0.08,  P  = 256$	$h = 0.04,  P  = 1024$	$h = 0.01,  P  = 16384$
Num.Diff.	0	0	0
Cotangent	33.78240000	65.89439999	257.97420000
$l_{2,a}$	$h = 0.08,  P  = 256$	$h = 0.04,  P  = 1024$	$h = 0.01,  P  = 16384$
Num.Diff.	0	0	0
Cotangent	0.1319625	0.06435000	0.01574550

Table 1. The measurement of error in  $l_2$  norm and  $l_{2,a}$  norm for the case of a plane and the function  $f(x, y, z) = x$ 

$10^{-14}$ ). The next example is the function  $f(x, y, z) = e^{x+y}$ , where the convergence is slow or problematic for most methods of discrete Laplacians.

For function  $f(x, y, z) = e^{x+y}$  both operators converge slowly and they give approximately same results. We can observe in table 2, that the error is a linear function of parameter  $h$ , since halving parameter  $h$  provides half the error.

We continue our experiments with the case of a sphere with radius  $r = 1$  and the function  $f(x, y, z) = x$ . In this case, the parameters  $h_1$  and  $h_2$  are determined by the number of points on the sphere we evaluate. In the first coordinate, we uniformly sample 20 values in interval  $[0, \pi]$  and omit the case of  $i = \{0, 1, 18, 19\}$  to avoid singularities of given parameterization of the sphere. In the second coordinate, we uniformly sample 16 values in the interval  $[0, 2\pi]$  and consider all values. Combining them provides us with 256 values, which is the value  $|P|$ . Then, we test the operator using twice the amount of values in each direction, thus  $|P| = 1024$ .

The results in table 3 are more than optimistic for our discretization, since it provides relatively accurate results using just the 256 points and its error is at least one hundred times lower than the cotangent method. In the next experiment, we consider the same sphere, different function,  $f(x, y, z) = x^2$ .

These results in table 4 are less optimistic, but still provide significant improvement upon cotangent method. This may be the consequence of the symmetry of the sphere, which was discussed concerning our method in the second example in chapter 3. The last example is the function  $f(x, y, z) = e^x$  on the unit sphere. This example is known to cause problems with convergence,

$l_2$	$h = 0.08,  P  = 256$	$h = 0.04,  P  = 1024$	$h = 0.01,  P  = 16384$
Num.Diff.	80.67919442	155.74513746	603.65791059
Cotangent	82.07483787	156.41188582	603.81891978
$l_{2,a}$	$h = 0.08,  P  = 256$	$h = 0.04,  P  = 1024$	$h = 0.01,  P  = 16384$
Num.Diff.	0.31515310	0.15209486	0.03684435
Cotangent	0.32060483	0.15274598	0.03685418

Table 2. The measurement of error in  $l_2$  norm and  $l_2^m$  norm for the case of a plane and the function  $f(x, y, z) = e^{x+y}$

$l_2$	$ P  = 256$	$ P  = 1024$
Num.Diff.	0.16728391	0.10908152
Cotangent	16.92199532	34.91979991
$l_{2,a}$	$ P  = 256$	$ P  = 1024$
Num.Diff.	0.00065345	0.00010652
Cotangent	0.06610154	0.03410136

Table 3. The measurement of error in  $l_2$  norm and  $l_{2,a}$  norm for the case of a sphere and the function  $f(x, y, z) = x$

particularly in the case of cotangent method [6].

As was mentioned above, the cotangent method does not converge in this case. Unfortunately the problem occurs also with our method, as can be seen in table 5. All these tests we have computed using the Maxima Algebra System, version 15.0.8.1.

## 5 Generalizations and limitations

We start with the limitations. Other methods, we mentioned in the beginning of this chapter, are defined to work with triangulated meshes and functions defined on such meshes. Hence, these methods work on general polygonal meshes when triangulated. Our method is limited to the case of uniformed sampling of a regular surface, or a case of quadrilateral mesh, where indexed coordinates of vertices can be established.

The second limitation is, that our method requires defined values of the function and coordinates of vertices in the neighbourhood of a point. This does not allow us to compute the points in sampling directly neighbouring the singular points (e.g. poles on sphere) or boundary points of a surface. The second case of boundary points is going to be solved in future work, using extrapolation of the geometry of the surface and values of the function or by other different methods.

We propose also two generalizations. Firstly, since the formula (1), which we approximated, can be defined for Riemannian manifold of arbitrary finite dimension  $n$ , we can generalize the formula (8) for such a manifold. The only new difficulty would be the necessity of computing  $G^{-1}(i, j)$ . Secondly, our method relies on using the standard dot product of arbitrary space, but does not require, that the arbitrary space has a specific dimension. So our formula works also

$l_2$	$ P  = 256$	$ P  = 1024$
Num.Diff.	3.32006914	1.70644656
Cotangent	26.38624480	55.12312428
$l_{2,a}$	$ P  = 256$	$ P  = 1024$
Num.Diff.	0.01296902	0.00166645
Cotangent	0.10307127	0.05383118

Table 4. The measurement of error in  $l_2$  norm and  $l_{2,a}$  norm for the case of a sphere and the function  $f(x, y, z) = x^2$

$l_2$	$ P  = 256$	$ P  = 1024$
Num.Diff.	37.13938326	206.18221737
Cotangent	42.05225957	214.48470357
$l_{2,a}$	$ P  = 256$	$ P  = 1024$
Num.Diff.	0.14507572	0.20134982
Cotangent	0.16426664	0.20945772

Table 5. The measurement of error in  $l_2$  norm and  $l_{2,a}$  norm for the case of a sphere and the function  $f(x, y, z) = e^x$

for any real Euclidean space, in which the manifold is embedded in.

## 6 Conclusion and future work

The Laplace operator can take many shapes and forms, depending on the geometry of its domain and context, in which it is used. In this paper we proposed our own method of its discretization for regular surfaces. We limited ourselves to the case of uniformly sampled regular surfaces, which allowed us to use numerical differentiation for approximation of the function's values and the geometry of the surface.

Our method is less general in input, than the other methods. However, it has potential to be more accurate, especially for symmetric surfaces, such as the sphere or the torus. Further testing may be necessary. For example, function  $f(x, y, z) = x^p$  on the sphere as  $p \rightarrow \infty$ . Torus is also a viable testing subject, since many exact results are known. In conclusion, our method may provide better results than the more general methods for many parametric regular surfaces.

There is also room for generalizations, where the most important problem left to be solved, is the case of the points on the boundary of a surface. Although, our method is not suitable for mesh processing, we hope, that it could be used for numerical computations in calculus on manifolds or other applications in the future.

