



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 14, číslo 28, 2017
ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG**Vedúca redaktorka:**

Daniela Velichová

Výkonné redaktorky:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Redakčná rada:

Vojtech Bálint

Miloš Božek

Ján Čízmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Štefan Solčan

Margita Vajsálová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referaty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:

Redakcia G - SSGG

ÚMF SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

ssgg@ssgg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Euro.

Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adresu: www.ssgg.sk**Tlačí:** ForPress Nitrianske tlačiarne, s. r. o.**Časopis G je citovaný v:** Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG december 2017, Bratislava

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkol'vek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.



Obsah – Contents

O nezávislých systémoch ideálov podpologrúp pologrúp	5
On independent systems of ideals in subsemigroups of semigroups	
Imrich Abrhan, Daniela Velichová	
Minimální elipsa ke konečné množině bodů	21
Minimal ellipse to finite set of points	
Milada Kočandrlová, Jarmila Radová	
Hermite interpolation of ruled surfaces and channel surfaces	35
Hermitova interpolácia priamkových a kanálových plôch	
Boris Odehnal	
Vyšli Dejiny matematiky	59
History of Mathematics published	
Jan Čizmár	

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu a metodiku
vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch
škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého
zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov
a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy,
e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG

Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave

Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

O nezávislých systémoch ideálov podpologrúp pologrúp

Imrich Abrhan, Daniela Velichová

Abstrakt

V článku pojednávame o systémoch ideálov v podpologrupách pologrúp a o niektorých ich vlastnostiach, uvádzame definície a vlastnosti pojmov (úplne) nezávislý systém ideálov. Zavedené sú tiež nové pojmy, ako (úplne) B -nezávislý systém maximálnych ideálov podpologrupy H pologrúpy S vzhľadom na neprázdnú množinu B , dokázaná je ich existencia a niektoré vlastnosti, a ich súvislosť s hlavnými ideálmi. V závere sú uvedené podmienky existencie parciálnej pravej grupy H podpologrupy pologrúpy S , vzhľadom na množinu $B \subseteq H$.

Kľúčové slová: systém ideálov pologrúpy, úplne B -nezávislý systém ideálov, parciálna grúpa podpologrupy s ohľadom na množinu

Abstract

In this paper we deal with systems of ideals in subsemigroups of semigroups and some of their properties, and we present definitions and properties of (completely) independent system of ideals. New concepts are introduced as (completely) B -independent system of maximal ideals in subsemigroup H of semigroup S with respect to non-empty set B , and their existence, some properties and connections to principal ideals are proved. Finally, conditions are given for existence of partial right group H in subsemigroup of semigroup S , with respect to set $B \subseteq H$.

Key words: systems of semigroup ideals, completely B -independent system of ideals, partial group in subsemigroup with respect to set

1 Úvod

V článku nadväzujeme na výsledky publikované v [3], kde sú formulované a dokázané mnohé tvrdenia o vlastnostiach minimálnych ideálov v pologrúpach s ohľadom na ich podmnožiny. Uvedená problematika bola skúmaná tiež v prácach [4], [5]. Rozšírenie tejto problematiky na skúmanie vlastností minimálnych (ľavých, pravých, resp. obojstranných) ideálov podpologrúp v pologrúpach je hlavným cieľom tejto publikácie, ktorá je istým zavŕšením dlhorčného štúdia a vedeckej činnosti autora doc. RNDr. Imricha Abrhana, CSc. v tejto zaujímavej oblasti algebry štruktúr. Uvedené nové pojmy sú tiež motivačným materiálom predloženým na prípadné ďalšie skúmanie vlastností pologrúp a ich ideálov, ponúkajúcim široké možnosti rozšírenia a zovšeobecnenia predkladaných pojmov na všeobecnejšie štruktúry, napr. okruhy.

V ďalšom texte budeme namiesto spojenia „ H je podpologrupa pologrúpy S “ používať stručné vyjadrenie „ H je podpologrupou v S “. Analogicky budeme ľavý (pravý, obojstranný) ideál podpologrupy H v S a tiež hlavný ľavý (pravý, obojstranný) ideál podpologrupy H v S generovaný prvkom $a \in H$ stručne nazývať ľavý (pravý, obojstranný) ideál v S a hlavný ľavý (pravý, obojstranný) ideál pologrúpy S generovaný prvkom $a \in S$.

Ľavý ideál L podpologrupy H v S môžeme definovať napr. nasledovne: Neprázdnú podmnožinu L podpologrupy H v S ($L \subseteq H$) nazývame ľavým ideálom podpologrupy H v S , ak $HL \subseteq L$. Pravý (ľavý, resp. obojstranný) hlavný ideál podpologrupy H v S generovaný

prvkom $a \in H$ označíme $R(a)$, $(L(a)$, resp. $J(a))$ a definujeme nasledovným spôsobom: $R(a) = a \cup aH$ ($L(a) = a \cup Ha$, resp. $J(a) = a \cup Ha \cup aH \cup HaH$).

Na príklade sa dá ukázať, že napr. ľavý ideál podpologrupy H v S nie je aj ľavým ideálom pologrupy S , taktiež napr. že pravý ideál podpologrupy H v S nie je aj ľavým ideálom pologrupy S , alebo že pravý ideál podpologrupy H v S je aj pravým ideálom pologrupy S .

Príklad 1.1. $S_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, u, v\}$ je podpologrupa a binárna operácia \circ na S_1 je definovaná multiplikačnou tabuľkou Tab. 1.

\circ	a	b	c	d	e	f	g	h	u	v
a	a	b								
b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
c	a	b	g	h	a	b	c	d	a	b
d	a	b	g	h	a	b	c	d	a	b
e	a	b	u	v	a	b	e	f	a	b
f	a	b	u	v	a	b	g	h	a	b
g	a	b	c	d	a	b	g	h	a	b
h	a	b	c	d	a	b	g	h	a	b
u	a	b	e	f	a	b	u	v	a	b
v	a	b	e	f	a	b	u	v	a	b

Tab. 1

Je zrejmé, že $H_1 = \{a, b, c, d, g, h\}$ je podpologrupa pologrupy S_1 (vzhľadom na binárnu operáciu \circ definovanú v S_1):

\circ	a	b	c	d	g	h
a	a	b	a	b	a	b
b	a	b	a	b	a	b
c	a	b	g	h	c	d
d	a	b	g	h	c	d
g	a	b	c	d	g	h
h	a	b	c	d	g	h

Tab. 2

Taktiež napr. $L = \{a, c, g\}$ je ľavým ideálom podpologrupy H , ale nie je ľavým ideálom pologrupy S_1 . Ďalej napr. platí, že $L(h) = \{b, d, h\}$ je ľavý hlavný ideál podpologrupy H generovaný prvkom $h \in H$, pričom však nie je ľavým hlavným ideálom pologrupy S_1 .

generovaným prvkom $h \in S_1$. Ďalej tiež platí, že $R = \{a, b, c, d, g, h\}$ je pravý ideál podpologrupy H v S_1 a aj pravý ideál podpologrupy S_1 .

Úplná klasifikácia a usporiadanie všetkých hlavných ideálov pologrúpy S_1 sú uvedené v nasledujúcom prehľade.

A) 1) Všetky hlavné ľavé ideály pologrúpy S_1 sú

$$L(a) = \{a\}, L(b) = \{b\}, L(c) = L(g) = \{a, c, g, e, u\}, \\ L(d) = L(h) = \{b, d, f, h, v\}.$$

2) Usporiadanie všetkých ľavých ideálov v S_1 (s ohľadom na množinovú inklúziu \subseteq) je

$$L(b) \subseteq L(c) = L(g), L(u) \subset L(d) = L(b), L(a) \subset L(l), L(a) \subset L(u), \\ L(f) \subseteq L(d) = L(h), L(v) \subseteq L(d) = L(h), L(b) \subset L(f), L(b) \subset L(v).$$

3) Všetky hlavné pravé ideály pologrúpy S_1 :

$$R(a) = R(b) = \{a, b\}, R(c) = R(d) = R(l) = R(h) = \{c, d, g, h\}, \\ R(e) = R(f) = R(u) = R(v) = \{e, f, u, v\}.$$

4) Usporiadanie všetkých pravých ideálov pologrúpy S_1 (s ohľadom na \subseteq):

$$R(a) \subset R(c), R(a) \subset R(e).$$

5) Všetky obojstranné hlavné ideály pologrúpy S_1 a ich usporiadanie (s ohľadom na \subseteq):

$$J(a) = J(b) = \{a, b\}, J(e) = J(f) = J(u) = J(v) = \{e, f, u, v\}$$

6) $J(a) \subset J(e) \subset J(c)$.

B) Všetky ľavé hlavné ideály podpologrupy H_1 v S_1 a ich usporiadanie (s ohľadom na \subseteq):

7) $L(c) = L(g) = \{a, c, g\}, L(d) = L(h) = \{b, d, h\}, L(u) = \{a\}, L(b) = \{b\}$.

8) $L(a) \subset L(c), L(b) \subset L(d)$.

Zavedieme nasledujúce označenia:

- a) $\mathcal{L}^H(\mathcal{R}^H, \mathcal{S}^H)$ budeme označovať Greenovu reláciu ekvivalencie na podpologrupe H v S , napr. $a \mathcal{L}^H b; a, b \in H$ práve vtedy, ak pre ľavé hlavné ideály $L(a), L(b)$ podpologrupy H v S je $L(a) = L(b)$.
- b) $L_a(R_a, J_a)$ označujeme $\mathcal{L}^H(\mathcal{R}^H, \mathcal{S}^H)$ – triedu priradenú relácii ekvivalencie $\mathcal{L}^H(\mathcal{R}^H, \mathcal{S}^H)$ na podpologrupe H v S obsahujúcu prvak $a \in H$.
- c) $H/\mathcal{L}^H (H/\mathcal{R}^H, H/\mathcal{S}^H)$ označujeme množinu $\mathcal{L}^H(\mathcal{R}^H, \mathcal{S}^H)$ – tried priradených k relácii ekvivalencie $\mathcal{L}^H(\mathcal{R}^H, \mathcal{S}^H)$ na podpologrupe H v S .

Na množine $H/\mathcal{L}^H (H/\mathcal{R}^H, H/\mathcal{S}^H)$ definujeme čiastočné usporiadanie takto:

$L_a \leq L_b$ ($R_a \leq R_b, J_a \leq J_b$), $a, b \in H$ práve vtedy, ak pre hlavné ľavé (pravé, obojstranné) ideály podpologrupy H v S platí $L(a) \subseteq L(b)$ ($R(a) \subseteq R(b), J(a) \subseteq J(b)$).

Nech H je podpologrupa pologrupy S a B neprázdna podmnožina podpologrupy H , čo budeme v ďalšom teste zapisovať inkluziou $B \subseteq H$.

Znakov $NL(B)$ ($NR(B)$, $N(B)$) budeme označovať množinu všetkých takých prvkov $x \in H$, že pre každé $b \in B$ je $L_b \not\subseteq L_x$ ($R_b \not\subseteq R_x$, $J_b \not\subseteq J_x$). Výrazy $D_r(B)$ ($D_l(B)$) označujú množinu všetkých takých prvkov $b \in B$, že $bB = B$ ($Bb = B$).

Inklúzia $X \subset Y$ znamená, že X je vlastnou podmnožinou množiny Y ($X \subseteq Y$ označuje, že buď $X = Y$, alebo $X \subset Y$).

Podpologrupu H pologrupy S nazveme silnou podpologrupou, ak pre každé $a, b \in S$ platí: $a, b \in H$ práve vtedy, ak $a, b \in H$.

Poznámka 1.1. V tejto poznámke uvádzame tvrdenia, na ktoré sa budeme v ďalšom odvolávať (často ich nebudeme priamo uvádzať, ale budeme ich považovať za známe):

- a) Ak $NL(B) \neq \emptyset$ ($N(B) \neq \emptyset$, $NR(B) \neq \emptyset$), potom $NL(B)$ ($N(B)$, $NR(B)$) je ľavý (obojstranný, pravý) ideál podpologrupy H v S .
- b) Ak $a \in H$ a $\bar{\bar{L}}(a) = (L(b) \setminus L_b) \neq \emptyset$ ($\bar{\bar{J}}(a) = J(a) \setminus J_a \neq \emptyset$, $\bar{\bar{R}}(b) = (R(b) \setminus R_b) \neq \emptyset$), potom $\bar{\bar{L}}(a)$ ($\bar{\bar{J}}(a)$, $\bar{\bar{R}}(a)$) je ľavý (obojstranný, pravý) ideál podpologrupy H v S .
- c) Pre každý, napr. obojstranný, ideál M podpologrupy H v S platí:

$$M \cap \overline{N(B)} \neq \emptyset \Leftrightarrow M \cap B \neq \emptyset.$$

- d) Ak $c \in \overline{NL(B)}$ ($c \in \overline{N(B)}$), potom $L_c \subseteq \overline{NL(B)}$ ($J_c \subseteq \overline{N(B)}$).

Zrejme platí aj analogické tvrdenie k tvrdeniu c): napr. $L \cap \overline{NL(B)} \neq \emptyset \Leftrightarrow L \cap B \neq \emptyset$.

Zápis \overline{B} označuje množinu $H \setminus B$ ($B \subseteq H$, napr. $\overline{NL(B)} = H \setminus NL(B)$).

Označenie pojmov a ich definície, na ktoré sa budeme v ďalšom odvolávať a nie sú uvedené v tejto práci, sa nachádzajú napr. v [3, 4].

Definícia 1.1. (pozri napr. [3]). Nech H je podpologrupa pologrupy S a nech $B \subseteq H$. Ľavý ideál L podpologrupy H nazveme minimálnym ľavým ideálom podpologrupy H v S s ohľadom na B , ak $L \cap B \neq \emptyset$ a neexistuje taký ľavý ideál L_1 podpologrupy H v S , že $L_1 \cap B \neq \emptyset$ a $L_1 \subset L$.

Veta 1.1 (pozri napr. [5]). Nech H je podpologrupa pologrupy S a $B \subseteq H$.

- (a) Ak $L \subseteq H$ a $L \neq \emptyset$, potom platí: L je minimálny ľavý ideál v H s ohľadom na B vtedy a len vtedy, ak existuje taký prvek $b \in B$, že $L = L(b)$ a L_b je minimálny prvek v $\overline{NL(B)} / \mathcal{L}^H$.
- (b) Pre každé $b \in B$ platí: $L(b)$ je minimálny ľavý ideál v H s ohľadom na B vtedy a len vtedy, ak $L(b) \cap \overline{NL(B)} = L_b$.

Veta 1.2. Nech H je podpologrupa pologrupy S a nech $B \subseteq H$. Nech $L(b)$, $b \in B$ je minimálny ľavý ideál podpologrupy H v S s ohľadom na $B \subseteq H$ a nech buď $NL(B) = \emptyset$, alebo $NL(B)$ je obojstranný ideál podpologrupy H v S . Potom pre každé $c \in H$ platí: Ak $L(b)c \notin NL(B)$, potom $L(b)c$ je minimálny ideál podpologrupy H v S s ohľadom na B .

Nech H je podpologrupa pologrupy S a nech $B \subseteq H$. Znakom $\overline{\mathcal{P}}^{LB}(H)$ ($\overline{\mathcal{P}}^{RB}(H)$, $\overline{\mathcal{P}}^B(H)$) označme množinu všetkých takých ľavých (pravých, obojstranných) ideálov $L(R, N)$ podpologrury H v S , že $B \not\subseteq L$ ($B \not\subseteq R, B \not\subseteq N$) ($B \not\subseteq L \Leftrightarrow \bar{L} \cap B \neq \emptyset, \bar{L} = H \setminus L$).

Definícia 1.2. Nech H je podpologrupa pologrury S a nech $B \subseteq H$. Ľavý ideál L podpologrury H v S nazveme maximálnym ľavým ideálom podpologrury H v S s ohľadom na množinu B , ak $L \in \overline{\mathcal{P}}^{LB}(H)$ a neexistuje taký ľavý ideál L_1 podpologrury H v S , že $L \subset L_1$ a $L_1 \in \overline{\mathcal{P}}^{LB}(H)$.

Analogicky ako v definícii 1.2 definujeme maximálne pravé (obojstranné) ideály $R(N)$ podpologrury H v S s ohľadom na $B \subseteq H$.

Budeme hovoriť, že podpologrupa H v S spĺňa podmienku $M_{LB}(H)$ ($M_{RB}(H)$, $M_B(H)$), ak $\overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H) \neq \emptyset$ ($\overline{\mathcal{P}}_{\max}^{RB}(H) \neq \emptyset$, $\overline{\mathcal{P}}_{\max}^B(H) \neq \emptyset$).

Veta 1.3. Nech S je pologrupa a nech $B \subseteq S$. Nech $H = \bigcap \{L(b) \mid b \in B\}$ a nech H splňa podmienku $M_{LB}(H)$. Nech L je ľavý ideál podpologrury H v S . Potom

- (a) $L \in \overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H)$ vtedy a len vtedy, ak existuje taký prvok $b \in B$, že $L = NL(b) \subseteq H$ a L_b je maximálny prvok v H / \mathcal{L}^H .
- (b) Pre každé $b \in B$ platí: $NL(b) \in \overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H)$ vtedy a len vtedy, ak $\overline{NL(b)} \cap H = L_b$ ($\overline{NL(b)} = H \setminus NL(b)$).

Dôkaz. (a) I. Nech $L \in \overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H)$. Potom $B \not\subseteq L$. Nech $b \in \bar{L} \cap B$ ($\bar{L} = H \setminus L$). Najprv ukážeme, že $L \subseteq NL(b)$. Predpokladajme, že existuje taký prvok $c \in L$, že $c \notin NL(b)$. Potom $c \in \overline{NL(b)}$. To znamená, že $L_b \leq L_c$. Potom $b \in L_b \subseteq L(b) \subseteq L(c) \subseteq L$. To je spor s predpokladom, keďže $b \in \bar{L}$. Z toho vyplýva, že $L \subseteq NL(b)$. Z toho podľa predpokladu dostaneme, že $L \subseteq NL(b)$ ($\subseteq H$), keďže podľa predpokladu $b \in B$. Potom $L_b \subseteq L(b) \subseteq H$. Z toho vyplýva, že $L_b \in H / \mathcal{L}^H$. Predpokladajme, že existuje také $c \in B$, že $L_b \leq L_c$. V prípade, že $L_b < L_c$, platí $\overline{NL(c)} \subseteq \overline{NL(b)}$. Potom $L = NL(b) \subset NL(c) \subset H$. To je spor s predpokladom, že $L \in \overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H)$. Z toho vyplýva, že L_b je maximálny prvok v H / \mathcal{L}^H . ($NL(b) = H \setminus L_b = L$).

(a) II. Nech $L = NL(b)$, $b \in B$ a L_b je maximálny prvok v H / \mathcal{L}^H . Potom $b \notin L$ a $B \subseteq L$. Teda $L \notin \overline{\mathcal{P}}^{LB}(H)$. Nech $L_1 \in \overline{\mathcal{P}}^{LB}(H)$ a $L \subset L_1 \subset H$. Podľa predpokladu platí $\bar{L}_1 \cap B \neq \emptyset$. Nech $c \in \bar{L}_1 \cap B$. Potom $L_c \subseteq \bar{L}_1$ a $c \in B \subseteq H$ (je zrejmé, že $L \cap L_c = \emptyset$). Potom $L_c \subseteq H$ a $c \in L_c \subseteq \bar{L}_1 \subset \bar{L} = \overline{NL(b)}$. Z toho vyplýva, že $L_b \leq L_c$. Potom podľa predpokladu dostaneme, že $L_b = L_c$. Z toho vyplýva $\bar{L} = L_b = L_c = \bar{L}_1$, a teda $L = L_1$. Ďalej dostaneme, že $\overline{NL(b)} = \overline{NL(c)}$, a teda $L = NL(b) = NL(c) = L_1$. Z toho vyplýva, že L je maximálny ľavý ideál v H s ohľadom na B .