## References

- [1] BELKIN, M., SUN, J., WANG, Y. Discrete Laplace operator on meshed surfaces. In *Proceedings of the twenty-fourth annual symposium on Computational geometry*, 2008,

- ISBN 978-1-60558-071-5, pp. 278–287.
- [2] BOBENKO, A., SURIS, Y. *Discrete differential geometry*. American Mathematical Society, 2008, ISBN 978-0821847008, 404 pp.
- [3] GUO, R. Extremum problems for eigenvalues of discrete Laplace operators. In *Computer Aided Geometric Design*, Volume 30, Nr. 5, 2013: pp. 451–461, ISSN 0167-8396.
- [4] HILDEBRANDT, K., POLTHIER, K. On approximation of the Laplace-Beltrami operator and the Willmore energy of surfaces. In *Computer Graphics Forum*, Volume 30, Nr. 5, 2011: pp. 1513–1520, ISSN 0167-7055.
- [5] NEALEN, A., et al. Laplacian mesh optimization. In *Proceedings of the 4th international conference on Computer graphics and interactive techniques in Australasia and Southeast Asia*, 2006, ISBN 1-59593-564-9, pp. 381–389.
- [6] PINKALL, U., POLTHIER, K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. In *Experimental Mathematics*, Volume 2, Nr. 1, 1993: pp. 15–36, ISSN 1058-6458.
- [7] SORKINE, O., et al. Laplacian surface editing. In *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, 2004, ISBN 3-905673-13-4, pp. 175–184.
- [8] XU, G. Convergent discrete Laplace-Beltrami operators over triangular surfaces. In *Geometric Modeling and Processing*, 2004, ISBN 0-7695-2078-2, pp. 195–204.

---

**Mgr. Samuel Struss**

Faculty of Mathematics, Physics and Informatics  
Comenius University  
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, SR  
e-mail: Samuel.Struss@fmph.uniba.sk

**doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.**

Faculty of Mathematics, Physics and Informatics  
Comenius University  
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, SR  
e-mail: Pavel.Chalmoviansky@fmph.uniba.sk

# Geometrické charakteristiky objektov pre aplikácie v geografii, kartografii a staviteľstve

Margita Vajsálová

## Abstrakt

Geometrické charakteristiky objektov sme kvantifikovali v rovine, na referenčných plochách Zeme a pre telesá v 3D. Vzťahy pre vyjadrenie tvaru objektu pomocou indexu kompaktnosti (indexu tvaru) sme v tomto článku formulovali tak, aby ich hodnoty boli v intervale  $(0, 1)$ , a tiež aby pre pravidelné objekty bola jeho hodnota nezávislá od veľkosti objektu. Takéto formulácie dávajú lepší prehľad hodnôt charakterizujúcich tvar s využitím v rôznych oblastiach, a to nielen v matematickej kartografii (pri výbere zobrazenia Slovenska), v geografických analýzach a v oblasti energetickej hospodárnosti budov, ktoré sme uviedli v tomto článku.

**Kľúčové slová:** Referenčná plocha, index kompaktnosti, index tvaru

## Abstract

Geometric characteristics of the objects are quantified in this paper on the plane, on the reference surfaces and for solid figures in 3D. Equations for expression of the compactness index (shape factor) have been formulated on the assumption that their values are in the interval  $(0, 1)$ , and furthermore, its value is also independent on the size of the regular object. These formulations give more effective characterizations of the shape in different fields, not only in the mathematical cartography (in the choice of cartographic projection of Slovakia territory), in the geographic analyses and in the energy performance of buildings, which we have mentioned in this paper.

**Key words:** Reference surface, compactness index, shape index

## 1 Úvod

Veľkosť objektu a jeho tvar sú používané ako jeho základné geometrické charakteristiky v rôznych oblastiach, ako geografia, kartografia, stavebnictvo, ale aj geológia, kryštalografia. Geometrické vlastnosti územia v rovine (poloha, veľkosť a tvar) sú používané v geografických analýzach pre účely sledovania prvkov krajiny, environmentálnych javov v krajinе, krajinej pokrývky, štátoprávneho usporiadania určitých oblastí a pod. V matematickej kartografii sú geometrické charakteristiky územia na referenčnej ploche Zeme základným faktorom pri výbere a optimalizácii kartografického zobrazenia. V oblasti geografických informačných systémov sú vykonávané rôzne analýzy nielen modelov zemského povrchu, ale aj zloženia jeho podložia, ktoré z geometrického hľadiska považujeme za 3D objekty (telesá). Vyjadrenie veľkosti a tvaru budovy ako 3D objektu je dôležitou súčasťou analýzy energetickej hospodárnosti tejto budovy.

V tomto článku budeme hlavný dôraz dávať na kvantitatívne vyjadrenie tvaru objektov pomocou čísla nazýванého index kompaktnosti, a to územia v rovine, na referenčných plochách Zeme a na kvantitatívne vyjadrenie tvaru priestorových objektov pomocou tzv. indexu tvaru. Ako príklad uvedieme tiež vzťah pre výpočet indexu tvaru pravidelných  $n$ -uholníkov a jeho hodnoty pre niekoľko z nich, a tiež uvedieme návrh kvantifikácie tvaru telies pomocou indexu tvaru s konkrétnymi hodnotami pre Platónske telesá. Z konkrétnych

aplikácií ukážeme použitie indexu tvaru územia na referenčnej ploche Zeme pri výbere kartografického zobrazenia pre územie Slovenska a návrh indexu pre hodnotenie tepelnej efektivity budovy.

## 2 Kvantitatívne vyjadrenie tvaru územia v rovine a jeho veľkosť

V riešení problematiky presnosti a spôsobnosti určenia obsahu územia (areálu, pozemku, resp. parcely) a zmeny jeho obsahu v čase (vývojom porastu, príp. určením hranice pozemku) vplýva veľké množstvo faktorov. Medzi tieto faktory patrí sklon georeliéfu, kvalita vstupných dát, metóda výpočtu obsahu závislá od spôsobu geometrického modelovania jeho hranice, avšak významný morfometrický parameter územia je jeho tvar. V spojitosti s tvarom areálu sa rozlišuje asymetria, centralita, disperzita a navzájom nezávislé charakteristiky, ako kompaktnosť, členitosť a rozmanitosť areálu. V tomto článku ukážeme spôsoby vyjadrenia tvaru územia v rovine pomocou čísla, ktoré nazývame index kompaktnosti.

Pre územia ležiace v rovine je hranica určená uzavretým polygónom s vrcholmi  $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots [x_n, y_n]$ , pričom usporiadanie vrcholov je také, aby sa pri pohľade v smere usporiadania vnútro územia nachádzalo vľavo a vonkajšie body vpravo. V prípade územia s dierami, prípadne areálu nesúvislého je hranica daná množinou uzavretých polygónov, podľa predchádzajúceho popisu. Každému prvku tejto množiny, teda segmentu hranice, je nutné priradiť ďalšiu charakteristiku súvisiacu s orientáciou usporiadania bodov segmentu hranice. Ak je táto orientácia zhodná so smerom pohybu hodinových ručičiek, ide o hranicu diery, priradujeme charakteristiku  $k = -1$ , ak opačná, potom  $k = 1$ .

**Veľkosť nesúvislého územia v rovine** je charakterizovaná plošným obsahom, ktorý je možné vo všeobecnosti vyjadriť týmto iteračným vzťahom:

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^m k_j \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i) \right] + (x_1 - x_n)(y_1 + y_n) \right\} \right| \quad (1)$$

kde  $m$  je počet uzavretých segmentov hranice,  $k_j$  je charakteristika orientácie  $j$ -tého segmentu. Obvod uvedeného územia je určený súčtom dĺžok jednotlivých segmentov hranice, kde obvod jedného z nich je:

$$o_j = \sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (2)$$

**Tvar územia v rovine**, teda rovinných areálov, vyjadruje tzv. index kompaktnosti, ktorý sa v geografických a kartografických aplikáciách používa a používal s rôznou formuláciou. Stručne uvedieme niekoľko z nich.

Gibbsov index kompaktnosti je vyjadrený (Gibbs, 1961):

$$I_G = 1,27 \frac{P}{l^2}, \quad (3)$$

kde  $P$  je obsah areálu a  $l$  je úsečka spájajúca jeho najvzdialenejšie body.

V práci (Michniak, 2002) je porovnanie plošného objektu s pravidelným šestuholníkom so zhodným priemerom, čo možno vyjadriť vzťahom na výpočet indexu:

$$I_k = \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{P}{l^2}, \quad (4)$$

kde  $P$  je celková rozloha územia a  $l$  je dĺžka úsečky spájajúca dva najvzdialenejšie body na jeho obvode. Na obsahu  $P$  objektu a jeho najdlhšej osi  $l$  je založený aj index *elipsovitosťi*:

$$I_e = l/2 \left\{ P / [\pi(l/2)] \right\} = \frac{\pi l^2}{4P}. \quad (5)$$

Index elipsovitosťi kruhu je 1. Pomer cirkularity sa počíta:

$$I_c = 4P O^2, \quad (6)$$

kde  $P$  je plocha objektu a  $O$  je jeho obvod. Kompaktnosť tvaru narastá s klesajúcou hodnotou pomeru cirkularity (Michniak, 2002).

Jednoduchý index opisujúci tvar možno vyjadriť vzťahom:

$$I = \frac{P}{P_k}, \quad (7)$$

kde  $P$  je rozloha plošného prvku a  $P_k$  je plocha kruhu s rovnakým obvodom. Hodnoty sú z intervalu od 0 po 1 a kruhový objekt má hodnotu indexu rovnajúcu sa 1. Porovnania tvaru objektu a kruhu je možné tiež vypočítať ako podiel rozlohy objektu a obsahu kruhu s polomerom rovnajúcim sa dĺžke spájajúcej centrálny bod objektu s jeho najvzdialenejším bodom na hranici. Najkompaktnejší tvar majú objekty s hodnotou bližiacou sa k 1. Tento index bol použitý ako teoretický ukazovateľ tvaru štátneho územia vo Wagnerovom indexe, ktorý je definovaný ako pomer obvodu  $O$  areálu a obvodu kruhu s rovnakým obsahom  $P$ , teda:

$$I_w = \frac{O}{2\sqrt{\pi P}}. \quad (8)$$

V práci (Husár, 1998) je z pomeru obsahu  $P$  a obvodu  $O$  areálu určený index kompaktnosti nasledovne:

$$I_k = 4\pi \frac{P}{O^2}. \quad (9)$$

Hodnoty indexu kompaktnosti ležia v intervale  $\langle 0, 1 \rangle$ , kde  $I_k = 0$  pre čiarový element (napr. úsečku),  $I_k = 1$  pre kruh a  $I_k = \pi/4$  pre štvorec. Z hľadiska geometrického vyjadrenia areálu na mape sú kruh a čiara dve krajné možnosti iba na teoretickej báze.

Ako sme uviedli, hodnoty indexov kompaktnosti v geografických analýzach sú rôzne, ako príklad uvádzame nasledujúce porovnanie pre niekoľko vybraných štátov. Podľa Wagnera majú nasledujúce hodnoty indexov kompaktnosti: Veľká Británia - 7,08, Česko - 2,7, Slovensko - 2,1, Poľsko - 1,8, Rumunsko - 1,6. Hodnoty indexu kompaktnosti (9) sú pre tieto štáty (Klimeková, 2014), (Vajsálová, 2015) odlišné: Veľká Británia – 0,040, Česko – 0,306, Slovensko – 0,208, Rumunsko – 0,407.

Index kompaktnosti rovinných areálov je aplikovaný v geopriestorových analýzach, napr. Husár (2000) v klasifikácii prvkov krajnej pokrývky Slovenska v Corine Land Cover. Gibbs (1961), Bezák a Horáková (1984) uplatňovali mieru kompaktnosti v sídelnej geografii.

Spoľahlivosť grafického vyjadrenia hranice areálu je závislá od jeho tvaru, čo ukázali viacerí autori, napr. (Shi, 2009), (Tinnachote, Chen, 2003). Vo (Vajsálová, 2002), (Ivánová, Vajsálová, 2005) je riešená spoľahlivosť práve aplikáciou indexu kompaktnosti. V práci (Sekerková, 2007) bol vytvorený program na určenie tvaru areálu v ArcGIS a v (Kozáčik, 2011) je kvantifikácia tvaru areálu aj pomocou fraktálnej dimenzie. V roku 2011 boli výsledky týchto prác podkladom pre určenie kritéria na presnosť grafického určenia výmery pozemkov na katastrálnych mapách vo vyhláške Úradu geodézie, kartografie a katastra SR.

V geometrii sú často používané pravidelné  $n$ -uholníky, preto dosadením ich obsahu a obvodu do vzťahu (9) formulujeme vzťah pre výpočet indexu kompaktnosti (budeme ho nazývať index tvaru) pravidelného  $n$ -uholníka. Obvod  $O$  pravidelného  $n$ -uholníka s dĺžkou strany  $a$  je:

$$O = n a . \quad (10)$$

Obsah  $P$  takého  $n$ -uholníka vypočítame:

$$P = n \frac{a r_v}{2}, \quad (11)$$

kde  $r_v$  je polomer vpísanej kružnice, ktorý určíme:

$$r_v = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{2n}}. \quad (12)$$

Po dosadení (12) do (11) a následnej úprave je obsah pravidelného  $n$ -uholníka:

$$P = \frac{n a^2}{4 \operatorname{tg} \left( \frac{180^\circ}{n} \right)} . \quad (13)$$

Po dosadení (10) a (13) do (9) formulujeme vzťah pre výpočet indexu tvaru pravidelného  $n$ -uholníka:

$$I_k = 4\pi \frac{n a^2}{(na)^2 4 \operatorname{tg} \left( \frac{180^\circ}{n} \right)} = \frac{\pi}{n \operatorname{tg} \left( \frac{180^\circ}{n} \right)} . \quad (14)$$

Hodnota takto formulovaného indexu tvaru pravidelného  $n$ -uholníka nie je závislá od veľkosti jeho strany, v tabuľke 1 je príklad niekoľkých hodnôt týchto indexov.