(b) I. Predpokladajme, že $b \in B$ a $L = NL(b) \in \overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H)$. Je zrejmé, že $L_b \subseteq \overline{NL(b)} \cap H$. Predpokladajme, že existuje taký prvok $c \in \overline{NL(b)} \cap H$, že $c \notin L_b$. Potom $L_b < L_c \subseteq H$, čo je spor s tým, že L_b je maximálnym prvkom v H / \mathcal{L}^H , teda $\overline{NL(b)} \cap H \subseteq L_b$.

(b) II. Predpokladajme, že $b \in B$, $L_b = \overline{NL(b)} \cap H$ a $NL(b) \notin \overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H)$. Potom existuje $L_1 \in \overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H)$, že $NL(b) \subset L_1 \subset H$. Nech $c \in \overline{L_1} \cap B$. Potom $NL(b) \subset N^2 \subseteq NL(c)$ a teda $\overline{NL(c)} \subset \overline{NL(b)}$. Potom $L_b < L_c$ a $L_b \cup L_c \subseteq \overline{NL(b)} \cap H$ ($L_b \cap L_c = \emptyset$). Z predchádzajúceho vztahu vyplýva, že $L_b \subset \overline{NL(b)} \cap H$. To je spor s predpokladom, a teda $NL(b) \in \overline{\mathcal{P}}_{\max}^{LB}(H)$.

Poznámka 1.2. Nech sú splnené predpoklady vety 1.3. Potom L je maximálny ľavý ideál podpologrupy H v S práve vtedy, ak $H \setminus L = L_a$, $a \in H \setminus L$ a L_a je maximálny prvak v H / \mathcal{L}^H .

Poznámka 1.3. Nech sú splnené predpoklady vety 1.3. Potom nasledujúce dve tvrdenia (a) a (b) sú ekvivalentné:

- (a) L je maximálny ľavý ideál podpologrupy H v S vtedy a len vtedy, ak $H \setminus L_a = L$, $a \in H \setminus L$ a L_a je maximálny prvak v H / \mathcal{L}^H .
- (b) L je maximálny ľavý ideál podpologrupy H v S , ak existuje také $a \in H$, že $L = NL(a)$ a L_a je minimálny prvak v H / \mathcal{L}^H .

Dôkaz. I. Predpokladajme, že platí tvrdenie (a).

α) Predpokladajme, že existuje taký prvak $x \in H \setminus L_a$, t.j. $x \notin L_a$, že $x \notin NL(a)$. Potom $x \in \overline{NL(a)}$ a $L_a \leq L_x$. Podľa predpokladu platí $x \in L_x = L_a$, čo je spor. Z toho vyplýva, že platí inkluzia $H \setminus L_b \subseteq NL(b)$.

β) Predpokladajme, že existuje prvak $x \in NL(a)$, $x \notin H \setminus L_a$. Potom $x \in L_a$ a teda $x \in \overline{NL(a)}$. To je spor s predpokladom, preto platí inkluzia $NL(a) \subseteq H \setminus L_a$.

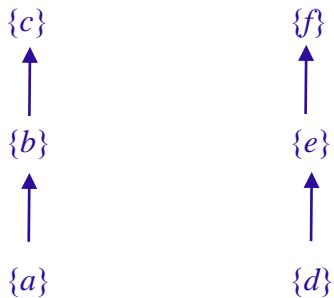
Z tvrdení α) a β) vyplýva ekvivalencia tvrdení a) a b).

Príklad 1.2. Nech $S_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ je pologrupa a binárna operácia na S_2 je definovaná multiplikačnou Tab. 2. Potom: $S_2 = (S_2, \circ)$ je pologrupa s uvedenými triedami a) a b).

\circ	a	b	c	d	e	f
a	a	a	c	a	d	d
b	a	b	b	a	e	e
c	a	b	c	d	e	f
d	a	a	a	d	d	e
e	a	b	b	d	e	e
f	a	b	c	d	e	f

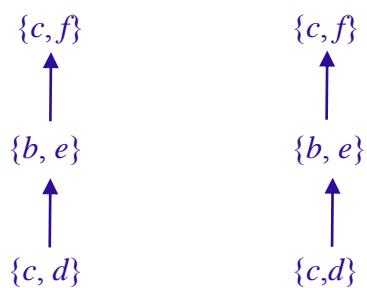
Tab. 3

a) \mathcal{L} - triedy množiny S_2 / \mathcal{L} a ich usporiadanie



Tab. 4

b) $\mathcal{R}(a\mathcal{S})$ - triedy množiny S_2 / \mathcal{L} a ich usporiadanie



Tab. 5

Poznámka 1.4. Je zrejmé, že platia nasledovné tvrdenia:

- A) $H = \{b, c, e, f\}$ je podpologrupa pologrupy S_2 a $B = \{c, f\} \subseteq H$.
- B) $H = \{a, b, c, d\}$ je podpologrupa pologrupy S_1 a $B = \{b, e\} \subseteq H$.

V prípade A)

1) \mathcal{L} - triedy (množiny H / \mathcal{L}^H) a ich usporiadanie:



Tab. 6

2) $\mathcal{R}(a\mathcal{S})$ - triedy (množiny $H / \mathcal{R}^H(H / \mathcal{S}^H)$) a ich usporiadanie:



Tab. 7

- 3) Ľavé hlavné ideály v H má napr. $L(c) = \{c, d\}$, $L(f) = \{f, e\}$ a žiadny z nich nie je ľavým hlavným ideálom podpologrupy S_2 .
- 4) $H = L(c) \cup L(f)$.
- 5) Každý ľavý hlavný ideál $L(c)$, $L(f)$ je minimálny ľavý ideál v H s ohľadom na B a nie je minimálnym ideálom podpologrupy S_3 .
- 6) Ľavé ideály $NL(c) = \{b, e, f\}$, $NL(f) = \{b, c, e\}$ sú maximálne ľavé ideály v H s ohľadom na B a žiadny z nich nie je maximálnym ľavým ideálom v S_3 .

V prípade B) sú pravdivé analogické tvrdenia k tvrdeniam uvedeným v A).

2 Nezávislé systémy ideálov podpologrúp pologrúp

Definícia 2.1. Nech H je podpologrupa pologrupy S a $B \subseteq H$. Množinu hlavných ľavých ideálov $\mathcal{H}^H = \{L(b) \mid b \in B\}$ podpologrupy H nazveme B -nezávislým systémom ľavých hlavných ideálov v H , ak platí práve jedno z nasledujúcich tvrdení:

- a) pre každé $a, c \in B$ je $L(a) = L(b)$,
- b) existujú dva také prvky $a, b \in B$, že $L(a) \neq L(b)$ a pre každé $u, v \in B$ platí:
ak $L(u) \neq L(v)$, potom $L(a) \not\subset L(b)$ a $L(u) \not\subset L(v)$.

Analogicky definujeme nezávislú množinu hlavných pravých (obojstranných) ideálov $\mathcal{H}^R = \{R(b) \mid b \in B\}$ ($\mathcal{H} = \{N(b) \mid b \in B\}$) podpologrupy H v S .

Znakom $\mathcal{N}_L(\mathcal{N}_R, \mathcal{N})$ označme množinu všetkých nezávislých ľavých (pravých, obojstranných) hlavných ideálov podpologrupy H pologrupy S .

Na množine $\mathcal{N}_L(\mathcal{N}_R, \mathcal{N})$ definujme čiastočné usporiadanie množinovou inklúziou \subseteq .

V práci [5] je dokázaná nasledujúca veta:

Veta 2. 1. Nech H je podpologrupa pologrupy S .

- a) Množina \mathcal{N}_L všetkých ľavých nezávislých systémov podpologrupy H v S je neprázdna.
- b) Každý ľavý hlavný ideál L podpologrupy H v S je prvkom aspoň jedného nezávislého systému ľavých hlavných ideálov podpologrupy H v S .
- c) Každý nezávislý systém ľavých hlavných ideálov $\mathcal{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ podpologrupy H v S je prvkom aspoň jedného maximálneho nezávislého systému $\mathcal{H}^{*L} = \{L(c) \mid c \in B^*\}$ ($B^* \subseteq H$), t.j. $\mathcal{H}_L \subseteq \mathcal{H}^{*L}$.

Poznámka 2.1. Nech H je podpologrupa pologrupy S a $B \subseteq H$. Potom zrejme platia aj nasledujúce dve tvrdenia:

- (a) Ak $\{L(b)\}$ je maximálny B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov v H , potom pre každé $x \in H$ buď $L_b \leq L_x$, alebo $L_x < L_b$.

(b) Ak $\mathcal{N}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je maximálny B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov v H , potom pre každé $x \in H$ existuje také $b \in B$, že buď $L_b \leq L_x$, alebo $L_x < L_b$.

Lema 2.1. Nech H je podpologrupa pologrúpy S a $B \subseteq H$. Nech $\mathcal{H}^L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je maximálny B -nezávislý systém ľavých ideálov pologrúpy H v S , $H = \cup\{L(b) \mid b \in B\}$ a nech $c \in H$. Potom platí:

- (a) $L(c)$ je maximálnym (minimálnym) prvkom v $H/\mathcal{L}^H(NL(B)/\mathcal{L}^H)$ vtedy a len vtedy, ak existuje taký prvak $b \in B$, že $L_c = L_b$.
- (b) $\overline{NL(B)} = \cup\{L_b \mid b \in B\}$.

Dôkaz. V prípade, že platí $H = L(b)$ a $B = \{b\}$, je platnosť tvrdení (a), (b) zrejmá. Predpokladajme, že $|B| > 1$.

α) Ukážeme, že platí tvrdenie: L_c je maximálnym prvkom v H/\mathcal{L}^H práve vtedy, ak existuje také $b \in B$, že $L_c = L_b$.

- 1) Predpokladajme, že je L_c maximálny prvak v H/\mathcal{L}^H . Potom podľa predpokladu existuje také $b \in B$, že $b \in L(b)$. Potom $L(c) \subseteq L(b)$, teda $L_c \leq L_b$. Z toho podľa predpokladu dostaneme $L_c = L_b$.
- 2) Predpokladajme, že existuje taký prvak $b \in B$, že $L_c = L_b$, L_c nie je maximálnym prvkom v H/\mathcal{L}^H . Potom existuje taký prvak $x \in H$, že $L_c < L_x$. Podľa predpokladu existuje taký prvak $d \in B$, že $x \in L(d)$. Potom $L(b) = L(c) \subset L(x) \subseteq L(d)$. To je však spor s predpokladom.

Z úvah v 1) a 2) vyplýva pravdivosť tvrdenia α).

β) $L_c, c \in H$, je minimálnym prvkom v $\overline{NL(B)}/\mathcal{L}^H$ s ohľadom na B práve vtedy, ak existuje taký prvak $b \in B$, že $L_c = L_b$.

1') Predpokladajme, že L_c je minimálny prvak v $\overline{NL(B)}/\mathcal{L}^H$. Potom $L_c \subseteq \overline{NL(B)}$ a teda existuje taký prvak $b \in B$, že $L_b \leq L_c$. Z toho podľa predpokladu vyplýva $L_c = L_b$, $b \in B$.

2') Predpokladajme, že existuje taký prvak $b \in B$, že L_b nie je minimálny prvak v $\overline{NL(B)}/\mathcal{L}^H$. Potom existuje taký prvak $d \in B$, že $L_d < L_b$. Potom $L(d) \subset L(b)$, $d, b \in B$. To je však spor s predpokladom.

Z úvah 1') a 2') vyplýva pravdivosť tvrdenia β).

Z úvah α) a β) vyplýva pravdivosť tvrdenia (a) lemmy 2.1.

b) I. Nech $x \in \overline{NL(B)}$. Potom existuje taký prvak $b \in B$, že $L_b \leq L_x$. Z toho podľa pravdivosti tvrdenia (a) je $x \in L_x = L_b$. Z toho vyplýva, že $\overline{NL(B)} \subseteq \cup\{L_b \mid b \in B\}$.

II. Nech $x \in \cup\{L_b \mid b \in B\}$. Potom existuje také $d \in B$, že $x \in L_d \subseteq \overline{NL(B)}$. Potom $\cup\{L(b) \mid b \in B\} \subseteq \overline{NL(B)}$. Z úvah I. a II. Vyplýva pravdivosť tvrdenia (b).

Lema 2.2. Nech sú splnené predpoklady lemmy 2.1 a L je ľavý ideál podpologrúpy H v S .

- (a) L je minimálny ľavý ideál v H s ohľadom na B práve vtedy, ak existuje taký prvak $b \in B$, že $L = L(b)$.

- (b) L je maximálny ľavý ideál v H s ohľadom na množinu B , ak existuje taký prvok $l \in B$, že $H \setminus L = L_b$.

Dôkaz. Pravdivosť tvrdení v leme 2.2 dostaneme priamo pomocou vety 1.3, poznámky 1.3 a lemy 2.2.

Lema 2.3. Nech sú splnené predpoklady lemy 2.1. Nech bud' $NL(B) = \emptyset$, alebo $NL(B)$ je obojstranný ideál podpologrupy H v S a nech $c \in H$. Potom ak $L(b)c \not\subseteq NL(B)$, $b \in B$, $L(b)c$ je minimálny ideál podpologrupy H v S s ohľadom na B .

Lema 2.4. Nech sú splnené predpoklady lemy 2.1 a nech $P = \overline{NL(B)}$ je podpologrupa podpologrupy H v S . Potom:

- (a) P je silná podpologrupa podpologrupy H v S .
- (b) Ak podpologrupa H v S má práve jeden minimálny ľavý ideál L s ohľadom na B , potom $N = NL(B) \cup L$ je obojstranný ideál podpologrupy H v S .

Dôkaz. a) Predpokladajme, že existujú také dva prvky $a, b \in H$, že $ab \in P$ a napr. $a \notin P$. Potom $a \in NL(B)$ a aj $ab \in NL(B)$, čo je spor s predpokladom. Analogicky sa dá dokázať, že aj $b \in B$. Z predchádzajúceho vyplýva pravdivosť tvrdenia (a).

b) Predpokladajme, že podpologrupa H v S obsahuje práve jeden ľavý ideál L podpologrupy v S s ohľadom na B . Potom podľa predpokladu existuje také $b \in B$, že $L = L(b)$. Podľa lemy 2.3 pre každé $c \in H$ platí bud' $L(b)c \subseteq NL(B)$, alebo $L(b)c$ je minimálny ideál v H s ohľadom na B . Potom podľa predpokladu platí: ak $L(b)c$ je minimálny ľavý ideál v H s ohľadom na B , potom $L = L(b)c$. Z predchádzajúcich úvah je zrejmá platnosť tvrdenia (b).

Definícia 2.2. Podpologrupu H pologrupy S nazývame zľava B -jednoduchou s ohľadom na podmnožinu $B \subseteq H$, $B \neq \emptyset$, ak platí:

- (a) $H = D_r(H)$.
- (b) $H^2 = H$.

Analogicky môžeme definovať sprava B -jednoduchú podpologrupu H pologrupy S s ohľadom na podmnožinu $B \subseteq H$, $B \neq \emptyset$.

Lema 2.5. Nech podpologrupa H pologrupy S je zľava B -jednoduchá s ohľadom na $B \subseteq H$. Položme $B = N \setminus B$. Potom:

- (a) B je podpologrupa podpologrupy H v S .
- (b) Ak $\overline{B} \neq \emptyset$, potom B je ľavý ideál podpologrupy H v S .

Dôkaz. a) Nech $a, b \in B$ ($= O_r(S)$). Potom $H(ab) = (Ha)b = Hb = H$. Potom $a, b \in B$. Z toho vyplýva pravdivosť tvrdenia (a).

b) Predpokladajme, že $\overline{B} \neq \emptyset$. Ďalej predpokladajme, že existuje taký prvok $a \in H$ a taký prvok $b \in \overline{B}$, že $ab \notin \overline{B}$. Potom $ab \in B$ a podľa predpokladu platí $H = H(ab) = H(a)b \subseteq Hb \subseteq H$ a to je spor s predpokladom $Hb = H$. Z toho vyplýva, že pre každé $a \in H$ a každé $b \in \overline{B}$ je $ab \in \overline{B}$. Z predchádzajúceho vyplýva pravdivosť tvrdenia (b).

Poznámka 2.2. Nech sú splnené predpoklady lemy 2.5. Potom platí: Ak $\overline{B} \neq \emptyset$, potom $B = H$ ($= O_r(H)$), t.j. pre každé $b \in H$ je $Hb = H$. Nech $b \in H$. Potom $H = Hb \subseteq H^2 \subseteq H$. Z predchádzajúceho vyplýva, že podpologrupa H je zľava jednoduchá.

Lema 2.6. Nech H je podpologrupa pologrupy S a nech $B \subseteq H$. Nech $H^2 = H$. Potom nasledujúce dve tvrdenia (a) a (b) sú ekvivalentné:

- (a) $Hb = H$ práve vtedy, ak $b \in B$.
- (b) Pre každý ľavý ideál podpologrury H v S platí: $L \cap B \neq \emptyset$ práve vtedy, ak $L = H$.

Dôkaz. (a) \Rightarrow (b). Predpokladajme, že platí tvrdenie (a). Nech L je ľubovoľný ľavý ideál podpologrury H v S taký, že $L \cap B \neq \emptyset$. Nech $a \in L \cap B$, podľa predpokladu $H = Hb \in L$. Z toho vyplýva, že $H = L$. V prípade, že $L \cap B = \emptyset$, potom je zrejmé, že $H \neq L$ a tvrdenie (b) je pravdivé.

(b) \Rightarrow (a). Predpokladajme, že platí tvrdenie (b). Nech $b \in B$. Potom bud'

- α) $Hb \cap B \neq \emptyset$, alebo β) $Hb \cap B = \emptyset$.

V prípade α) podľa predpokladu dostaneme, že $Hb = H$.

Predpokladajme, že platí tvrdenie β). Potom $L(b) = b \cup Hb$ je ľavý ideál podpologrury H v S a $L(b) \cap B \neq \emptyset$. To podľa predpokladu znamená, že $H = b \cup Hb$. Potom však platí $H^2 = H(b \cup Hb) \subseteq Hb \subset H$, čo je v spore s predpokladom, že $H^2 = H$. Z toho vyplýva, že pre každé $b \in B$ je $Hb = b$. Predpokladajme, že $b \notin B$. Potom $b \in \overline{B}$. Z toho podľa lemy 2.1 dostaneme, že $Hb \subseteq \overline{B}$ a teda $Hb \neq H$. Z predchádzajúceho vyplýva pravdivosť tvrdenia (a).

Lema 2.7. Nech sú splnené predpoklady lemy 2.5 a $\overline{B} \neq \emptyset$. Potom:

- (a) $B = L_b, b \in B$.
- (b) $\overline{NL(B)} = L_b, b \in B$.
- (c) $L_b, b \in B$ je minimálny (maximálny) prvok v $\overline{NL(B)}/\mathcal{L}^H$ (v H/\mathcal{L}^H).