	$n$	Index tvaru
Trojuholník	3	0,6045998
Štvorec	4	0,785398
Pravidelný 5-uholník	5	0,864806
Pravidelný 6-uholník	6	0,9069
Pravidelný 7-uholník	7	0,931941

	$n$	Index tvaru
Pravidelný 8-uholník	8	0,948059
Pravidelný 9-uholník	9	0,959051
Pravidelný 10-uholník	10	0,966883
Pravidelný 11-uholník	11	0,972662
Pravidelný 12-uholník	12	0,977049

Tabuľka 1. Index tvaru pravidelných  $n$ -uholníkov pre  $n = 3, \dots, 12$

### 3 Kvantitatívne vyjadrenie polohy, veľkosti a tvaru zobrazovaného územia na referenčných plochách Zeme

Základnými geometrickými faktormi, ktoré determinujú výber kartografického zobrazenia územia, sú jeho poloha, veľkosť a tvar, príp. aj hodnoty krivostí plochy na danom území. Podľa tvaru, veľkosti a polohy zobrazovaného územia sa určuje druh a poloha zobrazovacej plochy, príp. ich počet. Pri výbere zobrazení je azimutálne zobrazenie vhodné pre územia kruhového tvaru. Pre pozdĺžne územie je vhodné použitie valcových (územie pozdĺž hlavnej kružnice), príp. kužeľových zobrazení (územie pozdĺž rovnobežky). Podľa polohy územia sa volí normálna, rovníková a všeobecná poloha zobrazenia. Tieto zásady sú zjednodušené, nakoľko väčšie územia je potrebné rozdeliť na niekoľko častí a existujú neurčité tvary územia, pri ktorých voľba zobrazovacej plochy dáva malé rozdiely v skreslení.

Referenčné plochy Zeme sú guľová plocha (sféra) a sploštený rotačný elipsoid. Vzťahy pre výpočet geometrických charakteristík odvodíme pre územia ležiace na referenčnej ploche Zeme, ktorých hranica je zložená z jednej uzavretej krivky. Pre územia, ktoré sú zložené z viacerých disjunktných častí, príp. majú vo vnútri plochu, ktorá k nim nepatrí (dieru), je možné tieto vzťahy aplikovať podobne ako pri rovinných areáloch, a to orientáciou hranice vzhľadom na vnútorné body územia a následným súčtom obvodov a plošných obsahov územia. Na úvod zavedieme parametre referenčných plôch a ich vlastnosti, ktoré potrebujeme pri uvedených charakteristikách.

Referenčná sféra a referenčný elipsoid sú dvojrozmerné Riemanovské variety  $\Psi$  a  $\Phi$  (Grafarend, Krumb, 2006). Ich parametre sú zemepisná šírka (sférická  $U$ , elipsoidická  $\phi$ ) a zemepisná dĺžka (sférická  $V$ , elipsoidická  $\lambda$ ). Parametrizácia  $\Psi(U, V)$  je daná pravou stranou parametrických rovníc guľovej plochy:

$$\begin{aligned} X &= R \cos U \cos V, \\ Y &= R \cos U \sin V, \\ Z &= R \sin U, \quad U \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle, V \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle. \end{aligned} \tag{15}$$

Zložky vektora parametrizácie  $\Phi(\phi, \lambda)$  sú pravé strany parametrických rovníc rotačného elipsoidu:

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} \cos \phi \cos \lambda, \\ Y &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} \cos \phi \sin \lambda, \\ Z &= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} \sin \phi, \quad \phi \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle, \lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle. \end{aligned} \tag{16}$$

Prvky Gaussovej matice  $\mathbf{G}$  (nazývanej metrický tenzor) sú dané ako vnútorný tenzorový súčin prvých parciálnych derivácií (Pressley, 2001):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

kde jej prvky pre referenčnú sféru a referenčný elipsoid sú:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial U} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial U} \right)^2, & g_{11} &= \left( \frac{\partial X}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \phi} \right)^2, \\ g_{12} = g_{21} &= \frac{\partial X}{\partial U} \frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} \frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U} \frac{\partial Z}{\partial V}, & g_{12} = g_{21} &= \frac{\partial X}{\partial \phi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \phi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \phi} \frac{\partial Z}{\partial \lambda}, \\ g_{22} &= \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial V} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial V} \right)^2. & g_{22} &= \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Metrický tenzor  $\mathbf{G}$  v bode referenčnej sféry teda je:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 U \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Referenčná sféra má polomer krivosti  $R$  konštantný v každom jej bode, Gaussova krivost  $k_G$  v bode sféry je:

$$k_G = \frac{1}{R^2}. \quad (20)$$

Metrický tenzor  $\mathbf{G}$  v bode referenčného elipsoidu je:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^3} & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \cos^2 \phi}{1-e^2 \sin^2 \phi} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Pre meridiánový polomer krivosti  $M$  a priečny polomer krivosti  $N$  (v smere normálového rezu plochy) platia vzťahy:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \phi)^3}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}}. \quad (22)$$

Po dosadení (22) do (21) je metrický tenzor  $\mathbf{G}$  rotačného elipsoidu:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & N^2 \cos^2 \phi \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Gaussova krivost rotačného elipsoidu je závislá od elipsoidickej šírky  $\phi$  a rovná sa prevrátenej hodnote súčinu polomerov  $M$  a  $N$  hlavných krivostí v danom bode:

$$k_G = \frac{1}{MN}. \quad (24)$$

Elementy oblúkov rovnobežky a poludníka  $ds_r, ds_p$  na referenčnej sfére vypočítame (Hojovec a kol., 1987) (Obr. 1 vľavo):

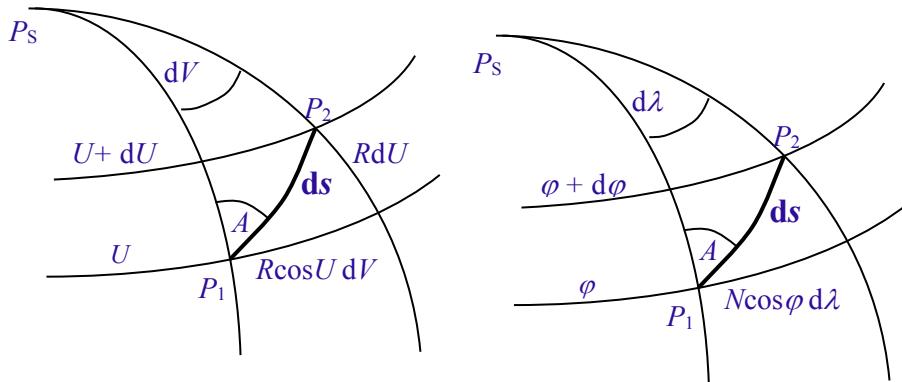
$$\begin{aligned} ds_r &= R \cos U \, dV, \\ ds_p &= R \, dU. \end{aligned} \quad (25)$$

Z prvkov metrického tenzoru  $\mathbf{G}$  sformulujeme prvú základnú formu plochy  $\Phi$  rotačného elipsoidu vyjadrujúcu diferenciálnu dĺžku  $ds$  krivky (elementu geodetickej čiary):

$$ds^2 = M^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2, \quad (26)$$

kde premenné sú diferenciály  $d\phi$ ,  $d\lambda$  parametrov  $\phi$ ,  $\lambda$  a pre elementy oblúkov rovnobežky a poludníka  $ds_r$ ,  $ds_p$  na rotačnom elipsoide platí (Obr. 1 vpravo):

$$\begin{aligned} ds_r &= N \cos \phi d\lambda, \\ ds_p &= M d\phi. \end{aligned} \quad (27)$$



Obr. 1. Elementáne oblúky rovnobežiek, poludníkov a geodetických čiar na guľovej ploche (vľavo), na elipsoide (vpravo) (Vajsálová, 2013)

Nech hranica  $H$  zobrazovaného územia je uzavretá krivka určená zemepisnými súradnicami množiny jej bodov na referenčnej sfére:

$$H = \{[U_1, V_1], [U_2, V_2], \dots, [U_n, V_n]\} \quad (28)$$

a na referenčnom elipsoide:

$$H = \{[\phi_1, \lambda_1], [\phi_2, \lambda_2], \dots, [\phi_n, \lambda_n]\}. \quad (29)$$

**Polohu** zobrazovaného územia je možné charakterizovať aj zemepisnými súradnicami vnútorného bodu  $T$ , ktorý je blízky ľažisku územia, kde vzhľadom na tvar referenčných plôchy Zeme je pri výbere zobrazenia určujúcim faktorom hlavne zemepisná šírka bodu  $T$ . Sférické príp. elipsoidické súradnice bodu  $T$  územia daného množinou  $H$  bodov uzavretej krivky hranice môžeme určiť:

$$\phi_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i, \quad \lambda_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i, \quad \phi_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i, \quad \lambda_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (30)$$

Ďalšou alternatívou určenia polohy sú minimálne a maximálne hodnoty zemepisných súradníc bodov na danom území.

**Veľkosť** zobrazovaného územia je charakterizovaná jeho plošným obsahom  $p$ . Plošný obsah  $p$  diferenciálneho lichobežníka, ktorého strany sú elementárne dĺžky poludníkov a rovnobežiek vyjadrené (25), na referenčnej sfére určujeme podľa vzťahu:

$$dp = R^2 \cos U dU dV. \quad (31)$$

Vzťah pre výpočet plošného obsahu oblasti, ktorej hranica je uzavretá krvka daná množinou  $H$  (28) na referenčnej sfére, formulujeme aplikovaním súčtu plošných segmentov po integrácii predchádzajúceho:

$$p = R^2(V_1 - V_n) \left( (\sin U_n - \sin U_{\min}) + \frac{1}{2}(\sin U_1 - \sin U_n) \right) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} R^2(V_{i+1} - V_i) \left( (\sin U_i - \sin U_{\min}) + \frac{1}{2}(\sin U_{i+1} - \sin U_i) \right). \quad (32)$$

**Plošný obsah**  $p$  diferenciálneho lichobežníka, ktorého strany sú elementárne dĺžky poludníkov a rovnobežiek vyjadrené (27), na referenčnom elipsoide určujeme podľa vzťahu:

$$dp = MN \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad (33)$$

Vzťah pre výpočet plošného obsahu oblasti, ktorej hranica je uzavretá krvka na referenčnom elipsoide daná množinou  $H$  (29), formulujeme integráciou predchádzajúceho a aplikovaním súčtu plošných segmentov:

$$p = (\lambda_l - \lambda_n) \left( \int_{\phi_{\min}}^{\phi_l} MN \cos \phi d\phi + \frac{1}{2} \int_{\phi_n}^{\phi_l} MN \cos \phi d\phi \right) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \left( \int_{\phi_{\min}}^{\phi_i} MN \cos \phi d\phi + \frac{1}{2} \int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} MN \cos \phi d\phi \right). \quad (34)$$

**Tvar** územia vyjadrimo pomocou indexu kompaktnosti, ktorý odvodíme modifikáciou vzťahu (9) a z podmienky, aby hodnoty indexu kompaktnosti  $I_k$  boli v intervale  $(0, 1)$ , kde  $I_k = 0$  pre čiarový objekt na ploche a  $I_k = 1$  pre guľový vrchlík. Nech index kompaktnosti územia ležiaceho na guľovej ploche, príp. elipsoide je v tvare (Vajsálová, 2015):

$$I_k = k \frac{p}{o^2}. \quad (35)$$

Nech vrchlík guľovej plochy s polomerom  $R$  je ohraničený kružnicou, ktorej zenitový uhol určený od bodu  $T$  (blízky tăžisku) je  $\alpha$ . Potom za obvod  $o_v$  tohto vrchlíka je považovaná dĺžka hraničnej kružnice, teda pre plošný obsah  $p_v$  povrchu vrchlíka a obvod  $o_v$  platí:

$$p_v = 2\pi \cdot R \cdot v = 2\pi \cdot R^2 (1 - \cos \alpha), \\ o_v = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot R \sin \alpha. \quad (36)$$

Vychádzajúc z (35) pre  $I_k = 1$  pre guľový vrchlík platí, že koeficient  $k$  sa rovná pomere druhej mocniny obvodu  $o_v$  jeho hraničnej kružnice a plošného obsahu  $p_v$  guľového vrchlíka:

$$k = \frac{o_v^2}{p_v} = \frac{4\pi^2 R^2 \sin^2 \alpha}{2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)} = \frac{2\pi (1 - \cos^2 \alpha)}{1 - \cos \alpha} = 2\pi (1 + \cos \alpha). \quad (37)$$

Dosadením koeficientu  $k$  do (35) je formulovaný vzťah pre výpočet indexu kompaktnosti ľubovoľného územia ležiaceho na guľovej ploche, príp. na rotačnom elipsoide:

$$I_k = 2\pi(1 + \cos \alpha) \frac{p}{o^2}. \quad (38)$$

Uhol  $\alpha$  pre ľubovoľné územie je zenitový uhol vrchlíka s rovnakým plošným obsahom  $p$ , ako má dané územie, potom platí:

$$p_v = 2\pi \cdot R^2 (1 - \cos \alpha) = p, \quad (39)$$

odkiaľ je vyjadrený uhol  $\alpha$  z plošného obsahu  $p$  daného územia:

$$\alpha = \arccos \left[ 1 - \frac{p}{2\pi \cdot R^2} \right]. \quad (40)$$

Po dosadení (40) do (38) je vzťah pre výpočet indexu kompaktnosti územia na guľovej ploche:

$$I_k = (4\pi - \frac{p}{R^2}) \frac{p}{o^2}. \quad (41)$$

Tvar územia nachádzajúceho sa na referenčnom elipsoide vyjadrimo vychádzajúc z vlastností guľovej plochy, ktorá approximuje elipsoid v uvedenom bode  $T$  daného územia. Nech je splnená podmienka, aby referenčný elipsoid a guľová plocha mali v bode  $T$  rovnakú Gaussovú krivost, teda jej polomer sa rovná geometrickému priemeru krivostí elipsoidu v bode  $T$ :