Dôkaz. a) Nech $a, b \in B$. Potom podľa predpokladu $Ha = H$ a $Hb = H$. Potom $Ha = Hb$ a teda $L(a) = L(b)$. Z toho vyplýva $B \subseteq L_b, b \in B$. Predpokladajme, že existuje také $a \in L_b$, že $a \notin B$. Potom $a \in \overline{B}$ a podľa lemy 2.1 je $b \in L_b = L_a \subseteq \overline{B}$. To je spor. Z predchádzajúceho teda vyplýva platnosť tvrdenia (a).

b) Zrejme platí, že $L_b \subseteq \overline{NL(B)}, b \in B$. Predpokladajme, že existuje taký prvok $c \in \overline{NL(B)}$, že $c \notin L_b$. Potom podľa tvrdenia (a) je $c \in \overline{B}$, a platí $b \in L(b) \subset L(a) \subseteq \overline{B}$. To je však spor s predpokladom, z čoho vyplýva pravdivosť tvrdenia (b).

c) Je zrejmé, že L_b je minimálny prvok v $\overline{NL(B)}/\mathcal{L}^H$. Ukážeme, že L_b je maximálny prvok v H/\mathcal{L}^H . Predpokladajme, že existuje taký prvok $c \in H$, že $L_b < L_c$ ($c \notin L_b$). Potom podľa tvrdenia (a) je $c \in \overline{B}$ a podľa lemy 2.1 platí, že $b \in L(b) \subset L(c) \subseteq \overline{B}$. To je spor s tým, že $b \in B$. Z predchádzajúcich úvah priamo vyplývy pravdivosť tvrdenia (c).

Veta 2.2. Nech H je podpologrupa pologrury S a nech $B \subseteq H$. Nech N je obojstranný ideál podpologrury H v S a neexistuje taký ľavý ideál L (s ohľadom na B), že $N \subset L \subset H$. Položme $P = H \setminus N$. Potom platí:

- (a) Ak bud' $|P| \geq 2$, alebo $P = \{b\}, b^Z = b$, potom P je silná a zľava jednoduchá podpologrupa pologrury H v S (s ohľadom na B).
- (b) Ak $P = \{b\}, b^Z \neq b, b^Z \in N$.

Dôkaz. a) Predpokladajme, že $|P| \geq 2$ a existuje také $b \in B$, že $Hb \cap P = \emptyset$. Potom $N \subset N \cup \{b\} \subset H$ a $N \cup \{b\}$ je ľavý ideál v H . To je spor s predpokladom. Z toho vyplýva, že pre každé $a \in P$ je $Ha \cap P \neq \emptyset$. Potom $N \subset N \cup Hb \subseteq H$. Z toho podľa predpokladu dostaneme že $N \cup Hb = H$ pre každé $b \in P$. Nech $a \in P$. Potom platí $H = N \cup (N \cup P)a = N \cup Na \cup Pa = N \cup Pa = N \cup P$. Z toho vyplýva, že $Pa = P$ práve vtedy, ak $a \in P$. Nech $a, b \in P$. Potom $P(ab) = (Pa)b = Pb = P$. Potom $ab \in P$. To znamená, že P je podpologrupa v H a zľava jednoduchá podpologrupa v H .

Ukážeme, že P je silná podpologrupa podpologrury H . Predpokladajme, že existujú také prvky $a, b \in P$, že $ab \in P$ a napr. $a \notin P$. Potom $a \in N$ a podľa predpokladu dostaneme, že $ab \in N$. To je spor s tým, že P je podpologrupa v H . Podobne sa dá ukázať, že aj v prípade $b \notin P$ dostaneme spor. Z predchádzajúceho vyplýva pravdivosť tvrdenia.

Veta 2.3. Nech sú splnené predpoklady lemy 2.5. Potom:

- (a) $L(b) = H$ je minimálny ľavý ideál podpologrury H v S s ohľadom na B .
- (b) $\overline{B} = H \setminus L_b = L$, $b \in B$ a $\overline{B} \neq \emptyset$ je maximálny ideál podpologrury H v S .

Dôkaz. a) Z predpokladov lemy 2.5 a podľa lemy 2.7 a vety 1.1 dostaneme pravdivosť tvrdenia (a).

b) Pravdivosť tvrdenia (b) dostaneme priamo podľa vety 1.3 a podľa tvrdenia v poznámke 1.4.

3 Úplne nezávislé systémy idelálov podpologrúp

Definícia 3.1. Nech H je podpologrupa pologrury v S a $B \in H$. Systém ľavých hlavných ideálov $\mathcal{N}_H = \{L(b) \mid b \in B\}$ podpologrury H v S nazveme úplne B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov podpologrury H v S , ak bud'

- (a) $L(a) = L(b)$ pre každé $a, b \in B$, alebo
- (b) ak $a, b \in B$ a $L(a) \neq L(b)$, potom $L(a) \cap L(b) = \emptyset$.

Analogicky definujeme úplne B -nezávislý systém \mathcal{N}_R (\mathcal{N}_O) pravých (obojstranných) ideálov podpologrury H v S .

Poznámka 3.1. Zrejme platí:

- a) Každý úplne B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov podpologrury H v S je aj B -nezávislým systémom ľavých hlavných ideálov podpologrury H v S (neplatí „obrátené“ tvrdenie).
- b) Každé tvrdenie dokázané o B -nezávislom systéme ľavých hlavných ideálov $\mathcal{N}_H = \{L(b) \mid b \in B\}$ podpologrury H ($B \subseteq H$) v S je pravdivé aj pre úplný B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov podpologrury H v S .

Príklad 3.1. Nech S_1 je pologrupa z príkladu 1.1. Potom (pozri poznámku 1.1)

- a) Nech $B = \{g, d, h\} \subseteq S_1$. Potom systém ľavých hlavných ideálov $\{L(g), L(d), L(h)\}$ je B -nezávislý systém hlavných ľavých ideálov pologrury S_1 .

- b) Položme $B = \{d, u\} \subseteq S_3$. Potom systém pravých hlavných ideálov $\{R(d), R(u)\}$ je B -nezávislý systém pravých hlavných ideálov v $H = S_3$ a nie je úplný B -nezávislý systém pravých hlavných ideálov v $H = S_3$.

Príklad 3.2. Nech S_2 je pologrupa v príklade 1.2. Potom

$H = \{b, c, e, f\}$ je podpologrupa pologrupy S_2 .

- a) Položme $B = \{e, f\}$. Potom každý z ľavých hlavných ideálov $L(c) = \{b, c\}$, $L(f) = \{e, f\}$ je minimálnym ľavým ideálom v H s ohľadom na B a $\{L(e), L(f)\}$ je úplne B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov podpologrúpy H v S_2 .

Každý z ľavých hlavných ideálov $L(c) = \{a, b, c\}$, $L(f) = \{d, e, f\}$ pologrupy S_2 je minimálny ľavý ideál v S_2 s ohľadom na B .

- b) Položme $B = \{c, e\}$. Potom každý hlavný ideál $L(c) = \{b, c\}$, $L(e) = \{e\}$ je minimálny ľavý ideál podpologrúpy H s ohľadom na B a $\{L(c), L(e)\}$ je B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov podpologrúpy H v S_2 s ohľadom na B . Ľavý hlavný ideál $L(e) = \{e\}$ je aj minimálnym ideálom v S_2 .

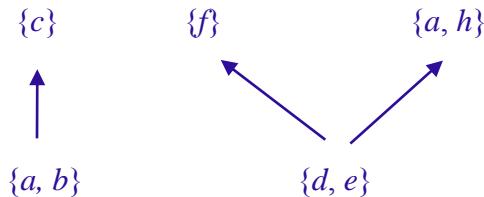
Príklad 3.3. Nech $S_3 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ je pologrupa a binárna operácia \bullet na S_3 je definovaná multiplikačnou tabuľkou:

\bullet	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	d	d	a	d	d
b	b	b	b	e	e	e	e	e
c	a	b	c	e	e	f	e	e
d	a	a	b	d	d	d	d	d
e	b	b	c	e	e	e	e	e
f	a	a	a	e	e	f	e	e
g	b	b	b	d	d	d	g	g
h	b	b	c	e	e	e	h	h

Tab. 4

- a) Položme $B = \{c, f, g, h\} \subset S_3$. Potom

- 1) \mathcal{L} -triedy množiny S_3 / \mathcal{L} a ich usporiadanie sú:

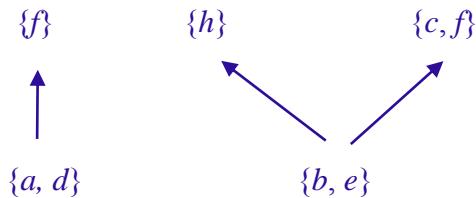


- α) Každý z hlavných ľavých ideálov

$$L(c) = \{a, b, c\}, L(f) = \{d, e, f\}, L(h) = \{d, e, g, h\}$$

je minimálny ľavý ideál pologrupy S_3 s ohľadom na B a $\{L(c), L(f), L(h)\}$
 je maximálny B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov pologrupy S_3 (a tento nie je to úplný B -nezávislý systém).

2) \mathcal{R} -triedy množiny S_3 / \mathcal{L} a ich usporiadanie sú:



β) Každý hlavný pravý ideál

$$R(a) = \{a, d, f\}, R(h) = \{b, d, h\}, L(f) = \{b, c, e, f\}$$

je minimálny pravý ideál pologrupy S_3 s ohľadom na B a

$$\{R(a), R(h), L(f)\}$$

je maximálny B -nezávislý systém hlavných ľavých ideálov v S_3 (a nie je to úplný B -nezávislý systém).

b) $H = \{d, e, f, g, h\}$ je podpologrupa pologrupy S_3 (pozri tab. 3). Položme $B = \{g, h\}$.

Potom :

1) \mathcal{L} -triedy množiny H/\mathcal{L}^H a ich usporiadanie:



$L(h) = \{d, e, f, h\}$ je minimálny ľavý ideál podpologrupy H s ohľadom na B
 (a zrejme nie je minimálnym ľavým ideálom podpologrupy H (a ani pologrupy S_3)).

$\{L(g)\}$ je maximálny B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov podpologrupy H v S_3 .

2) \mathcal{R} -triedy množiny H/\mathcal{R}^H a ich usporiadanie:



$R(g), R(h)$ sú minimálne pravé ideály podpologrupy H s ohľadom na množinu B .

$\{R(g), R(h)\}$ je maximálny úplný B -nezávislý systém pravých hlavných ideálov podpologrupy H v S_3 .

Každý z pravých ideálov $N_1 = \{d, g, e\}, N_2 = \{g, h, e\}$ je maximálny pravý ideál v H s ohľadom na B .

4 Parciálne pravé grupy s ohľadom na množinu

Definícia 4.1. Podpologrupu H pologrupy S nazývame parciálnou pravou grupou s ohľadom na množinu $B \subseteq H$, ak

- (a) H je pravá jednoduchá podpologrupa v S s ohľadom na B .
- (b) $\mathcal{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je maximálny úplne B -nezávislý systém ľavých hlavných ideálov podpologrury H a $H = \cup\{L(b) \mid b \in B\}$.
- (c) $a \in B$ a $b \in H$, potom rovnica $ax = b$ má práve jedno riešenie v H .

Analogicky k definícii 4.1 definujeme parciálnu ľavú podgrupu na H v S s ohľadom na $B \subseteq H$.

Lema 4.1. Nech H je parciálna pravá grupa v S s ohľadom na podmnožinu $B \subseteq H$, $E(B) \neq \emptyset$ a $e \in E(B)$. Potom

- (a) e je ľavou jednotkou podpologrury H v S .
- (b) $E(B)$ je podpologrupa (podpologrury H) pravých ideálov.

Dôkaz. a) Nech $a \in H$ a $e \in E(B)$. Potom podľa predpokladu a lemy 2.1 existuje také $a \in H$, že $ex = a$. Potom $ea = e(ex) = e^2x = ex = a$. Z toho vyplýva pravdivosť tvrdenia v (a).

b) Nech $e, f \in E(B)$. Potom podľa tvrdenia v (a) je $ef = e$. Z toho vyplýva pravdivosť tvrdenia v (b).

Lema 4.2. Nech H je podpologrupa pologrury S a $B \subseteq H$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- (a) H je parciálna pravá podgrupa v S s ohľadom na $B \subseteq H$.
- (b) B je sprava jednoduchá podpologrupa s ohľadom na $B \subseteq H$ a $E(B) \neq \emptyset$.

Dôkaz. I. (a) \Rightarrow (b). Predpokladajme, že platí tvrdenie v (a). Nech $a \in B$. Potom podľa predpokladu existuje taký prvak e , že $ae = a$. Potom $ae^2 = ae = a$. Z toho podľa predpokladu dostaneme, že $e^2 = e$, z čoho vyplýva $E(B) \neq \emptyset$. Z predchádzajúceho (podľa predpokladu) dostaneme pravdivosť tvrdenia (b).

II. Predpokladajme pravdivosť tvrdenia v (b). Potom stačí ukázať, že rovnica $bx = a$ má práve jedno riešenie, ak $a \in H$ a $b \in B$. Podľa predpokladu rovnica $bx = a$ má riešenie práve vtedy, ak $b \in B$ a $a \in H$. V ďalšom ukážeme, že $bx = a$ má práve jedno riešenie, ak $a \in H$ a $b \in B$. Nech $e \in L(b)$ a $b \in B$. Potom podľa predpokladu existuje také $\bar{b} \in B$, že $b\bar{b} \in e$. Položme $f = \bar{b}b$. Potom $f^2 = (\bar{b}b)(\bar{b}b) = \bar{b}(b\bar{b})b = \bar{b}e b = \bar{b}b = f$. To znamená, že $f \in E(B)$. Predpokladajme, že existujú také $x_1, x_2 \in H$ a také $a \in H$ a $b \in B$, že $bx_1 = a$ a $bx_2 = a$. Potom $\bar{b}b x_1 = \bar{b}a$ a $\bar{b}b x_2 = \bar{b}a$, t.j. $\bar{b}b x_1 = \bar{b}b x_2$ a teda $fx_1 = fx_2$. Z toho podľa lemy 3.1 dostaneme, že $x_1 = x_2$. Z predchádzajúcich úvah (a podľa predpokladu) vyplýva pravdivosť tvrdenia (b).

Pravdivosť tvrdenia (b) je priamym dôsledkom tvrdenia (a), t.j. pre každé $e, f \in E(B)$ je $ef = f$.

Veta 4.1. Nech podpologrupa H pologrupy S je parciálna pravá grupa s ohľadom na $B \subseteq H$. Potom platí:

- (a) B je silná podpologrupa podpologrupy H v S .
- (b) $L(b)$ je minimálny ľavý ideál podpologrupy H s ohľadom na B práve vtedy, ak $b \in B$.

Dôkaz. a) Podľa predpokladu a podľa lemy 2.5 B je podpologrupa podpologrupy H v S . Predpokladajme, že existujú také $a, b \in H$, že $ab \in H$ a napr. $a \notin B$ a teda $a \in \bar{B}$. Potom $H = abH \subseteq aH \subseteq H$. Potom $aH = H$, čo je spor.

b) Tvrdenie (b) priamo vyplýva z vety 2.3.

Literatúra

- [1] ABRHAN, I. Poznámka k maximálnym (H_1, H_2) -ideálom v pologrupách.
In *Matematický časopis* 21(1971), No. 3, str. 214-218.
- [2] ABRHAN, I. О максимальных родах в унарных алгебрах. Poznámka
k maximálnym (H_1, H_2) -ideálom v pologrupách. In *Matematický časopis* 24(1974),
str. 113-128.
- [3] ABRHAN, I. On minimal ideals in semigroups with respect to their subsets I.
In *Mathematica Bohemica* 122 (1997), No. 1, str. 1-13.
- [4] ABRHAN, I. On minimal ideals in semigroups with respect to their subsets II.
In *Mathematica Slovaca* 44 (1994), No. 4, str. 463-478.
- [5] ABRHAN, I. O minimálnych ideáloch v pologrupách s ohľadom na ich podmnožiny III.
In *G. Slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, č. 17, roč. 9, 2012, str. 5-26.

doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc.
Silvánska 11, 841 04 Bratislava, SR

doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.
Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: daniela.velichova@stuba.sk

Minimální elipsa ke konečné množině bodů

Milada Kočandrlová, Jarmila Radová

Abstrakt

Ke konečné množině bodů v rovině hledáme elipsu, která má nejmenší obsah. Počet daných různých bodů musí být aspoň tři. Minimální elipsa pro trojici bodů má střed v těžišti trojúhelníka určeného těmito třemi body. Minimální elipsa pro čtveřici bodů je affinním obrazem elipsy svazku kuželoseček určeném kružnicí a dvojicí různoběžek. Minimální elipsu pro množinu o více bodech můžeme určit iterací. Obecný algoritmus je odvozen z vlastností mnohostěnu z pětirozměrného prostoru.

Klíčová slova: Elipsa, množina bodů, minimální obsah, implicitní rovnice, afinita, mnohostěn.

Abstract

We look for an ellipse with minimal area to a finite set of points in the plane. The number of different points must be at least three. The minimal ellipse to three points has its centre in the centre of gravity of the triangle determined by these three points. The minimal ellipse to four points is an affine image of the ellipse of a family of conics determined by a circle and a pair of intersecting lines. The minimal ellipse to a set of more points can be determined by iterations. A general algorithm is derived from the properties of a polyhedron in five dimensional space.

Key words: Ellipse, set of points, minimal area, implicit equation, affinity, polyhedron

Úvod

Mějme v rovině dánu konečnou množinu bodů. Budeme hledat elipsu, opsanou dané množině bodů, a to takovou, aby obsah rovinné oblasti, kterou ohraničuje, byl nejmenší. Takovou elipsu budeme nazývat minimální elipsa. Zřejmě minimální elipsa pro libovolnou konečnou množinu bodů prochází alespoň třemi body dané množiny.

Hledanou elipsu vyjádříme implicitní rovnicí

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0. \quad (1)$$

Potom pro obsah elipsou ohraničené oblasti platí

$$P = \pi ab = \pi \frac{|A|}{A_{00}\sqrt{A_{00}}} ,$$

neboť její poloosy jsou $a = \sqrt{|A|/(A_{00}\lambda_1)}$, $b = \sqrt{|A|/(A_{00}\lambda_2)}$, kde je

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

a λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice determinantu A_{00} . Součin vlastních čísel je roven determinantu A_{00} a ten je pro elipsu vždy kladný, viz [1]. Tak pokud budeme porovnávat obsahy eliptických oblastí, stačí porovnávat druhé mocniny zlomku ve vzorci pro obsah P , tj. výraz

$$p = A^2/A_{00}^3. \quad (2)$$

1 Minimální elipsa pro tři body

Určíme elipsu procházející třemi různými body $X_1[x_1, y_1], X_2[x_2, y_2], X_3[x_3, y_3]$, které neleží v jedné přímce. Střed elipsy bude v těžišti $S = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ trojúhelníka $X_1X_2X_3$.

Pro elipsu je v implicitní rovnici (1) vždy $a_{11}a_{22} \neq 0$, můžeme tudíž zvolit $a_{11} = 1$. Zbývá potom v rovnici (1) určit pět koeficientů. Člen $a_{01}x$, resp. $a_{02}y$ v rovnici (1) představuje posunutí středu elipsy ve směru osy x , resp. osy y , viz [1]. Označíme-li m, n souřadnice středu S , platí pro ně rovnice

$$a_{01} + m + a_{12}n = 0, \quad a_{02} + a_{12}m + a_{22}n = 0,$$

ze kterých vypočítáme dva koeficienty a_{01}, a_{02} za předpokladu znalosti koeficientů a_{12}, a_{22}

$$a_{01} = -m - a_{12}n, \quad a_{02} = -a_{12}m - a_{22}n. \quad (3)$$

Také absolutní člen vyjádříme pomocí koeficientů a_{12}, a_{22} . K jeho určení použijeme např. bod X_1

$$a_{00} = -2a_{01}x_1 - 2a_{02}y_1 - x_1^2 - 2a_{12}x_1y_1 - a_{22}y_1^2.$$

Po dosazení za a_{01}, a_{02} z vyjádření (3) dostáváme

$$a_{00} = -2a_{12}(x_1y_1 - x_1n - y_1m) - a_{22}(y_1^2 - 2y_1n) - x_1^2 + 2x_1m. \quad (4)$$

Koeficienty a_{12}, a_{22} vypočítáme ze soustavy dvou rovnic, které dostaneme, dosadíme-li souřadnice všech tří daných bodů do rovnice (1) a využijeme koeficienty (3) a (4)

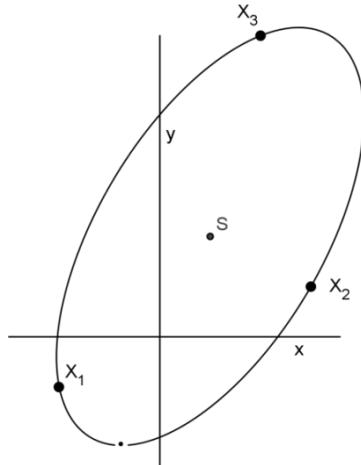
$$\begin{aligned} & 2a_{12}(x_1y_1 - x_3y_3 - n(x_1 - x_3) - m(y_1 - y_3)) + a_{22}(y_1 - y_3)(y_1 + y_3 - 2n) = \\ & = (x_3 - x_1)(x_1 + x_3 - 2m), \\ & 2a_{12}(x_2y_2 - x_3y_3 - n(x_2 - x_3) - m(y_2 - y_3)) + a_{22}(y_2 - y_3)(y_2 + y_3 - 2n) = \\ & = (x_3 - x_2)(x_2 + x_3 - 2m). \end{aligned} \quad (5)$$

Ilustrační příklad: Zvolíme body $X_1[-2, -1], X_2[3, 1], X_3[2, 6]$. Jejich těžiště je bod $S[1, 2]$. Koeficienty implicitní rovnice minimální elipsy, obr. 1, podle (5) jsou řešením soustavy

$$10a_{12} - 7a_{22} = -8, \quad 4a_{12} + 5a_{22} = 1,$$

tj. $a_{12} = -11/26$, $a_{22} = 7/13$. Potom podle (3) a (4) je $a_{01} = -2/13$, $a_{02} = -17/26$ a $a_{00} = -62/13$. Implicitná rovnica minimálnej elipsy a její obsah pre danou trojici bodov po úpravě je

$$13x^2 - 11xy + 7y^2 - 4x - 17y - 62 = 0, P = 6\sqrt{3}\pi.$$



Obr. 1. Minimálna elipsa pro trojici bodů

2 Minimálna elipsa pro čtyři body

Je-li konvexní obal čtveřice bodů

$$X_1[x_1, y_1], X_2[x_2, y_2], X_3[x_3, y_3], X_4[x_4, y_4]$$

trojúhelník, najdeme minimální elipsu podle předchozího postupu. Nechť je tedy konvexním obalem dané čtveřice čtyřúhelník a body jsou umístěny po jeho obvodu za sebou. Místo hledání minimální elipsy pro danou čtveřici X_1, X_2, X_3, X_4 bodů, budeme hledat minimální elipsu pro jejich affinní obraz. Afinitu F zvolíme tak, aby obrazy X'_i bodů X_i ležely na osách souřadnic. Souřadnice obrazů navíc zvolíme tak, že

$$X'_1[x'_1, 0], X'_3[x'_3, 0], X'_2[0, y'_2], X'_4[0, y'_4],$$

kde $x'_1 x'_3 = -1$, $y'_2 y'_4 = -1$.

Je-li některý bod X'_i z čtveřice obrazů vnitřním bodem minimální elipsy, je tato elipsa obrazem minimální elipsy dané čtveřice X_i bodů. Nechť tyto uvedené případy nenastanou, potom minimální elipsa prochází všemi čtyřmi body X'_i . Čtyřmi body je určen svazek kuželoseček a hledaná minimální elipsa bude z tohoto svazku. Svazek kuželoseček určíme kružnicí

$$x'^2 + y'^2 + 2ax' + 2by' - 1 = 0$$

a singulární kuželosečkou $x'y' = 0$. Zde

$$a = -(x'_1 + x'_3)/2, b = -(y'_2 + y'_4)/2.$$

Každou kuželosečku svazku můžeme vyjádřit rovnicí

$$x'^2 + y'^2 + 2tx'y' + 2ax' + 2by' - 1 = 0, t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Rovnicí (6) je dána elipsa, jestliže diskriminant kvadratických členů

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

tj. $t \in (-1,1)$. Pro minimální elipsu musí mít funkce, viz (2),

$$p(t) = A^2(t)/A_{00}^3(t)$$

minimum, tj. derivace podle t musí být nulová. Z toho dostáváme

$$2A'A_{00} - 3AA'_{00} = 0.$$

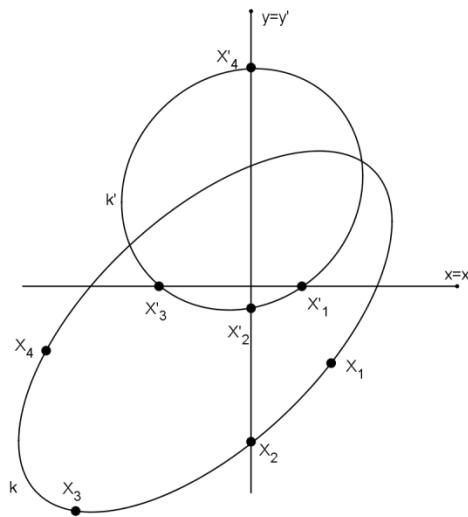
Dosazením koeficientů z rovnice (6) dostaneme kubickou rovnici pro parametr t

$$t^3 + 4abt^2 - t(3a^2 + 3b^2 + 1) + 2ab = 0. \quad (7)$$

To řešení rovnice (7) z intervalu $(-1,1)$, pro které má funkce p minimum, označíme t_0 . Hledaná minimální elipsa ze svazku (6) je potom daná rovnicí

$$x'^2 + y'^2 + 2t_0x'y' + 2ax' + 2by' - 1 = 0. \quad (8)$$

Hledaná minimální elipsa pro čtveřici bodů X_i je potom obrazem elipsy (8) v inverzní afinitě k afinitě F . Více o afinitě uvedeme v odstavci 9. Na obr. 2 je ilustrativní příklad.



Obr. 2. Minimální elipsa pro čtveřici bodů

3 Odhad koeficientů v rovnici minimální elipsy

Výpočet koeficientů rovnice (1) již v předchozím odstavci byl početně náročný, proto je na místě zabývat se jejich odhadem. Předpokládejme, že elipsa má střed $S[m, n]$, odchylka její

hlavní osy od osy x je $\varphi \in (0, \pi)$, velikosti poloos jsou a, b . Potom rovnici této elipsy můžeme psát ve tvaru

$$\frac{1}{a^2}[(x-m)\cos\varphi + (y-n)\sin\varphi]^2 + \frac{1}{b^2}[-(x-m)\sin\varphi + (y-n)\cos\varphi]^2 = 1.$$

Vypočítáme koeficienty u mocnin proměnných x, y a označíme je b_{ij} :

$$b_{11} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{b^2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}.$$

Označíme-li $\alpha = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ a $\beta = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$, potom

$$b_{11} = \frac{1}{2}(\alpha - \beta \cos 2\varphi). \quad (9)$$

Postupně dostaneme pro další koeficienty

$$b_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin 2\varphi = -\frac{1}{2}\beta \sin 2\varphi, \quad (10)$$

$$b_{22} = \frac{1}{a^2}\sin^2\varphi + \frac{1}{b^2}\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta \cos 2\varphi), \quad (11)$$

$$b_{01} = -m\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi\right) - n\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin 2\varphi = -mb_{11} - nb_{12}, \quad (12)$$

$$b_{02} = -n\left(\frac{1}{a^2}\sin^2\varphi + \frac{1}{b^2}\cos^2\varphi\right) - m\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin 2\varphi = -mb_{12} - nb_{22}, \quad (13)$$

$$b_{00} = m^2b_{11} + 2mn b_{12} + n^2b_{22} - 1. \quad (14)$$

V rovnici elipsy předpokládáme $a_{11} = 1$. Potom ostatní koeficienty jsou $a_{ij} = \frac{b_{ij}}{b_{ii}}$, $i, j = 0, 1, 2, i \leq j$. Pokud to je minimální elipsa k dané množině \mathbf{X} bodů $X_i[x_i, y_i]$, $i = 1, \dots, n$, platí pro její poloosy a, b nerovnosti

$$\frac{d}{2} \leq a \leq \frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{h}{2} \leq b \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{d}{h\sqrt{2}} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{d\sqrt{2}}{h}, \frac{h}{d\sqrt{2}} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{h\sqrt{2}}{d}, \quad (15)$$

kde d je průměr množiny \mathbf{X} a h je nejmenší ze vzdáleností opěrných přímek množiny \mathbf{X} ronoběžných s osou x . Pro souřadnice m, n středu elipsy platí

$$|m| \leq \frac{d}{3}, |n| \leq \frac{h}{3}.$$

Označíme-li $\delta = h/d\sqrt{2}$, potom poslední z nerovností (15) má tvar

$$\delta \leq b/a \leq 2\delta.$$

Toho nyní využijeme k odhadu koeficientů (9) až (14)

$$\frac{1}{a^2} \leq b_{11} \leq \frac{1}{b^2},$$

$$|a_{12}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta^2} - 1\right),$$

$$\delta^2 \leq a_{22} \leq \frac{1}{\delta^2},$$

$$|a_{01}| \leq \frac{1}{3} \left(d + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\delta^2} - 1 \right) \right),$$

$$|a_{02}| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{d}{2} \left(\frac{1}{\delta^2} - 1 \right) + \frac{h}{\delta^2} \right),$$

$$-\frac{d^2}{2} \leq a_{00} \leq 0.$$

Určené odhady koeficientů využijeme pro numerické řešení problému a nalezení obecného algoritmu pro minimální elipsu k dané množině bodů.

4 Numerické řešení pro minimální elipsu

Pro hledanou elipsu zvolíme jako parametry souřadnice m, n středu, poloosy a, b a odchylku $\varphi \in (0, \pi)$ hlavní osy od osy x . Pro zvolené parametry určíme intervaly. Z daných bodů $X_i[x_i, y_i], i = 1, \dots, n$, určíme odhadы pro souřadnice středu. Označíme

$$m_1 = \min\{x_i, i = 1, \dots, n\}, m_2 = \max\{x_i, i = 1, \dots, n\},$$

$$n_1 = \min\{y_i, i = 1, \dots, n\}, n_2 = \max\{y_i, i = 1, \dots, n\}.$$

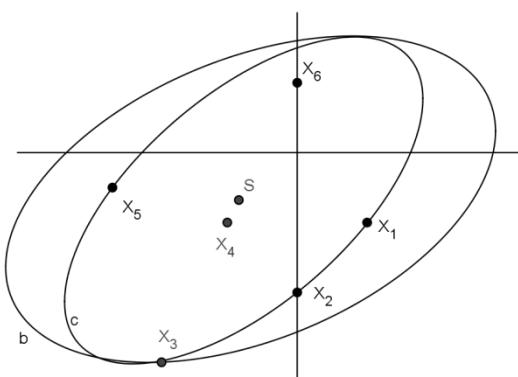
Potom platí

$$\frac{1}{3}(2m_1 + m_2) \leq m \leq \frac{1}{3}(m_1 + 2m_2), \quad \frac{1}{3}(2n_1 + n_2) \leq n \leq \frac{1}{3}(n_1 + 2n_2).$$

Dále platí $\frac{h}{d\sqrt{2}} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{h\sqrt{2}}{d}$, viz (15). Pro jednotlivé body X_i dané množiny \mathbf{X} určíme hodnoty

$$c_i = \lambda_i [(x_i - m) \cos \varphi + (y_i - n) \sin \varphi]^2 + [-(x_i - m) \sin \varphi + (y_i - n) \cos \varphi]^2,$$

jejich maximum c a příslušné λ . Pro hledanou elipsu jsou poloosy $a = \frac{\sqrt{c}}{\lambda}$, $b = \sqrt{c}$ a plocha je $P = \pi c / \lambda$. Získanou elipsu transformujeme tak, aby všechny dané body ležely v elipse a aspoň jeden bod ležel na elipse, ilustrativní obr. 3, kde c je přesné řešení, b je iterační elipsa.



Obr. 3. Numerické řešení pro minimální elipsu

5 Minimální elipsa pro n bodů – obecné řešení

Každá kuželosečka je vyjádřena kvadratickou rovnicí (1), kde budeme předpokládat $a_{11} = 1$. Potom na pětici koeficientů

$$\alpha = (a_{12}, a_{22}, a_{01}, a_{02}, a_{00}) \quad (16)$$

můžeme nahlížet jako na bod pětirozměrného prostoru \mathbb{R}^5 , také naopak každý bod z \mathbb{R}^5 určuje kuželosečku. Bod $X_i[x_i, y_i] \in \mathbb{R}^2$ je bodem kuželosečky, s koeficienty (16), jestliže

$$x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_{01}x_i + 2a_{02}y_i + a_{00} \leq 0. \quad (17)$$

Nerovnicí (17) je určen poloprostor prostoru \mathbb{R}^5 . Všechny elipsy, které obsahují bod X_i , leží v poloprostoru \mathbb{R}^5 určeném nerovnicí (17). Máme-li dány body X_1, X_2, \dots, X_n , ke kterým hledáme minimální elipsu, bude tato elipsa ležet v průniku poloprostorů (17). (Souřadnice bodů α vyhovují nerovnostem z odstavce 3.) Průnikem poloprostorů (17) je určen n -stěn. Hledaná elipsa, která prochází alespoň třemi různými body X_i , viz odstavec 2, bude na n -stěnu buď ve vrcholu, nebo na hrani, nebo na dvourozměrné stěně. Protože tento n -stěn by mohl být i neomezený, přidáme dalších deset nadrovin, které budou určeny podmínkami $c_{ij} \leq a_{ij} \leq d_{ij}$ z odstavce 3. Rovnice nadrovin, označíme je ρ_i , $i = 1, \dots, 10$, jsou např.

$$\alpha_1 = c_{12}, \alpha_2 = c_{22}, \alpha_3 = c_{01}, \alpha_4 = c_{02}, \alpha_5 = c_{00},$$

$$\alpha'_1 = d_{12}, \alpha'_2 = d_{22}, \alpha'_3 = d_{01}, \alpha'_4 = d_{02}, \alpha'_5 = d_{00}. \quad (18)$$

Nadroviny (17) a (18) určují v prostoru \mathbb{R}^5 $(10+n)$ -stěn, který označíme **M**.

6 Vlastnosti mnohostěnu M z \mathbb{R}^5

Vrcholů mnohostěnu **M** je 32, viz tabulka 1. V prvním řádku tabulky 1 jsou čísla vrcholů, v dalších řádcích jsou souřadnice vrcholů. Např. první dva vrcholy mají souřadnice

$$(c_{12}, c_{22}, c_{01}, c_{02}, c_{00}), (c_{12}, c_{22}, c_{01}, c_{02}, d_{00}).$$

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{21}{22}$	$\frac{23}{24}$	$\frac{25}{26}$	$\frac{27}{28}$	$\frac{29}{30}$	$\frac{31}{32}$
c_{12}	d_{12}	d_{12}													
c_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}
c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}
c_{02}	d_{02}	c_{02}	d_{02}												
$\frac{c_{00}}{d_{00}}$															

Tabulka 1. Třicet dva vrcholů mnohostěnu **M**

Z každého vrcholu vychází pět hran. Celkový počet hran je tedy osmdesát, viz tabulky 2. V 1. řádku tabulek je číslo hrany, v 6. řádku jsou čísla krajních vrcholů hrany, v 7. řádku jsou

čísla nadrovin, které hranou procházejí, v 8. řádku jsou čísla dvourozměrných stěn (viz tabulka 4).