$$R = \sqrt{M_T N_T}. \quad (42)$$

Pre ľubovoľné územie s plošným obsahom  $p$  ležiace na referenčnom elipsoide je nutné určiť uhol  $\alpha$ , a to dosadením  $R$  zo (42) do vzťahu (40), čím dostaneme hodnotu uhlia  $\alpha$  pre územie na referenčnom elipsoide s plošným obsahom  $p$ :

$$\alpha = \arccos \left[ 1 - \frac{p}{2\pi \cdot M_T N_T} \right]. \quad (43)$$

Po dosadení (43) do (38) alebo (42) do (41) je vzťah pre výpočet indexu kompaktnosti územia ležiaceho na referenčnom rotačnom elipsoide:

$$I_k = (4\pi - \frac{p}{M_T N_T}) \frac{p}{o^2}. \quad (44)$$

Pre kruhové územie na elipsoide, ktorý je approximovaný guľovou plochou v okolí bodu  $T$ , hodnota indexu kompaktnosti  $I_k$  je blízka 1 a pre čiarový objekt je hodnota indexu kompaktnosti  $I_k = 0$ .

**Obvod územia** daného hranicou  $H$  na referenčnej sfére a referenčnom elipsoide určíme pomocou súčtu úsekov geodetických čiar medzi po sebe nasledujúcimi bodmi. Dĺžku  $o_{12}$  najkratšej spojnice medzi dvoma bodmi  $P_1 P_2$  na guľovej ploche (ortodrómy, ktorá je oblúk hlavnej kružnice) určíme pomocou kosínusovej vety zo sférického trojuholníka  $PSP_1P_2$  (Vajsálová, 2013):

$$o_{12} = R \arccos(\sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \Delta V), \quad \text{kde } \Delta V = V_2 - V_1. \quad (45)$$

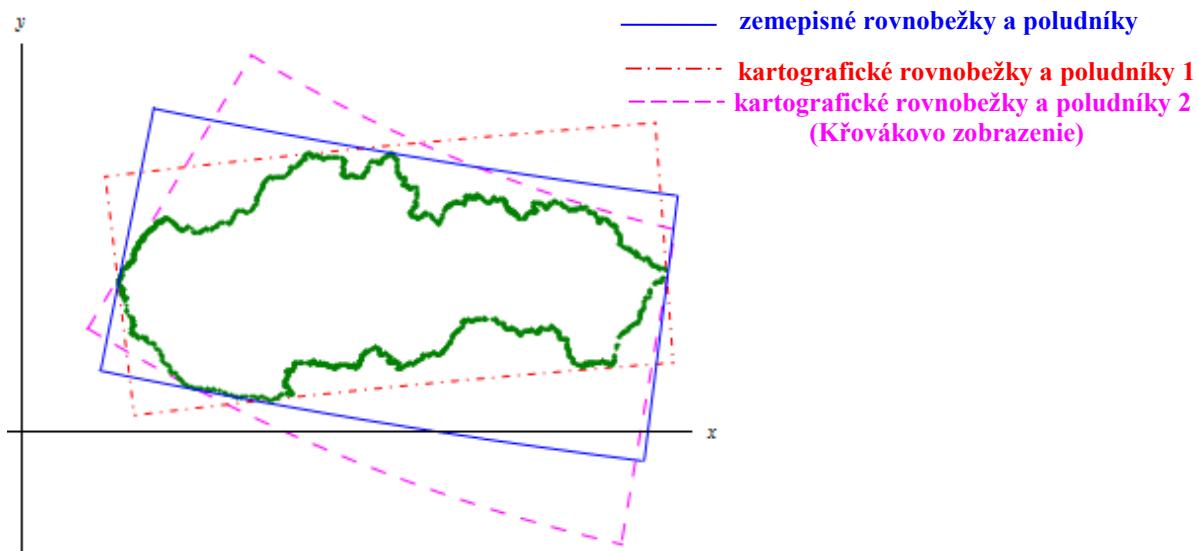
Obvod  $o$  územia daného hranicou  $H$  na referenčnej sfére vyjadrujeme ako súčet dĺžok jednotlivých segmentov hranice podľa (45):

$$o = R \arccos(\sin U_1 \sin U_n + \cos U_1 \cos U_n \cos(V_1 - V_n)) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} R \arccos(\sin U_{i+1} \sin U_i + \cos U_{i+1} \cos U_i \cos(V_{i+1} - V_i)). \quad (46)$$

Obvod oblasti  $o$  rotačného elipsoidu vyjadrujeme ako súčet dĺžok segmentov hranice  $H$ , teda dĺžok geodetických čiar, a to integráciou z jeho prvej základnej formy (26):

$$o = \sqrt{\left( \int_{\phi_n}^{\phi_1} M d\phi \right)^2 + \left( \int_{\lambda_n}^{\lambda_1} N \cos d\lambda \right)^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\left( \int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} M d\phi \right)^2 + \left( \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} N \cos \phi d\lambda \right)^2}. \quad (47)$$

Kvantifikácia uvedených geometrických faktorov územia na referenčných plochách bola aplikovaná pri výbere typu kartografického zobrazenia pre vybrané územia európskych štátov (Klimeková, 2014). Navrhnuté zobrazenia boli porovnané so zobrazeniami používanými v súčasnosti na štátnych mapách. Zohľadnením týchto charakteristík boli v navrhnutých zobrazeniach viacerých štátov až niekoľkonásobne minimalizované krajné hodnoty skreslenia mapových prvkov. V práci (Vajsálová, 2015) bola urobená podrobňá kvantifikácia geometrických charakteristík územia Slovenska ohraničeného hranicou, ale aj elipsoidickými a sférickými lichobežníkmi v rôznych polohách za účelom optimálneho návrhu kartografického zobrazenia (Obr. 2). Kvantifikáciu tvaru územia ohraničeného hranicou a uvedenými lichobežníkmi spolu s dosiahnutými maximálnymi skresleniami v príslušných kužeľových zobrazeniach ukazuje tabuľka 2. Ako je vidieť, kartografický lichobežník 2 v súčasnosti záväzného Křovákovo kužeľového zobrazenia vo všeobecnej polohe nevystihuje pozdĺžnosť územia Slovenska, a teda aj extrémne dĺžkové skreslenia majú najvyššie hodnoty. Tvar elipsoidického lichobežníka pre návrh Lambertovho kužeľového zobrazenia v normálnej polohe a kartografického lichobežníka 1 kužeľového zobrazenia vo všeobecnej polohe majú menší index kompaktnosti, sú teda pozdĺžnejšie a pre zobrazenie Slovenska vhodnejšie, o čom hovoria aj hodnoty extrémnych dĺžkových skresení.