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
c_{12}	d_{12}														
c_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}
c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}												
c_{02}	d_{02}														
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
13	13	13	13	14	14	14	14	23	23	23	23	24	24	24	24
57	58	67	68	57	58	67	68	57	58	67	68	57	58	67	68
1	1	2	2	3	3	4	4	8	8	7	7	6	6	5	5
9	10	9	10	11	11	11	12	16	15	16	15	14	13	14	1
17	18	19	20	17	23	19	20	24	23	22	21	24	23	22	21
49	50	51	52	56	55	78	53	49	50	51	52	56	55	54	53

17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.
c_{12}	d_{12}														
c_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}
c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}
c_{00}	d_{00}														
1	2	5	6	9	10	13	14	17	18	21	22	25	26	29	30
3	4	7	8	11	12	15	16	19	20	23	24	27	28	31	32
13	13	13	13	14	14	14	14	23	23	23	23	24	24	24	24
5	5	6	6	5	5	6	6	5	5	69	6	59	5	6	6
9	10	10	8	9	10	9	10	9	10	10	10	10	9	10	10
1	1	2	2	3	3	4	4	8	8	7	7	6	6	5	5
25	26	25	26	27	28	27	28	32	31	32	31	30	29	30	29
3	34	35	36	33	34	35	36	40	39	38	37	40	39	38	37
57	58	59	60	64	63	62	61	57	58	59	60	64	63	62	61

33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.
c_{12}	d_{12}														
c_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}
c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	d_{02}
c_{00}	d_{00}														
1	2	3	4	9	10	11	12	17	18	19	20	25	26	27	28
5	6	7	8	13	14	15	16	21	22	23	24	29	30	31	32
13	13	13	13	14	14	14	14	23	23	23	23	24	24	24	24
7	7	8	8	7	7	8	8	79	7	8	8	7	7	8	8
9	10	9	10	9	10	9	10	10	9	10	9	10	9	10	10
9	9	10	10	11	11	12	12	16	16	15	15	14	14	13	13
25	26	25	26	27	28	27	28	32	31	32	31	30	29	30	31
41	42	43	44	41	42	43	44	48	47	46	45	48	47	46	45
65	66	67	68	72	71	70	69	65	66	67	68	72	71	70	69

49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.	61.	62.	63.	64.
c_{12}	d_{12}														
c_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}
c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	d_{02}	d_{02}
c_{00}	d_{00}														
1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16	17, 25	18, 26	19, 27	20, 28	21, 29	22, 30	23, 31	24, 32
15 7 9	15 8 10	15 8 9	16 7 10	16 8 9	16 8 10	16 7 9	16 8 10	25 7 9	25 7 10	25 8 9	25 7 10	26 7 9	26 8 10	26 8 10	26 8 10
17, 33, 41, 73	17, 33, 42, 74	18, 33, 43, 75	18, 34, 44, 76	19, 35, 41, 80	20, 36, 44, 77	20, 35, 43, 78	20, 36, 44, 77	24, 40, 48, 73	24, 39, 47, 74	23, 40, 46, 75	23, 39, 45, 76	22, 38, 48, 80	22, 37, 47, 79	21, 38, 46, 78	21, 37, 45, 77

65.	66.	67.	68.	69.	70.	71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}							
c_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}
c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}
c_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}												
1 17	2 18	3 19	4 20	5 21	6 22	7 23	8 24	9 25	10 26	11 27	12 28	13 29	14 30	15 31	16 32
35 7 9	35 7 10	35 8 9	35 8 10	36 7 9	36 7 10	36 8 9	36 8 10	45 7 9	45 7 10	45 8 9	45 8 10	46 7 9	46 7 10	46 8 9	468 10
49, 57, 65, 73	49, 58, 66, 74	50, 57, 67, 75	50, 58, 68, 76	51, 59, 65, 80	51, 60, 66, 79	52, 59, 67, 78	52, 60, 68, 77	56, 64, 72, 73	56, 63, 71, 74	55, 63, 70, 75	55, 62, 69, 76	54, 61, 72, 80	53, 62, 71, 79	53 61 69 77	

 Tabulka 2. Osmdesát hran mnohostěnu \mathbf{M}

Pětice hran v každém vrcholu je v tabulce 3. V 1. řádku tabulky je číslo vrcholu. Pod každým vrcholem jsou čísla hran vrcholem procházejících.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
17	18	17	18	19	20	19	20	21	22	21	22	23	24	23	24
33	34	35	36	33	34	35	36	37	38	39	40	37	38	39	40
49	50	51	52	53	54	55	56	49	50	51	52	53	54	55	56
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.
9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16
25	26	25	26	27	28	27	28	29	30	29	30	31	32	31	32
41	42	43	44	41	42	43	44	45	46	47	48	45	46	47	48
57	58	59	60	61	62	63	64	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

 Tabulka 3. Pětice hran z třicetidvou vrcholů mnohostěnu \mathbf{M}

Průnikem tří nadrovin jsou dvourozměrné stěny mnohostěnu **M**, je jich osmdesát, viz. tabulky 4. V 1. řádku je číslo stěny, v 5. řádku jsou čísla nadrovin. V 6. řádku jsou čísla hran ve stěně.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}
c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{22}	c_{22}
c_{01}	d_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{02}	c_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{02}	d_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	d_{02}	c_{02}
1 3 5	1 3 6	1 4 5	1 4 6	2 4 6	2 4 5	2 3 6	2 3 5	1 3 7	1 3 8	1 4 7	1 4 8	2 4 8	2 4 7	2 3 8	2 3 7
1 17 2 18	3 19 4 20	5 21 6 22	7 23 8 24	15 31 16 32	13 29 14 30	11 27 12 28	9 25 10 26	1 33 3 34	2 35 4 36	5 37 7 38	6 39 8 39	14 47 16 48	15 45 13 46	12 43 10 44	11 41 9 42

17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.
c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}
c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{22}	c_{22}
c_{02}	d_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	d_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}
1 5 7	1 5 8	1 6 7	1 6 8	2 6 8	2 6 7	2 5 8	2 5 7	1 3 9	1 3 10	1 4 9	1 4 10	2 4 10	2 4 10	2 3 9	2 3 10
1 49 5 50	2 51 6 52	3 53 7 54	4 55 8 56	12 63 16 64	15 61 11 62	10 59 14 60	9 57 13 58	17 33 19 35	18 34 20 36	21 37 23 39	22 38 24 40	30 48 32 46	29 45 31 47	26 42 28 44	25 41 27 43

33.	34	35.	36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.
c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	c_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}	d_{12}
c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}
c_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	c_{00}	c_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	c_{00}
1 5 9	1 5 10	1 6 9	1 6 10	2 6 10	2 6 9	2 5 10	2 5 9	1 7 9	1 7 10	1 8 9	1 8 10	2 8 10	2 8 9	2 7 10	2 7 9
17 49 21 51	18 50 22 52	19 53 23 55	20 54 24 56	28 62 32 64	27 61 31 63	26 58 25 59	29 57 49 53	37 33 49 53	38 34 50 54	35 39 51 55	36 52 56 40	60 48 64 44	43 48 64 59	46 47 63 58	45 41 61 57

49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.	61.	62.	63.	64.
c_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}
c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	c_{01}	c_{01}
c_{02}	d_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	c_{00}
3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4
5	5	6	6	6	6	5	5	5	6	6	6	6	5	5	5
7	8	7	8	8	7	8	7	9	10	9	10	10	9	10	9
1	2	3	4	8	15	6	5	17	18	19	20	24	23	22	21
65	67	69	71	79	77	75	73	65	66	69	70	78	77	74	73
9	10	11	12	16	7	14	13	25	26	27	28	32	31	30	29
66	68	70	72	80	78	76	74	67	68	71	72	80	79	76	75

65.	66.	67.	68.	69.	70.	71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
c_{22}	c_{22}	c_{22}	c_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	d_{22}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	c_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}	d_{01}
c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	c_{02}	c_{02}	d_{02}	d_{02}	d_{02}	c_{02}	c_{02}	c_{02}
c_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	d_{00}	c_{00}	d_{00}	c_{00}	c_{00}
3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
7	7	8	8	8	8	7	7	7	7	8	8	8	7	7	7
9	10	9	10	10	9	10	9	9	10	9	10	10	9	10	9
41	34	35	36	48	39	46	37	49	74	59	60	64	63	62	61
65	66	67	72	76	47	78	77	65	66	67	52	72	71	54	53
33	42	43	44	40	75	44	45	57	50	51	68	56	55	70	69
69	70	71	68	80	79	38	73	73	58	75	76	80	79	78	77

 Tabuľka 4. Osmdesať dvouozmerných stien mnohostenu \mathbf{M}

7 Konstrukce mnohostenu \mathbf{M}

Mnohosten \mathbf{M} budeme konstruovať z desetistenu \mathbf{M}_0 , určeného nadrovinami ρ_1, \dots, ρ_{10} , viz (18), tj. nadrovinami

$$\alpha_1 = c_{12}, \alpha_2 = c_{22}, \alpha_3 = c_{01}, \alpha_4 = c_{02}, \alpha_5 = c_{00},$$

$$\alpha'_1 = d_{12}, \alpha'_2 = d_{22}, \alpha'_3 = d_{01}, \alpha'_4 = d_{02}, \alpha'_5 = d_{00},$$

pomocí posloupnosti mnohostenů $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$, kde \mathbf{M}_{i+1} bude průnik mnohostenu \mathbf{M}_i s poloprostorem (17) určeném bodem X_i , $i = 1, \dots, n$, tj.

$$x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_{01}x_i + 2a_{02}y_i + a_{00} \leq 0. \quad (19)$$

Lineárni funkci v nerovnici (19) označíme f a hraniční nadrovinu označíme ρ_{10+k} , $k = 1, \dots, n$. Pro mnohosten \mathbf{M}_1 a nadrovinu ρ_{11} : $f(X_1) = 0$ budeme současně upravovat (vyškrtaťat) v tabulkách vrcholů, hran a stien. Ty body β , pro které je $f(\beta) > 0$, z tabulky 1 vyškrtajme. Hrany, které prochází takovým bodem β a pro jejichž druhý koncový bod δ je $f(\delta) > 0$, vyškrtajme z tabulky 2. Zároveň tyto hrany vyškrtajme v tabulkách 3 i 4. Ty steny, které potom nebudou mít odkazy na hranu, z tabulky 4 vyškrtajme též.

Po hrano $\beta\delta$, $f(\beta) > 0$ a $f(\delta) < 0$, určíme nový krajní bod jako průsečík β' úsečky $\beta\delta$ s nadrovinou $f(X_1) = 0$ (symbolická rovnice pro průsečík), tj.

$$\beta' = \frac{f(\beta)\delta - f(\delta)\beta}{f(\beta) - f(\delta)}.$$

Bod β' přidáme do tabulky 1 a ke všem hranám místo bodu β . V tabulce stěn upravíme hrany, ve stěně zůstanou dvě, ke třem nadrovinám tam připíšeme další nadrovinu ρ_{11} .

Postup zopakujeme pro další mnohostěny posloupnosti až do $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}$. Potom začneme postupně probírat upravené tabulky a hledat minimální elipsu.

8 Minimální elipsa na dvourozměrné stěně mnohostěnu M

Z tabulky 4 vybereme stěnu, která je průnikem tří nadrovin z nadrovin ρ_{10+k} , $k = 1, \dots, n$. K odpovídajícím třem bodům nadrovin určíme minimální elipsu podle odstavce 2. Její koeficienty označíme a_{ij} a vypočítáme číslo $p = A^2/A_{00}^3$.

Ve stěně zůstaly dvě hrany, každou hranou prochází čtyři stěny a čtyři nadroviny. Ve druhé tabulce vyhledáme tu hranu, u které je jako čtvrtá nadrovnina některá z nadrovin ρ_{10+k} , různá od nadrovin stěny. Pro odpovídající bod X_k vypočítáme číslo

$$c = x_k^2 + 2a_{12}x_ky_k + a_{22}y_k^2 + 2a_{01}x_k + 2a_{02}y_k + a_{00}.$$

Je-li $c \leq 0$, označíme tuto hranu ve 2. tabulce. Je-li $c > 0$, přejdeme k další stěně.

Je-li čtvrtá nadrovnina ρ_k , $k \leq 10$, zjistíme, zda pro souřadnice hrany platí nerovnosti $c_{ij} \leq a_{ij}$ nebo $a_{ij} \leq d_{ij}$. V kladném případě hranu v tabulce 2 označíme a vyšetřujeme druhou hranu.

Nejsou-li nerovnosti splněny, přejdeme k další stěně.

Pokud jsou vyšetřené obě hrany s kladným výsledkem, tj. bez přechodu k další stěně, určují koeficienty a_{ij} minimální elipsu množiny \mathbf{X} . Vypočítáme číslo $p = A^2/A_{00}^3$.

Jestliže jsme minimální elipsu nenašli na žádné stěně, hledáme elipsu na hranách z tabulky 2.

9 Minimální elipsa na hraně mnohostěnu M

Hranou prochází čtyři nadroviny. Vybíráme ty hrany, u kterých jsou uvedeny nadroviny ρ_{10+k} . Odpovídající čtyři body očíslovujeme po obvodu jejich konvexního obalu proti chodu hodinových ručiček. To uděláme tak, že označíme X_1 bod o nejmenší x -ové souřadnici. Bod X_1 a bod o největší x -ové souřadnici určují přímku p . Rozlišíme tři případy:

1. Přímka $p = X_1X_3$ odděluje body X_2, X_4 .
2. Body X_2, X_3 leží pod přímkou $p = X_1X_4$.
3. Body X_3, X_4 leží nad přímkou $p = X_1X_2$.

Označíme $P[p, q]$ průsečík přímek X_1X_3 a X_2X_4 . Nyní zvolíme soustavu souřadnic jako v odstavci 2 a použijeme afinitu F . Rozlišíme dva případy:

a) Pro $\max(|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|) = |x_3 - x_1|$ položíme

$$u_1 = \sqrt{(x_3 - p)(p - x_1)}, v_1 = u_1 \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Pro $\max(|x_4 - x_2|, |y_4 - y_2|) = |x_4 - x_2|$ položíme

$$u_2 = \sqrt{(x_4 - p)(p - x_2)}, v_2 = u_2 \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}.$$

Potom je

$$a = \frac{1}{2u_1}(2p - x_1 - x_3), b = \frac{1}{2u_2}(2p - x_2 - x_4).$$

b) Pro $\max(|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|) = |y_3 - y_1|$ položíme

$$v_1 = \sqrt{(y_3 - q)(q - y_1)}, u_1 = v_1 \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}.$$

Pro $\max(|x_4 - x_2|, |y_4 - y_2|) = |y_4 - y_2|$ položíme

$$v_2 = \sqrt{(y_4 - q)(q - y_2)}, u_2 = v_2 \frac{x_4 - x_2}{y_4 - y_2}.$$

Potom je

$$a = \frac{1}{2v_1}(2q - y_1 - y_3), b = \frac{1}{2v_2}(2q - y_2 - y_4).$$

Kubická rovnice (7) pro t je

$$t^3 + 4abt^2 - t(3a^2 + 3b^2 + 1) + 2ab = 0.$$

Pro řešení $t \in (-1,1)$ má obraz minimální elipsy rovnici, viz (8)

$$x'^2 + y'^2 + 2tx'y' + 2ax' + 2by' - 1 = 0.$$

Pro její obsah určíme číslo $p(t) = A^2(t)/A_{00}^3(t)$.

Hledaná minimální elipsa pro čtverici bodů X_i je potom obrazem elipsy (8) v inverzní afinitě k afinitě F . Ta je dána maticí

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & u_1 & u_2 \\ q & v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

a příslušné číslo $p = p(t)(u_1v_2 - u_2v_1)^2$.

Nemá-li kubická rovnice (7) řešení, přejdeme k další hraně. Projdeme-li všechny hrany přejdeme k tabulce 1 pro vrcholy.

10 Minimální elipsa ve vrcholech mnohostěnu M

Pro vrchol $\alpha = (b_{12}, b_{22}, b_{01}, b_{02}, b_{00})$ zjistíme, diskriminant $D = b_{22} - b_{12}^2$. Je-li $D < 0$, přejdeme k dalšímu vrcholu. Je-li $D > 0$, vypočítáme číslo

$$p = \frac{1}{(b_{22}-b_{12}^2)^3} \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & b_{11} & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}^2.$$

Bod, pro který je p minimální, určuje minimální elipsu o rovnici

$$x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}x^2 + 2b_{01}x + 2b_{02}y + b_{00} = 0.$$

Z implicitní rovnice elipsy pak můžeme určit její střed, poloosy i sklon hlavní osy. V odstavcích 8.-10. jsme vytypovali lokální minimální elipsy k množině \mathbf{X} . Minimální elipsa bude ta z nalezených elips, pro kterou bude číslo p minimální.

Závěr

Řešení minimální elipsy pro trojici a čtveřici bodů je využito v algoritmu pro obecné řešení. Na každou elipsu můžeme nahlížet jako na bod v prostoru \mathbb{R}^5 , tj. uspořádanou pěticí koeficientů z implicitní rovnice elipsy. Pro tyto koeficienty jsou určeny dolní a horní odhadové, které jsou využity jednak pro numerické řešení problému a jednak pro určení desetistěnu v \mathbb{R}^5 . Desetistěn je základem pro mnohostěny, na kterém může být hledaná elipsa buď ve vrcholu, nebo na hraniční, nebo na dvourozměrné stěně.

Poděkování: Článek vznikl v rámci grantu GAČR 16-21506S, IP100040.

Literatura

- [1] SEKANINA, M. a kol. *Geometrie II*, SPN, 1988.

doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.

Bankovní institut vysoká škola, a.s.

Nárožní 2600/9, 158 00 Praha 5, Česká republika

e-mail: kocandrlova@hotmail.cz

doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D.

Vysoká škola ekonomická

nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3, Česká republika

e-mail: radova@vse.cz

Hermite interpolation of ruled surfaces and channel surfaces

Boris Odehnal

Abstrakt

Článok opisuje algebraický prístup ku interpolácii Hermitovských dát pre priamkové a kanálové plochy, výpočtom polynomických krviek na PLÜCKERovej a LIEovej kvadrike, ktoré slúžia ako bodové modely priamkových a sférických geometrií. Bézierova konfigurácia krvky na každej z týchto kvadrík obsahuje isté modelovacie parametre ovplyvňujúce tvar priamkových a kanálových plôch. Tieto parametre je potrebné určiť ako riešenie sústavy algebraických rovníc. Keďže počet parametrov danej konfigurácie je väčší ako počet rovníc, získame istý stupeň voľnosti, ktorý sa dá využiť v procese návrhu. Stupeň rovníc určujú počet riešení. Okrem daných geometrických podmienok, môže potom vybrané riešenie spĺňať napr. aj potrebné praktické požiadavky. Hlavným cieľom je interpolácia G^k dát na hraniciach priamkových alebo kanálových plôch. Zameriavame sa najmä na udržanie nízkeho stupňa interpolantov.

Kľúčové slová: interpolácia, Hermitovské dátá, priamková plocha, kanálová plocha, PLÜCKERova kvadrika, LIEova kvadrika, racionálna krvka.

Abstract

We show an algebraic way to interpolate Hermite data of ruled or channel surfaces by computing polynomial curves within PLÜCKER's and LIE's quadric serving as point models for the geometries of lines and spheres. The Bézier ansatz for a curve in either quadric involves some design parameters guiding the shape of the ruled or channel surface. These parameters are to be determined by solving a system of algebraic equations. Since in our ansatz there are more shape parameters than equations, there are some degrees of freedom which can be used in the design process. The degrees of the equations allow us to predict the number of possible solutions. Together with geometric criteria, useful solutions, i.e., solutions that meet practical requirements can be selected. Our main goal is the interpolation of G^k data at the boundaries of ruled surfaces or channel surfaces. We aim at low degree interpolants.

Keywords: interpolation, Hermite data, ruled surface, channel surface, PLÜCKER's quadric, LIE's quadric, rational normal curve.

MSC (AMS 2010): 97N50, 53A25, 53A99, 53B99, 68W30, 14J26, 51N15.

1 Introduction

There are several algorithms treating interpolation problems with ruled surfaces. Many algorithms focus on developable ruled surfaces, see [14, 18, 19, 29]. In some cases, interpolation of ruled surfaces solves reconstruction tasks and comes along with surface recognition [27, 28].

The most simple case sees a finite sequence of lines that is to be interpolated by a ruled surface, cf. [14, 15, 18, 19, 23, 29]. A polynomial ruled surface that passes through the given lines could also be found with the algorithm presented in [8] by replacing the hypersphere with Plücker's quadric. For practical reasons this may be not sufficient, since a ruled surface that just interpolates a certain number of lines has to be of sufficiently high degree. Therefore, the interpolant will show some unwanted behavior in between the data lines, for example, uncontrolled oscillation or even loops, see Fig. 1. Such a nasty behavior especially occurs when we interpolate data with algebraic ruled surfaces of very high degree.

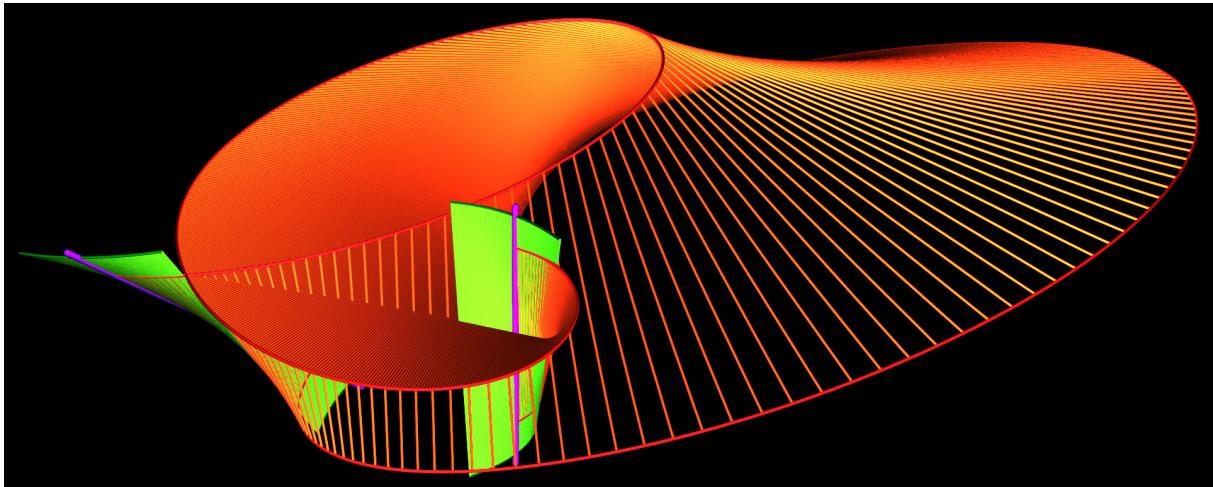


Fig. 1. Interpolation of G^2 data: The depicted solution interpolates G^2 data consisting of two osculating reguli \mathcal{O}_P and \mathcal{O}_Q (green) at the boundary rulings P and Q (violet). The solution has a loop and self-intersections in between the boundary data due to the high degree and due to improperly chosen shape parameters.

The interpolation with non-torsal ruled surfaces is only treated in the G^1 case until now, see [26]. In order to glue ruled surface patches with G^1 continuity, it is suggested to adapt the bi-arcs technique as known from planar splines to ruled quadrics by matching contact projectivities along common generators. This resulted in bi-arcs of ruled quadrics and has, however, two disadvantages: 1. An intermediate line has to be inserted. 2. The degree of the interpolants is restricted to two, and thus, torsal rulings or inflection rulings cannot be interpolated properly.

In the following, we shall drop the restrictions on the degree. However, we do not want to raise the degrees of the interpolants too far. Oscillations as can be observed with polynomial functions also occur with algebraic ruled or channel surfaces of higher degree (cf. Fig. 1). Therefore, we shall use the lowest possible degrees in order to solve certain interpolation problems.

The equivalent interpolation problem for channel surfaces has been attacked using the cyclo-graphic model of sphere geometry in [2]. However, this approach ignores that on the way from the cyclo-graphic model back to the channel surface in \mathbb{R}^3 one degree of smoothness gets lost when differentiating in order to get the envelope (=channel surface) of the one-parameter family of spheres.

As we shall see in Sec. 3, the interpolation of G^1 data on quadrics can be done by means of cubic curves in general. Raising the degree of the G^1 interpolant to four could either lead to more flexibility (since there is one more control point) or to more precision (since the control

points can be determined such that we gain a C^1 transition). We shall discuss this in more detail in Sec. 5. However, in this case we have no guarantee for real solutions.

Interpolation of G^2 and G^3 data is more fascinating, challenging, and perhaps of more practical relevance since higher smoothness of interpolants makes them useful for many design purposes. A G^3 transition between two surfaces is highly desirable. Shiny surfaces composed of G^3 patches show reflection lines and isophotes with G^2 smoothness at the transition curves, see Fig. 2.

Until now, we have put emphasis on the interpolation of ruled surface data in \mathbb{R}^3 . An old and well-known result from classical geometry states that the geometry of lines in three-space is more or less the same as the geometry of spheres in Euclidean three-space, see [5, 31, 32]. Both geometries are four-dimensional and can be modeled on quadrics as we shall see in Sec. 2.

Thus, interpolation problems in both geometries can be reformulated as interpolation problems in quadrics. Although there are algorithms for such tasks, see for example [6, 7, 8, 11], we go a different way in order to find exact polynomial parametrizations of the interpolants with lowest algebraic degree. Inserting the polynomial representation (preferably, the Bézier representation) into the quadric's equation results in a polynomial that has to vanish for all parameter values. Therefore, all the polynomial's coefficients have to vanish and this yields a system of polynomial equations. This allows us to determine the control points of the polynomial interpolant. The interpolation by means of developable ruled surfaces can also be done this way. We just have to impose further algebraic conditions on the Bézier representation of the interpolants and the endpoint data has to fulfill some conditions.

In Sec. 2, we collect all necessary facts on line and sphere geometry in order to make the computations understandable. The various kinds of contacts between two ruled or channel surfaces shall be explained roughly. For details we refer to the classical literature. The geometry of spheres and channel surfaces can be treated in a similar way. Sec. 2 also provides an overview on the geometry of spheres and channel surfaces. In Sec. 3, we study Bézier curves in quadrics and treat the *line geometric* and the *sphere geometric* case in a uniform way. This enables us to give the algebraic systems of equations that have to be solved in order to compute the interpolants to given boundary data for ruled surfaces as well as for channel surfaces. Sec. 4 describes the algorithms and collects the main results. We give examples and show how the presented interpolation technique works. Finally, we conclude in Sec. 5 and add some more material. We discuss alternative approaches to the various interpolation problems.

2 KLEIN's quadric and LIE's quadric

We deal with lines and spheres in the Euclidean three-space \mathbb{R}^3 where we use Cartesian coordinates (x, y, z) . Whenever necessary, we switch to the complex extension and to the projective closure.

2.1 Line geometry

We give just a very brief overview and results as far as they are necessary in order to understand the computations and considerations. For details, we refer to the classical literature, such as [10, 11, 22, 30, 31, 32, 33].

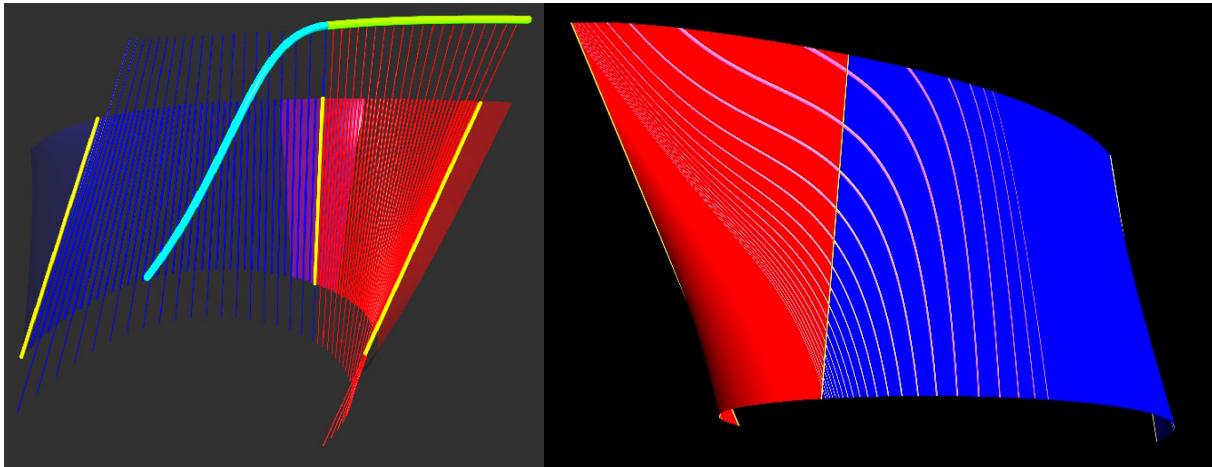


Fig. 2. At a G^3 transition between two ruled surface patches, even the curve of flecnodes (only one branch is shown) turns out to be at least of smoothness G^0 (left: discrete version with curve of flecnodes; right: smooth surface patches with some reflection lines showing a G^2 link at the transition from one patch to the other).

A straight line $L \subset \mathbb{R}^3$ shall be represented by its Plücker coordinates $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{\mathbf{o}\}$ ¹ where $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$ is a *direction vector* and $\bar{\mathbf{l}} = (l_4, l_5, l_6) \in \mathbb{R}^3$ is the line's *momentum vector*. Assume that the line L is spanned by two different points P and Q with Cartesian coordinate vectors \mathbf{p} and \mathbf{q} . Then, we write $L = [P, Q]$ and the Plücker coordinates are given by

$$\mathbf{l} = \mathbf{q} - \mathbf{p}, \quad \bar{\mathbf{l}} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (1)$$

where $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ indicates the canonical exterior product of vectors in \mathbb{R}^3 induced by the canonical scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Here, L is oriented, i.e., \mathbf{l} points from P to Q . From (1) it is clear that

$$2 \langle \mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}} \rangle = 0 =: \Omega^L(L, L) \quad (2)$$

holds for the Plücker coordinates of any line in \mathbb{R}^3 . We will not introduce a further symbol for the Plücker coordinates of a line L (or the Lie coordinates of a sphere S) in order not to overload the notation. So, we shall sometimes write $\Omega^L(X, Y)$, or later, $\Omega^S(S, T)$ for the value of the particular bilinear form taken on the respective pairs of vectors in \mathbb{R}^6 .

On the other hand, any pair of vectors $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{\mathbf{o}\}$ that satisfies (2) can be interpreted as Plücker coordinates of a line L in three-space, see [11, 31]. Any scalar multiple $(\lambda \mathbf{l}, \lambda \bar{\mathbf{l}})$ with $\lambda \in \mathbb{R}^*$ describes the same line in $L \subset \mathbb{R}^3$ (or even in \mathbb{P}^3) which allows us to interpret $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$ as homogeneous coordinates of a point L in projective five-space $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$. However, the orientation of lines gets lost if we change to homogeneous coordinates. Henceforth, L means either the line in \mathbb{R}^3 (or in \mathbb{P}^3) or the corresponding point in \mathbb{P}^5 .

Although we have started with oriented lines in Euclidean three-space, Plücker coordinates can also be used to describe lines at infinity. Such lines are given by $\mathbf{l} = \mathbf{o}$ while $\bar{\mathbf{l}} \neq \mathbf{o}$. Lines through the origin of the coordinate system are characterized by $\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{o}$ while $\mathbf{l} \neq \mathbf{o}$. The

¹We use the symbol \mathbf{o} for the zero vector in any vector space.

transition from inhomogeneous Cartesian coordinates in \mathbb{R}^3 to homogeneous coordinates does not affect (2). If $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ and $\bar{\mathbf{x}} = (x_4, x_5, x_6)$, then

$$M_2^4 : \frac{1}{2}\Omega^L(X, X) = \langle \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \rangle = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0 \quad (3)$$

is the equation of a quadratic hypersurface M_2^4 in projective five-space \mathbb{P}^5 all of whose points correspond to lines in \mathbb{P}^3 , and *vice versa*. M_2^4 is of index two which means that the maximal subspaces (of \mathbb{P}^5) contained in M_2^4 are planes. There are two kinds of planes in M_2^4 : Those of the first kind correspond to stars of lines in \mathbb{P}^3 ; those of the second kind correspond to ruled planes in \mathbb{P}^3 . The quadric M_2^4 is covered by two three-parameter manifolds of planes and contains a five-parameter manifold of lines corresponding to the pencils of lines in \mathbb{P}^3 .

$\Omega^L(X, Y)$ is the polar form of M_2^4 and assigns to each point $X \in \mathbb{P}^5$ the polar hyperplane with regard to M_2^4 . Especially, if $X \in M_2^4$, then $\Omega^L(X, Y) = 0$ is the equation of the tangential hyperplane $T_X M_2^4$ of M_2^4 at X . Any two different lines (linearly independent Plücker coordinates) L, M with $\Omega^L(L, M) = 0$ are coplanar, i.e., they are either intersecting in a point or they are parallel.

A C^r *ruled surface* in \mathbb{P}^3 is a one-parameter family of lines with an r -times differentiable parametrization $\mathcal{R} : I \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ and can be converted via (1) into a C^r parametrization $\mathcal{R} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_2^4$ of a curve in M_2^4 . Conversely, each C^r curve in $\mathcal{R} \subset M_2^4$ defines a C^r ruled surface in \mathbb{P}^3 . The interpolation of ruled surfaces can, therefore, be traced back to a curve interpolation problem on the quadric M_2^4 .

Especially, algebraic curves of degree n in M_2^4 correspond to algebraic ruled surfaces of degree n . Among them, we find lines and conics representing pencils of lines and reguli (i.e., the one-parameter families of rulings on quadrics), see [10, 11, 30, 31]. Rational ruled surfaces admit rational parametrizations and can be described by curves in M_2^4 with even polynomial parametrization due to the homogeneity of the Plücker representation.

Since we are dealing with G^k ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$) interpolation of ruled surfaces, we should understand the basics of (projective) differential geometry of ruled surfaces (or curves in M_2^4). For details, we refer to [10, 11, 30].

A point $R_0 = \mathcal{R}(t_0)$ is called *regular* if $\dot{R}_0 = \dot{\mathcal{R}}(t_0)$ and R_0 are linearly independent, otherwise R_0 is called *singular*. (In the following, we suppress the precise position $t_0 \in I$ on the curve in order not to overload the notation and write simply R, \dot{R}, \dots instead of R_0, \dot{R}_0, \dots . With a \cdot we indicate the differentiation with respect to the one and only parameter.)

At a regular point R , the tangent T_1 to the curve $\mathcal{R} \subset M_2^4$ is spanned by the point R and the first derivative point \dot{R} , i.e., $T_1 = [R, \dot{R}]$. The line T_1 is also tangent to M_2^4 . A reparametrization of \mathcal{R} only causes a shift of the derivative point \dot{R} on T_1 which is equivalent to the change of the speed of a particle moving on the curve. The intersection of T_1 's polar space with regard to M_2^4 is a two-dimensional cone whose points correspond to the lines of the *parabolic linear line congruence* of surface tangents of \mathcal{R} along R , see Fig. 3. This congruence collapses to a ruled plane if $T_1 \cap M_2^4$ or, equivalently, if $\Omega^L(T_1, T_1) = \Omega^L(\dot{R}, \dot{R}) = 0$.² A ruling R is called *torsal* if $\Omega^L(\dot{R}, \dot{R}) = 0$. A ruled surface that consists of torsal rulings only is called a *torsal ruled surface*, is *developable*, and its parametrization $\mathcal{R}(t)$ satisfies $\Omega(\dot{\mathcal{R}}, \ddot{\mathcal{R}}) \equiv 0 \forall t \in I$.

The osculating subspaces T_k of any dimension $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ are spanned by the first $k+1$

²Note that $\Omega^L(R, R) = \Omega^L(R, \dot{R}) = 0$ for all $t \in I$.

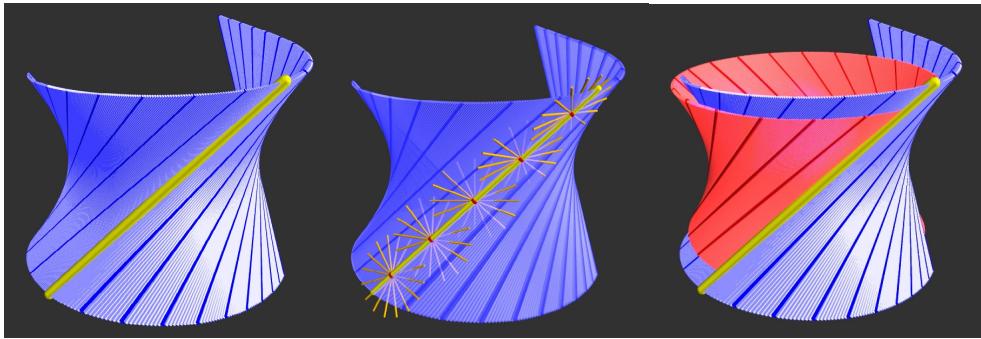


Fig. 3. Differential geometric properties of order 0, 1, 2 of a ruled surface (blue) along a regular ruling R (yellow): the ruling (left), the surface tangents along R (middle), the osculating regulus (red) along R (right).

derivative points $R^{(k)}$ of \mathcal{R} at R including $R^{(0)} = R$.

Further, the points of $M_2^4 \cap T_2$ correspond to the lines of the *osculating regulus* (see Fig. 3), regularity of the non-torsal ruling R and the linear independence of R, \dot{R}, \ddot{R} provided. The points of M_2^4 which lie in the polar space of T_2 (with regard to M_2^4) correspond to the lines of the complementary regulus on the osculating quadric of \mathcal{R} along R . If $T_2 \subset M_2^4$, then \mathcal{R} behaves locally either like a quadratic cone or a plane.

If the osculating three-spaces of two different curves in M_2^4 agree at some regular non-inflection point P , then the two ruled surfaces share even the flecnodes on the common ruling P , see [24, 30, 33].

2.2 Geometry of spheres

Now, we start and stay in Euclidean three-space \mathbb{R}^3 . We use a coordinatization of the manifold of Euclidean spheres that was used in [32]. There, a generic sphere S is usually given by its inhomogeneous equation in Cartesian coordinates as

$$S : (s_6 - s_4)(x^2 + y^2 + z^2) - 2s_1x - 2s_2y - 2s_3z + (s_6 + s_4) = 0 \quad (4)$$

where $s_i \in \mathbb{R}$ (for $i \in \{1, \dots, 6\}$) and $s_6 - s_4 \neq 0$ until stated otherwise. It is elementary to verify that the center M of S has the Cartesian coordinates $\mathbf{m} = \frac{1}{s_6 - s_4}(s_1, s_2, s_3)$ and the radius R satisfies $R^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{(s_6 - s_4)^2} - (s_6 + s_4)$. We define the fifth coordinate s_5 of the sphere S by letting $R = \frac{s_5}{s_6 - s_4}$ which yields $s_6^2 - s_4^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 = -s_5^2$, and thus,

$$L_2^4 : \frac{1}{2}\Omega^S(S, S) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 - s_5^2 - s_6^2 = 0. \quad (5)$$

The sign of R can be used in order to express the sphere's orientation.

Now, we define $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_6) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{\mathbf{0}\}$ as the coordinates of the sphere S . It is easy to see that any scalar multiple $\sigma \cdot \mathbf{s} \in \mathbb{R}^6$ with $\sigma \in \mathbb{R}^*$ describes the same sphere, since both, the center M and the radius R are linear rational in s_i and the factor σ can be canceled. Like in the case of the Plücker coordinates of lines, any six-tuple $(s_1, \dots, s_6) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{\mathbf{0}\}$ subject to (5) can be interpreted as the homogeneous coordinate vector of a point in projective five-space \mathbb{P}^5 . If the six-tuple satisfies (5), then it corresponds to a point in $L_2^4 \subset \mathbb{P}^5$. On the other hand, any

point on L_2^4 corresponds to a sphere in Euclidean three-space \mathbb{R}^3 . However, orientations may be altered when dealing with homogeneous coordinates.

Obviously, the hypersurface $L_2^4 \subset \mathbb{P}^5$ is a quadric; frequently called *Lie's quadric* and it is a point model for the geometry of *oriented spheres* in Euclidean three-space \mathbb{R}^3 . However, L_2^4 differs from M_2^4 over the real number field: It is of index 1, i.e., the maximal subspaces of \mathbb{P}^5 contained in L_2^4 are straight lines. The polar system of L_2^4 also has a geometric meaning. Any pair (S, T) of points conjugate with respect to L_2^4 , i.e., $\Omega^S(S, T) = 0$, corresponds to a pair of spheres in Euclidean three-space being in (oriented) contact.