Obr. 2. Ohraničenie Slovenska elipsoidickým zemepisným lichobežníkom a sférickými kartografickými lichobežníkmi

SLOVENSKO		Obsah [km <sup>2</sup> ]	Obvod [km]	Index kompakt.	Extrémne skreslenia [cm/km]
Hranica		49 041,51	1 610,71	0,238	
Elipsoidický lichobežník	Lambertovo	88 399,21	1 263,05	0,6962	-6,7 +6,7
Kartografický lichobežník 1	Všeobecné kužeľové	80 317,34	1 230,67	0,6663	-5,4 +5,4
Kartografický lichobežník 2	Křovákovo	99 642,43	1 298,24	0,7428	-10 +11,2

Tabuľka 2. Index tvaru ohraničenia Slovenska a kartografické zobrazenia

#### 4 Kvantitatívne vyjadrenie tvaru telies

Tvar telies vyjadrený indexom tvaru je používaný z viacerých hľadísk, ako napr. vyjadrenie centrality – odľahlosť bodov povrchu telesa od daného bodu, príp. ako číslo vyjadrujúce pomer povrchu a objemu telesa (tzv. shape factor). V stavebnictve je používaný pod názvom „faktor tvaru budovy“ (Mahdavi, Gurtekin, 2002) pomer plochy povrchu  $S$  teplovymenného obalu budovy k obostavanému objemu  $V$  budovy:

$$I_K = \frac{S}{V}, \quad (48)$$

Na predpoklad splnenia minimálnej požiadavky na energetickú hospodárnosť budov sú odporúčanými hodnotami priemerného súčiniteľa prechodu tepla hodnoty prislúchajúce nasledujúcim faktorom tvaru:

- bytové domy, administratívne budovy, budovy škôl a školských zariadení, budovy nemocníc a športové haly: faktor tvaru  $0,3 \text{ m}^{-1}$ ;
- rodinné domy: faktor tvaru  $0,7 \text{ m}^{-1}$ ;
- hotely a reštaurácie: faktor tvaru  $0,4 \text{ m}^{-1}$ ;
- budovy pre veľkoobchodné a maloobchodné služby: faktor tvaru  $0,5 \text{ m}^{-1}$ .

Vplyv tvarovania architektúry na objekt skúmal aj Basam Behsh, Ph.D. Na modelových situáciách zvolených objektov s rovnakým obstavaným objemom a rovnakou podlažnou plochou simuloval priebeh ročnej teploty v interieri stavby v oblasti Švédska. Namiesto pomeru (48) použil pomer:

$$I_K = \frac{S}{S_P}, \quad (49)$$

kde  $S$  je celková plocha obvodového plášťa a  $S_P$  je celková podlažná plocha objektu. Jeden z faktorov tvaru telesa s objemom  $V$  a povrhom  $S$  uvedených v literatúre je pomocou vzťahu:

$$I_K = \frac{\sqrt{V}}{S}, \quad (50)$$

Dom vo forme kocky, alebo aspoň jej príbuznom tvare, sa javí pre nízkoenergetické objekty ako najvhodnejší, a to s dostatočne využiteľným vnútorným priestorom a bez veľkých ochladzovaných plôch obvodových konštrukcií. Avšak hodnota indexov tvaru budovy v tvare

kocky určené podľa (48), (49) a (50) sú závislé od rozmeru kocky, preto aj budovy s rovnakým tvarom majú rôzne indexy tvaru. Preto v tomto článku formulujeme index tvaru tak, že za geometricky najdokonalejšie teleso budeme považovať guľu. Preto zavedieme kvantifikáciu tvaru telesa pomocou indexu tvaru tak, aby jeho hodnota pre guľu sa rovnala 1. Potom nech vzťah pre index tvaru telesa s povrhom  $S$  a objemom  $V$  je:

$$I_K = k \frac{V^2}{S^3}, \quad (51)$$

Po dosadení vzťahov pre objem  $V_G$  gule a jej povrch  $S_G$  do podmienky, aby index tvaru gule bol 1, dostaneme hľadaný koeficient  $k$ :

$$I_K = k \frac{V_G^2}{S_G^3} = k \frac{4^2 \pi^2 R^6}{3^2 4^3 \pi^3 R^6} = 1 \Rightarrow k = 36\pi. \quad (52)$$

Po dosadení koeficientu  $k$  do (51) je výsledný vzťah pre výpočet indexu tvaru telesa:

$$I_K = 36\pi \frac{V^2}{S^3}. \quad (53)$$

Vzťah pre index tvaru telesa sme navrhli tak, že jeho hodnota pre 5 platónskych telies nie je závislá od veľkosti ich hrany. V tabuľke 3 sú uvedené vzťahy pre výpočet povrchu  $S$ , objemu  $V$  Platónskych telies a hodnoty ich indexu tvaru. Nakol'ko tvaru Platónskych telies sú pripisované energetické účinky a každý z nich je symbolom jedného zo živlov, na Obr. 3 sú zhrozené z polodrahokamu Ametyst. Medzi platónske telesá patrí aj kocka, ktorá je považovaná za ideálny tvar budovy z hľadiska energetickej hospodárnosti. Keďže takto navrhovaná hodnota indexu tvaru kocky nie je závislá od jej rozmerov, dáva tento index tvaru efektívnejší prehľad o tvare budov v stavebnictve.

Platónske teleso	Vzťah pre povrch $S$	Vzťah pre objem $V$	Index tvaru $I_k$
<b>ŠTVORSTEN</b>	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = 0,3023$
<b>KOCKA</b>	$6a^2$	$a^3$	$\frac{\pi}{6} = 0,5235599$
<b>OSEMSTEN</b>	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,6046$
<b>DVANÁŠSTEN</b>	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$\frac{(15+7\sqrt{5})^2 \pi}{12(25+10\sqrt{5})^2} = 0,7547$
<b>DVADSAŤSTEN</b>	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$	$\frac{(3+\sqrt{5})^2 \pi}{60\sqrt{3}} = 0,8288$

Tabuľka 3. Index tvaru platónskych telies



Obr. 3. Fotografia platónskych telies

## 5 Záver

V článku sme ukázali niekoľko príkladov kvantifikácie geometrických vlastností objektov, hlavne tvaru objektov, a to rovinných útvarov, území na referenčných plochách Zeme, a tiež telies v trojrozmernom priestore. Uvedené spôsoby vyjadrenia tvaru objektu boli navrhnuté tak, aby ich hodnoty boli v intervale od 0 do 1, čím dávajú lepší prehľad hodnôt indexov tvaru s využitím v rôznych oblastiach, nielen v aplikáciach v kartografii, geografii a stavebnictve, ktoré sme uviedli v tomto článku.