The hyperplane $s_6 - s_4 = 0$ intersects L_2^4 along the three-dimensional quadratic cone $\Gamma : s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_5^2 = 0$ whose points correspond to the (oriented) planes in Euclidean three-space which are then considered as spheres with $R = \infty$. Γ is usually referred to as Blaschke's cone and it is a point model for Laguerre geometry, i.e., the geometry of oriented planes in Euclidean three space, cf. [3, 5, 9]. Points on L_2^4 with $s_5 = 0$ represent spheres with radius 0 which should rather be considered as isotropic cones of Euclidean geometry.

Like in case of ruled surfaces, a C^r curve ($r \geq 1$) $\mathcal{C} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow L_2^4$ in Lie's quadric represents a one-parameter C^r family of spheres in \mathbb{R}^3 . Usually, such families of spheres have an envelope which is touched by all spheres along their *characteristic circles*. These envelopes are called *channel surfaces* if the radius of the spheres varies and *pipe surfaces* if the radius is constant. It is worth to point out that the computation of the envelope of a family of spheres needs the process of differentiation. Thus, starting from a G^k interpolant in any point model of sphere geometry, we end with a G^{k-1} envelope. This should always be taken into account when dealing with G^k interpolants in the model space. Moreover, the envelope of a family of spheres needs not be real even though all spheres in the family are real as is the case with a family of concentric spheres. If the algebraic degree of the curve $(\mathbf{m}, R) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ (cyclographic image of the one-parameter family of spheres $\langle \mathbf{x} - \mathbf{m}, \mathbf{x} - \mathbf{m} \rangle = R^2$, see [5, 9, 21]) equals n , then the algebraic degree of the envelope (channel surface) is at most $4n - 2$.

Figure 4 illustrates the differential geometric properties of one-parameter families of spheres up to order two. The top row shows only the one-parameter families of spheres, while the bottom row illustrates the envelopes of the families of spheres, i.e., the channel surfaces.

L_2^4 's intersection with the osculating subspaces T_k of $\mathcal{C} \subset L_2^4$ correspond to families of spheres that are in the k -th order contact with the spheres in the family \mathcal{C} , and further, they represent, among others, channel surfaces that are in contact of order $k - 1$ with the envelope of the family of spheres.

Curves in L_2^4 of degrees one and two correspond to special channel surfaces: cones/cylinders (of revolution) and Dupin cyclides.

We shall close this section with the conversion of sphere data into sphere coordinates, points on Lie's quadric L_2^4 . Assume a sphere S has the center M with Cartesian coordinates $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ and let the radius of the sphere be R . The point in L_2^4 that corresponds to S shall also be denoted by S . We want to find the coordinate vector $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ of the sphere S . Note that \mathbf{s} is subject to (5) and $s_6 - s_4 \neq 0$, otherwise S is a plane.

First, we observe $m_1(s_6 - s_4) = s_1$, $m_2(s_6 - s_4) = s_2$, $m_3(s_6 - s_4) = s_3$, and $R(s_6 - s_4) = s_5$. The latter four equations can be solved for s_1, s_2, s_3 , and s_5 . This results in a two-dimensional

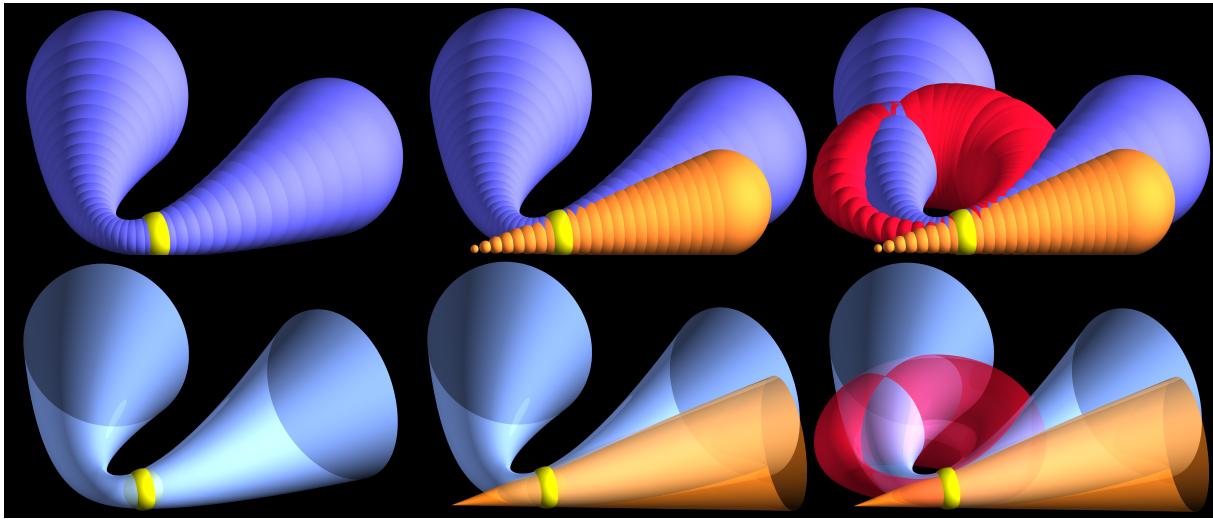


Fig. 4. Top row: Differential geometric properties of one-parameter families of spheres. From left to right: G^0 , G^1 , G^2 . Bottom row: Envelopes.

subspace of \mathbb{R}^6 with the parametrization

$$V := (m_1(s_6 - s_4), m_2(s_6 - s_4), m_3(s_6 - s_4), s_4, (s_6 - s_4)R, s_6)$$

with $(s_4, s_6) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\}$. Now, $\Omega^S(V, V) = 0$ yields

$$s_4 : s_6 = (R^2 - \langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle + 1) : (R^2 - \langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle - 1)$$

which finally results in

$$\mathbf{s} = (2m_1, 2m_2, 2m_3, \langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle - R^2 - 1, 2R, \langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle - R^2 + 1). \quad (6)$$

The latter equation is that of the stereographic projection from the cyclographic model to Lie's quadric.

3 Bézier curves within quadrics

We will not use the algorithm offered in [8], since it only returns interpolants on a collection of points (without any further information on derivatives there). The idea from [16] cannot be applied directly to problems in higher dimensional spaces. The techniques developed in [17] or [25] can only be applied once a channel surface is known. The interpolation with cyclide patches is well understood, see [20], but it restricts to a certain very stiff class of channel surfaces.

We assume that $\Omega : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ is a non-degenerate symmetric bilinear form on \mathbb{R}^6 . It could be either one of the forms Ω^L and Ω^S from (3) and (5) or any other. Naturally, $\mathcal{Q} : \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ is the equation of a regular quadric in \mathbb{P}^5 whose polar system is described by the polar form Ω .

Let $\mathcal{B} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ be a C^r parametrization of a curve with sufficiently large $r \in \mathbb{N}$. For the sake of simplicity, we use the symbol \mathcal{B} for the curve as well as for its parametrization. If the curve is entirely contained in the quadric, then the parametrization annihilates the quadric's equation and so $\Omega(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \equiv 0$ holds in I . Differentiation with respect to t yields the following identities

$$\Omega(\mathcal{B}, \dot{\mathcal{B}}) \equiv 0, \quad \Omega(\mathcal{B}, \ddot{\mathcal{B}}) + \Omega(\dot{\mathcal{B}}, \dot{\mathcal{B}}) \equiv 0, \quad 3\Omega(\dot{\mathcal{B}}, \ddot{\mathcal{B}}) + \Omega(\mathcal{B}, \ddot{\mathcal{B}}) \equiv 0, \quad \dots. \quad (7)$$

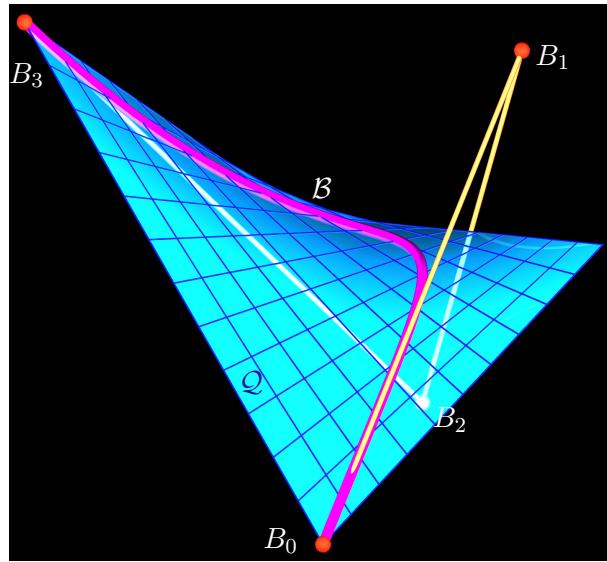


Fig. 5. Bézier curve \mathcal{B} in a quadric with its control polygon.

In the following, when we deal with interpolation tasks, we always have boundary data $D_0 := [P, \dot{P}, \ddot{P}, \dots]$ and $D_1 := [Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, \dots]$ which comes either from one or two ruled surface(s) or channel surface(s) and satisfies (7). In any case, D_0 and D_1 shall be the boundary data of the interpolant that admits a polynomial representation $\mathcal{B} : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q}$. This polynomial parametrization is written in the geometrically favorable Bernstein basis, i.e., as a Bézier curve

$$\mathcal{B}(t) = \sum_{k=0}^n \varphi_k \mathbf{b}_k \quad (8)$$

with control points B_k (represented by their homogeneous coordinate vectors \mathbf{b}_k) and with the Bernstein polynomials

$$\varphi_k = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k \quad (\text{with } k \in \{0, 1, \dots, n\}) \quad (9)$$

as basis functions, see [13].

The control points shall be determined such that the given osculating subspaces agree with that of the interpolant:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0) &= P, \quad [\mathcal{B}(0), \dot{\mathcal{B}}(0)] = [P, \dot{P}], \quad [\mathcal{B}(0), \dot{\mathcal{B}}(0), \ddot{\mathcal{B}}(0)] = [P, \dot{P}, \ddot{P}], \dots, \\ \mathcal{B}(1) &= Q, \quad [\mathcal{B}(1), \dot{\mathcal{B}}(1)] = [Q, \dot{Q}], \quad [\mathcal{B}(1), \dot{\mathcal{B}}(1), \ddot{\mathcal{B}}(1)] = [Q, \dot{Q}, \ddot{Q}], \dots \end{aligned}$$

A Bézier curve $\mathcal{B} : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ is entirely contained in the quadric \mathcal{Q} if, and only if,

$$p(t) := \Omega(\mathcal{B}(t), \mathcal{B}(t)) \equiv 0 \quad (10)$$

holds in I . We assume that $\mathcal{B}(t)$ is a Bézier curve of degree $n \in \mathbb{N}^*$ as given in (8). Then, (10) is a polynomial $p(t) = \sum_{i=0}^{2n} a_i t^i$ in t of degree $2n$ with $2n+1$ coefficients a_0, \dots, a_{2n} depending on the control points B_k . Since (10) has to vanish all over $[0, 1]$, all of its coefficients have to vanish simultaneously. In other words, \mathcal{B} has to have more than $2n$ points of intersection with

the quadric $\mathcal{Q} : \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. This yields $2n + 1$ conditions on the control points B_k of the Bézier curve \mathcal{B} .

In order to make the coefficients of $p(t)$ somehow symmetric, we shall write the polynomial also in the Bernstein basis. Therefore, $p(t) = \sum_{i=0}^{2n} a_i \varphi_i$. Since (7) is valid, we can immediately see that the coefficients of $(1-t)^{2n}$, $t(1-t)^{2n-1}$, $t^{2n-1}(1-t)$, and t^{2n} vanish. Thus, the two zeros $t = 0$ and $t = 1$ of $p(t)$ (both with multiplicity two) are *a priori* known, and hence, the polynomial is divisible by the factor $t^2(1-t)^2$ and the actual degree drops to $2n - 4$. The polynomial $p(t) \cdot t^{-2} \cdot (1-t)^{-2}$ has only $2n - 3$ coefficients which equals the number of equations to be solved.

Later, we will make use of the abbreviation

$$\Omega_{i,j} := \Omega(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$$

for the value taken by the bilinear form Ω on the pair $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$ of coordinate vectors representing the pair (B_i, B_j) of base points of the Bézier curve \mathcal{B} .

We shall point out that any (rational) polynomial curve in a ruled quadric is a collinear image of a *rational normal curve*, see [4]. Further, rational normal curves are entirely contained in a huge variety of quadrics. Rational normal curves are Veronese varieties and, as such, they admit a projective generation. The latter fact may be used for a synthetic or constructive approach to G^k interpolation problems with ruled or channel surfaces.

The degree of \mathcal{B} and the type of the quadric \mathcal{Q} have to match. For example, on a two-dimensional (Euclidean) sphere we will never find real cubics.

4 Results and Algorithms

4.1 G^1 interpolation - common parabolic linear line congruence of surface tangents

We solve the G^1 interpolation problem on a quadric with a single cubic. However, we don't have to insert an additional control point (i.e., a ruling or sphere) in between the two sets of boundary data and we get along with one interpolant in contrast to [26].

Unlike in the approach to G^1 interpolation given in [26], we do not have to take care of tangent planes at particular points on the boundary rulings. Since we are performing the interpolation solely in the quadric model of the present geometry, it is guaranteed that the *contact projectivities* at the rulings P and Q (i.e., the boundaries) match. If we let $n = 3$ in (8), we have to determine four control points B_0, \dots, B_3 (with coordinate vectors \mathbf{b}_i). The interpolant \mathcal{B} shall satisfy $\mathcal{B}(0) = P, \mathcal{B}(1) = Q$ at the ends which causes $B_0 = P$ and $B_3 = Q$, i.e.,

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{p}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{q}. \tag{11}$$

Along these bounding rulings, the parabolic linear line congruence of surface tangents shall be determined by $[P, \dot{P}]$ and $[Q, \dot{Q}]$. Similarly, we can formulate this in terms of spheres. Consequently, the inner control points of the cubic Bézier curve \mathcal{B} have to be chosen such that $B_1 \in [P, \dot{P}]$ and $B_2 \in [Q, \dot{Q}]$ which, expressed in terms of vectors, reads

$$\mathbf{b}_1 = \lambda_1 \mathbf{p} + \mu_1 \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{b}_2 = \lambda_2 \mathbf{q} + \mu_2 \dot{\mathbf{q}} \tag{12}$$

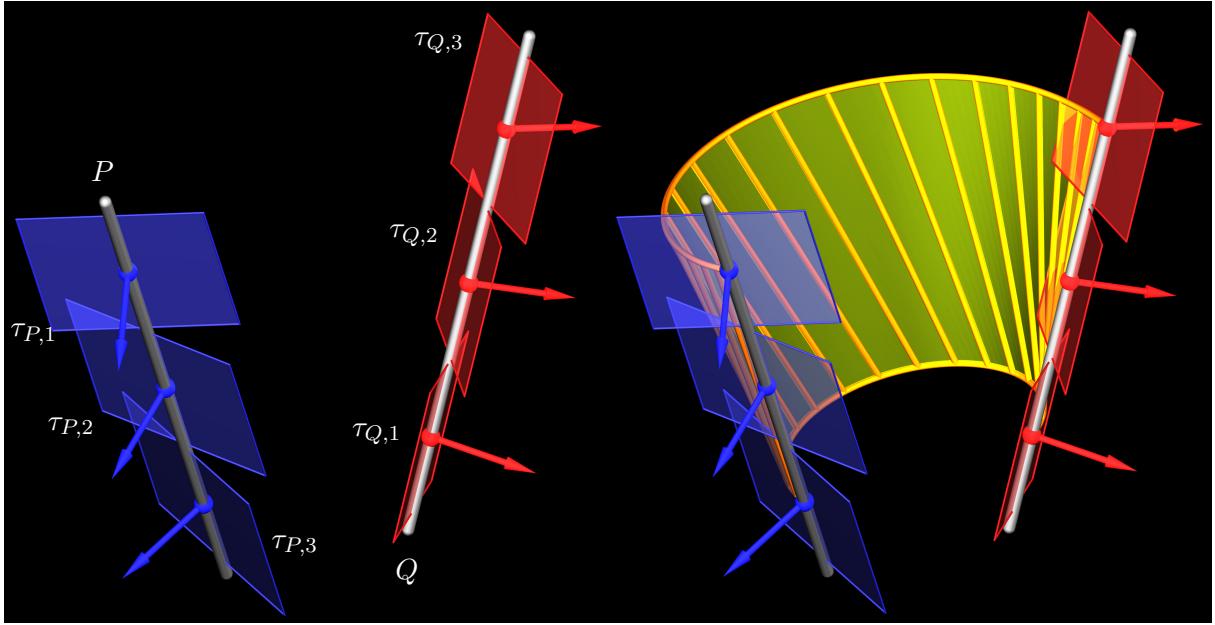


Fig. 6. Left: G^1 ruled surface data consisting of rulings P, Q , and the tangent planes $\tau_{P,j}, \tau_{Q,i}$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) along P and Q . Right: A ruled surface that interpolates the given G^1 data.

where, in general, $\lambda_i : \mu_i \neq 0 : 0$ for $i \in \{1, 2\}$.

Now, $n = 3$ and (10) is a polynomial of degree 6 with seven coefficients. Since P, \dot{P}, Q , and \dot{Q} fulfill (7), four coefficients vanish automatically and only three coefficients remain:

$$2\Omega_{0,2} + 3\Omega_{1,1} = 0, \quad 2\Omega_{1,3} + 3\Omega_{2,2} = 0, \quad \Omega_{0,3} + 9\Omega_{1,2} = 0. \quad (13)$$

Inserting (11) and (12) into (13), we arrive at

$$\begin{aligned} 2\lambda_2\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}} + 2\mu_2\Omega_{\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}}} + 3\mu_1^2\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}} &= 0, \\ 2\lambda_1\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}} + 2\mu_1\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\mathbf{q}} + 3\mu_2^2\Omega_{\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}}} &= 0, \\ \Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}} + 9(\lambda_1\lambda_2\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}} + \lambda_1\mu_2\Omega_{\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}}} + \lambda_2\mu_1\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\mathbf{q}} + \mu_1\mu_2\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{q}}}) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

The first and second equation of (14) can be solved for λ_1 and λ_2 :

$$\lambda_1 = -\frac{\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\mathbf{q}}}{\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}}}\mu_1 - \frac{3\Omega_{\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}}}}{2\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}}}\mu_2^2, \quad \lambda_2 = -\frac{\Omega_{\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}}}}{\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}}}\mu_2 - \frac{3\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}}}{2\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}}}\mu_1^2, \quad (15)$$

provided that P and Q are not conjugate with respect to the quadric \mathcal{Q} (which is natural to assume). With (15) and the third equation of (14) we have a single equation

$$r : 81\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}}\Omega_{\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}}}\mu_1^2\mu_2^2 + 36(\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{q}}} - \Omega_{\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}}}\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\mathbf{q}})\mu_1\mu_2 + 4\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^2 = 0 \quad (16)$$

involving μ_1 and μ_2 describing a degenerate quartic curve in the $[\mu_1, \mu_2]$ -plane, see Fig. 7. The curve r is the union of a pair of hyperbolae and the points on it correspond to solutions of the G^1 interpolation problem.