*Článok bol vypracovaný v rámci riešenia grantovej výskumnej úlohy VEGA 1/0682/16.*

## Literatúra

- [1] BASAM BEHSH. Form, Structure and Performance: A Study on the Thermal Response of building Envelopes. [online]  
Dostupné na internete: <http://www.irbnet.de/daten/iconda/CIB9771.pdf>
- [2] HOJOVEC, V. a kol. *Kartografie*. Praha: GKP, 1987.
- [3] GRAFAREND, W. E. – KRUMM W. F. (2006). *Map Projections. Cartographic Information systems*. Springer – Verlag Berlin Heidelberg. 713 s.
- [4] HUSÁR, K. (1995). Výplne a plošné obsahy areálov. In *Kartografické listy* 3, Bratislava: Kartografická spoločnosť SR, ISSN 1336-5274, roč. 3. s. 35-44.
- [5] HUSÁR, K. (2000). Tvar areálov na príklade krajinnej pokrývky Slovenska. In *Kartografické listy*, 8, Bratislava: Kartografická spoločnosť SR, ISSN 1336-5274, roč. 8., s. 91–98.
- [6] IVÁNOVÁ, I. – VAJSÁBLOVÁ, M. (2005) Uncertainty in Position of Objects as an Influence Factor of the Area Value. In *Proceedings 16th Conference DEXA 2005*. Copenhagen, Denmark: IEEE Computer society Conference Publishing services. 2005, ISBN 0-7695-2424-9, ISSN 1529-4188, vol. 0, no. 0. p. 468-472.
- [7] KLIMEKOVÁ, Z. (2014) *Vplyv charakteru územia na skreslenie v kartografickom zobrazení*. Diplomová práca. STU v Bratislave, 2014.
- [8] KOZÁČIK, T. (2011) *Vplyv tvaru areálu na presnosť určenia výmery*. Diplomová práca. STU v Bratislave, 2011.
- [9] MAHDAVI, A., GURTEKIN, B. (2002) Shapes, Numbers, and Perception: Aspects and Dimensions of the Design Performance Space. In *Proceedings of the 6th International Conference: Design and Decision Support Systems in Architecture*. The Netherlands, ISBN 90-6814-141-4. pp 291-300.

- [10] MICHNIAK, D. (2002). *Dostupnosť ako geografická kategória a jej význam pri hodnotení územno – správneho členenia Slovenska*. [online]. Bratislava, 2002. Dostupné na internete:  
[http://www.geography.sav.sk/sk/personal/michniak/Michniak\\_PhD\\_thesis.pdf](http://www.geography.sav.sk/sk/personal/michniak/Michniak_PhD_thesis.pdf)
- [11] PRESSLEY, A. (2001) *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag London, 2001, 343 p. ISBN 1-8523-152-6.
- [12] SEKERKOVÁ, R. (2007) *Spoľahlivosť vyjadrenia plošných objektov v GIS*. Diplomová práca. STU v Bratislave. 2007
- [13] SHI, W. (2009). Spatial Data Quality and Uncertainty. In *M. Madden, Manual of Geographic Information Systems* (pp. 201-223). Bethesda: American Society for Photogrammetry and Remote Sensing.
- [14] TINNACHOTE, Ch., CHEN, X. (2003) Implementation of positional error model using an object-oriented approach In *The 2nd International Symposium on Spatial Data Quality*, pp. 483-491. Hong Kong.
- [15] VAJSÁBLOVÁ, M. (2002). Vplyv tvaru areálu na spoľahlivosť obsahu, In *Kartografické listy 10*. ISSN 1336-5274, 2002, č. 10, s. 98-106.
- [16] VAJSÁBLOVÁ, M. (2013) *Matematická kartografia*. 1. vyd. Bratislava: STU, 2013. 315 s. ISBN 978-80-227-4027-2.
- [17] VAJSÁBLOVÁ, M. (2015) *Aspekty tvorby kartografického zobrazenia pre územie Slovenska*. Edícia vedeckých prác. Bratislava: Nakladatel'stvo STU, 2015. 107 s. ISBN 978-80-227-4393-8.
- [18] VYHLÁŠKA Úradu geodézie, kartografie a katastra Slovenskej republiky z 15. marca 2011, Zbierka zákonov č. 74/2011.

---

**Doc. RNDr. Margita Vajsálová, PhD.**

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie  
Stavebná fakulta STU  
Radlinského 11, 810 05 Bratislava, SR  
e-mail: margita.vajsablova@stuba.sk

# SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



## PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

### SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective  
to stimulate scientific research and teaching methodology  
in the fields of geometry and computer graphics  
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

---

#### SSGG

Institute of Mathematics and Physics  
Faculty of Mechanical Engineering  
Slovak University of Technology in Bratislava  
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR  
e-mail: info@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

# Abstracts

## **R. Bohdal: Methods for calculation of normal vectors for construction of interpolants above triangular network**

In this article, we compare selected methods for the estimation of normal vectors, which are necessary for the construction of interpolants above the triangular network. The values of normals in individual points of the triangular network greatly affect the shape and the smoothness of the resulting interpolation surface. We compare the individual methods on in-advance given (calculated) normals of the test functions and on the accuracy with which the interpolation surfaces match the test functions. From our tests, the best results were achieved by the method of calculating normals using the local interpolation thin plate spline. The method of weighted average, which was created by combining Little's and Max's method, came the second in order.

## **J. Gunčaga, J. Zentko: Folk ornament as an important factor in identifying plane geometric shapes**

The paper presents the possibility of developing geometric competencies through folk culture. Our attention is focused on a particular folk ornament that can be used for presentation and identification of a plane geometric shape by pupils during the teaching of mathematics. We will focus on the possibilities for the analysis of geometric shapes in a variety of ornaments used in folk culture, in different textile and functional objects. We will describe the specifics of primary education in Slovakia with regard to the interdisciplinary context.

## **S. Struss, P. Chalmovianský: Discretization of the Laplace-Beltrami operator using numerical differentiation**

We propose a method for discretization of Laplace-Beltrami operator using numerical differentiation. This approach requires specific mesh shape, but in some cases, it offers more accurate results than more general methods. We also discuss generalizations and limitations of our method and test it on selected functions.

## **M. Vajsálová: Geometric characteristics of objects for applications in geography, cartography and civil engineering**

Geometric characteristics of the objects are quantified in this paper on the plane, on the reference surfaces and for solid figures in 3D. Equations for expression of the compactness index (shape factor) have been formulated on the assumption that their values are in the interval  $(0, 1)$ , and furthermore, its value is also independent on the size of the regular object. These formulations give more effective characterizations of the shape in different fields, not only in the mathematical cartography (in the choice of cartographic projection of Slovakia territory), in the geographic analyses and in the energy performance of buildings, which we have mentioned in this paper.

**G**

Slovak Journal for Geometry and Graphics

Volume 13 (2016), No. 26

ISSN 1336-524X

Edited by:

Slovak Society for Geometry and Graphics

**SSGG**

**Editor-in-Chief:**

Daniela Velichová

**Managing Editors:**

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

**Editorial Board:**

Vojtech Bálint

Miloš Božek

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Štefan Solčan

Martin Šperka

Margita Vajsálová

Valent Zaťko

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, brief reports, state-of-the-art reviews, analyses, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, analytic, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social and technical disciplines.

**Editorial office:** Slovak Society for Geometry and Graphics

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

**Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:**

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

**Frequency:** One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per

volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

**Information and instructions for authors are available at the address:** [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

**Printed by:** ForPress Nitrianske tlačiarne, s. r. o.

**G is cited in:** Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG December 2016, Bratislava

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific contents.

**[www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)**