Thus, we can formulate

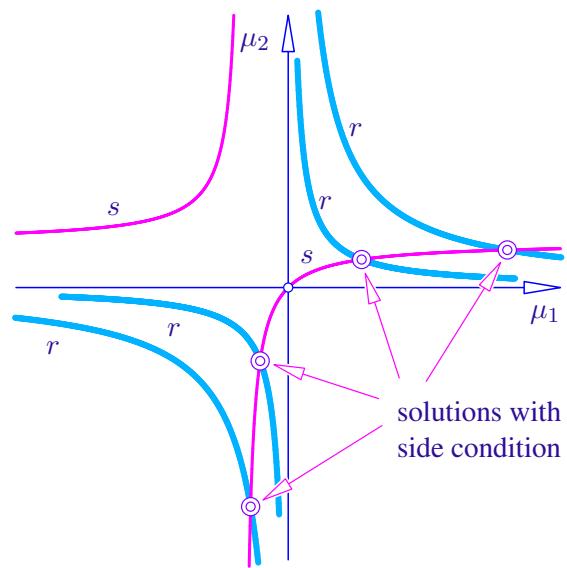


Fig. 7. The degenerate quartic curve (16) consists of a pair of homothetic hyperbolae in the $[\mu_1, \mu_2]$ -plane. A non-linear side condition is imposed on the shape parameters μ_1, μ_2 in order to choose special solutions.

Theorem 4.1. G^1 Hermite data $D_0 = [P, \dot{P}]$ and $D_1 = [Q, \dot{Q}]$ satisfying (7) from a ruled or channel surface can be interpolated by a cubic ruled surface or a cubic one-parameter family of spheres and has two independent quadratic one-parameter families of solutions.

In order to choose a certain solution in the G^1 problem, we can impose a side condition on the shape parameters μ_1 and μ_2 . This results in a further curve s in the $[\mu_1, \mu_2]$ -plane (cf. Fig. 7) and the computation of the solutions subject to this additional equation requires the intersection of r and s .

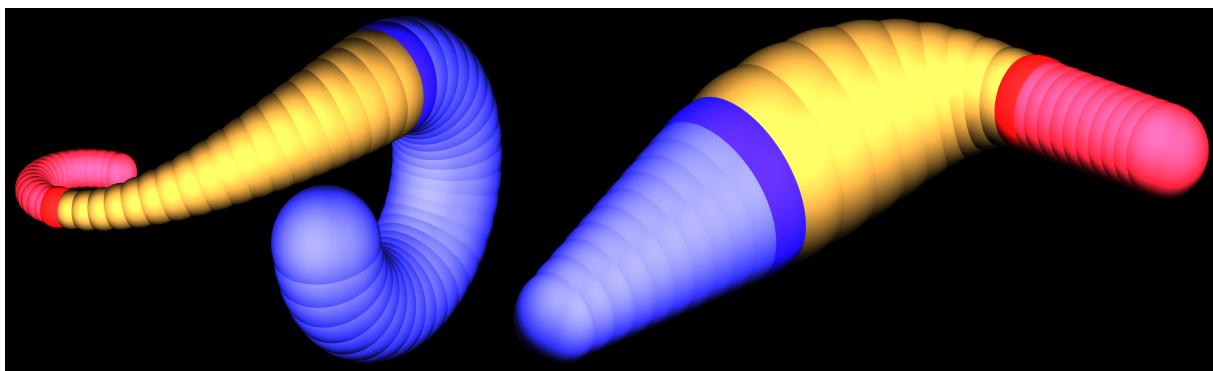


Fig. 8. G^1 Hermite interpolation with one-parameter families of spheres.

The case of the interpolation of channel surfaces somehow differs from that with ruled surfaces. In general, we cannot give a precise degree of the interpolating channel surface. However, the degree of the channel surface will not exceed 10 if the (cyclographic image of the) family of spheres is of degree 3.

Figure 8 shows two examples of G^1 interpolation with channel surfaces: Only the spheres are plotted, since the interpolation algorithm is actually applied to G^1 Hermite data of one-parameter families of spheres. In Figure 9, only the envelopes of the boundary channel surfaces and the interpolating channel surface of degree 10 are shown.

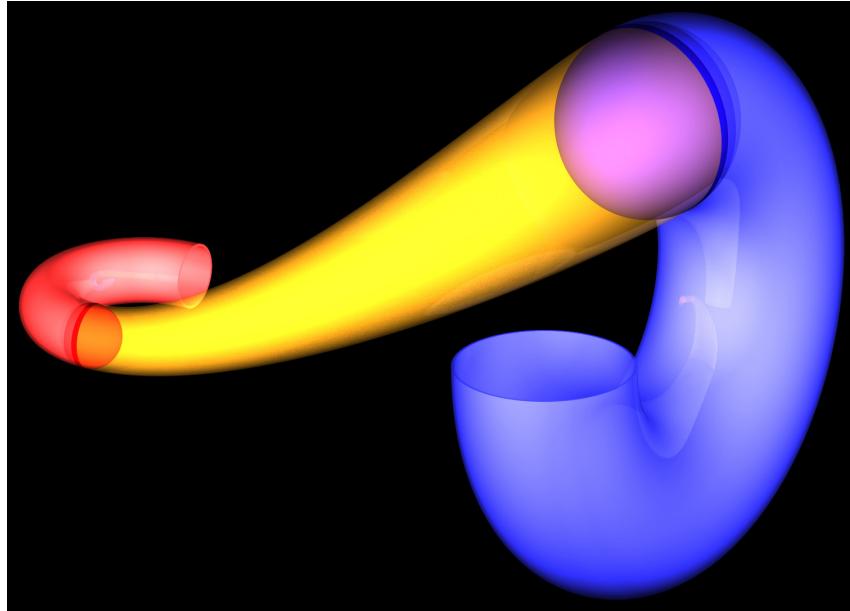


Fig. 9. Envelopes of the families of spheres shown in Fig. 8 (left).

Improvements of the visualization of channel surfaces may be given in [1], although the results of our algorithms are presented sufficiently well.

4.2 G^2 interpolation - common osculating quadrics or Dupin cyclides

In the case of G^2 interpolation, the Hermite data $D_0 = [P, \dot{P}, \ddot{P}]$ and $D_1 = [Q, \dot{Q}, \ddot{Q}]$ contains information up to the second derivatives of the initial ruled or channel surface (see Fig. 10), and thus, also of the interpolant \mathcal{B} . Now, we assume that \mathcal{B} is given by (8) with $n = 5$.

The *endpoints* P, Q still have to be interpolated as well as the G^1 conditions still have to be fulfilled. Since now $n = 5$, (11) and (12) are valid in the G^2 case too and read

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{p}, \quad \mathbf{b}_5 = \mathbf{q}, \\ \mathbf{b}_1 &= \lambda_1 \mathbf{p} + \mu_1 \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{b}_4 = \lambda_2 \mathbf{q} + \mu_2 \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{17}$$

with $\lambda_i : \mu_i \neq 0 : 0$ for $i \in \{1, 2\}$. In order to obtain G^2 transitions at the boundaries P and Q , we have to make sure that the osculating planes of the interpolant agree with those of the initial curve. This is achieved by making sure that $B_2 \in [P, \dot{P}, \ddot{P}]$ and $B_3 \in [Q, \dot{Q}, \ddot{Q}]$ which means

$$\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{p} + \beta_1 \dot{\mathbf{p}} + \gamma_1 \ddot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{b}_3 = \alpha_2 \mathbf{q} + \beta_2 \dot{\mathbf{q}} + \gamma_2 \ddot{\mathbf{q}} \tag{18}$$

with $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i \neq 0 : 0 : 0$ for $i \in \{1, 2\}$.

The condition (10) on \mathcal{B} to be entirely contained in M_2^4 is a polynomial of degree 10 with 11 coefficients. Since the identities given in (7) are valid, the coefficients of $(1-t)^{10}, t(1-t)^9,$

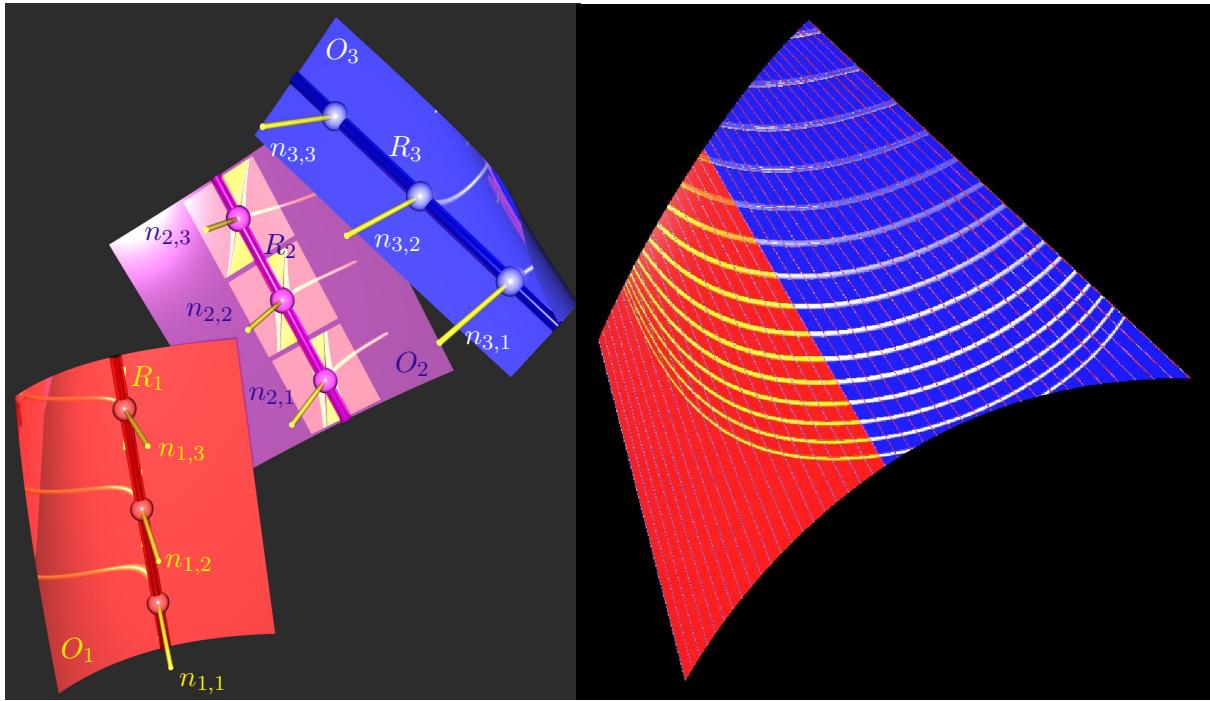


Fig. 10. Left: G^2 ruled surface data consisting of rulings R_i , the prescribed tangent planes $\tau_{i,j}$ (with normals $n_{i,j}$), and the osculating reguli \mathcal{O}_i ($i, j \in \{1, 2, 3\}$). Right: Two ruled surfaces that interpolate the given G^2 data seen from the convex side with reflection lines.

$t^9(1-t)$, and t^{10} vanish automatically. Thus, seven coefficients remain and give that much conditions on the control points B_0, \dots, B_6 and the shape parameters of \mathcal{B} . So, we have

$$\begin{aligned} 4\Omega_{3i-3,3i-1} + 5\Omega_{3i-2,3i-2} &= 0, \\ \Omega_{2i-2,2i+1} + 5\Omega_{2i-1,2i} &= 0, \quad i \in \{1, 2\}, \\ \Omega_{i-1,i+3} + 10\Omega_{i,i+2} + 10\Omega_{i+1,i+1} &= 0, \\ \Omega_{0,5} + 25\Omega_{1,4} + 100\Omega_{2,3} &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

Inserting (17) and (18) into the first two equations of (19), we find

$$\gamma_i = -\frac{5}{4}\mu_i^2, \quad (i \in \{1, 2\}). \tag{20}$$

The partial solutions (20) are now inserted into (19) which are still linear in α_i . Therefore, they can be solved for α_i which yields

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{1}{\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} (\beta_2\Omega_{\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}}} + \gamma_2\Omega_{\mathbf{p},\ddot{\mathbf{q}}} + 5\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}}(\beta_1\mu_1 - \gamma_1\lambda_1) + 5\gamma_1\mu_1\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\ddot{\mathbf{p}}}), \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}}} (\beta_1\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\mathbf{q}} + \gamma_1\Omega_{\ddot{\mathbf{p}},\mathbf{q}} + 5\Omega_{\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}}}(\beta_2\mu_2 - \gamma_2\lambda_2) + 5\gamma_2\mu_2\Omega_{\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}}}). \end{aligned} \tag{21}$$

Now, the three remaining equations involve only six variables: β_i , λ_i , and μ_i . The following list displays the degree of each equation considered as a polynomial in the respective variable:

$$\begin{aligned} &[[\beta_1, 2], [\beta_2, 1], [\lambda_1, 2], [\lambda_2, 1], [\mu_1, 4], [\mu_2, 3]], \\ &[[\beta_1, 1], [\beta_2, 2], [\lambda_1, 1], [\lambda_2, 2], [\mu_1, 3], [\mu_2, 4]], \\ &[[\beta_1, 1], [\beta_2, 1], [\lambda_1, 1], [\lambda_2, 1], [\mu_1, 3], [\mu_2, 3]]. \end{aligned} \tag{22}$$

With two further elimination steps, we can eliminate two more variables from the latter equations. This shows that there is a three-dimensional algebraic variety of solutions to the G^2 Hermite interpolation problem. Each point on this variety corresponds to an interpolant of the given G^2 data.

For practical reasons, the huge variety of solutions shall be restricted. Since the parameters μ_1 and μ_2 regulate the influence of the first derivative, and therefore, the tangential behavior of the interpolant, one can make sure that they do not vanish by setting them to a fixed value. This has one major advantage: The degrees of three equations, simplified in (22) drop and, after eliminating λ_i , we obtain an algebraic curve of degree 6 in the $[\beta_1, \beta_2]$ -plane all of whose points correspond to solutions of the G^2 Hermite interpolation problem with ruled or channel surfaces. Summarizing, we can say:

Theorem 4.2. The Hermite interpolation of G^2 data $D_0 = [P, \dot{P}, \ddot{P}]$ and $D_1 = [Q, \dot{Q}, \ddot{Q}]$ satisfying (7) from a ruled or channel surface can be solved with a quintic ruled surface or a quintic one-parameter family of spheres. The variety of solutions is algebraic, of dimension 3, and is at most of degree 150.

With prescribed weights μ_i for the tangent points (derivate points) the manifold of solutions is an algebraic curve of degree 8.

Remark 4.1. The degree 150 of the variety of solutions mentioned in Thm. 4.2 can (more or less) easily be verified by computing the Hilbert polynomial of the ideal defined by (22). In this case, the complexity of the computation was too high to carry it out by Maple[©]. The number 150 is an upper bound and is the product of the degrees of the equations given in (22) (according to Bézout's theorem).

Fig. 11 shows three different solutions to one certain G^2 interpolation task. It is no surprise that the interpolants intersect the osculating quadrics at the ends in more than just the common ruling. The interpolant and the osculating quadrics share only differential geometric properties up to order two.

In cases similar to that illustrated in Fig. 11, it is useful to have some tool which helps us to decide which solution is the *best*. Interpolants with small variations shall be preferred. Of course, solutions with self-intersections or even complicated topology should be omitted. Especially in the cases of G^2 (and later also G^3) interpolation, the shape parameters of the interpolants are solutions of systems of algebraic equations, and thus, they can only be found with numerical methods, in general. Then, the Bézier representation \mathcal{B} of the interpolant has numerically defined control points and this makes the solution somehow imprecise. Algebraically speaking, the polynomial $p(t) = \Omega(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ will not be zero.

Fig. 12 shows the plot of the polynomials p corresponding to some solutions of a G^2 interpolation problem. Clearly, the *best* solution would be that corresponding to $p(t) \equiv 0$. However, in practice one chooses the solution correponding to the polynomial $p(t)$ that is closest to the abscissa, at least in $[0, 1]$.

Fig. 13 shows a comparison of two solutions of a G^2 interpolation problem for ruled surfaces. We can still observe some intersections of the initial ruled surface (blue) and the interpolants (yellow, red) in Fig. 13. This is clear, since the interpolants computed from the G^2 data (green) agree with the initial surface (blue) only at the boundaries and to a certain extent.

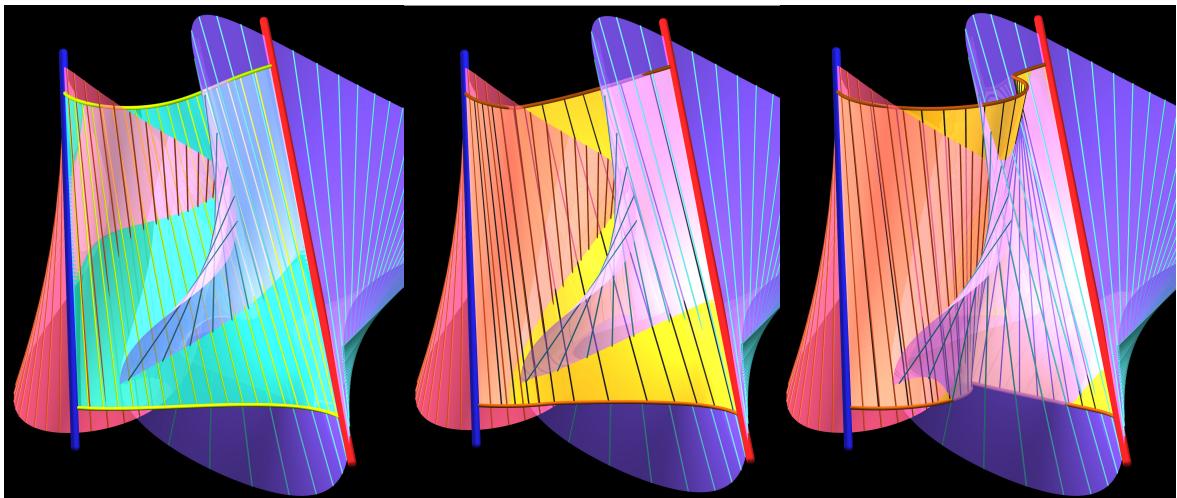


Fig. 11. Three different solutions to a G^2 Hermite interpolation problem. The given reguli at the ends are shown in red and violet; the respective boundary lines show up as blue and red cylinders. It is not at all surprising that the three different interpolants (cyan, yellow, and orange) show some intersection curves with the G^2 data at the boundaries, since these surfaces only agree with the data up to differentiation order two.

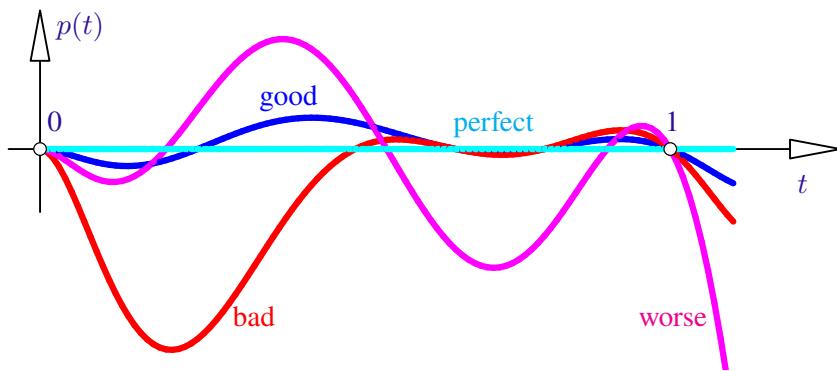


Fig. 12. The polynomial $p(t)$ is not equal to zero for numerically obtained solutions. The solution corresponding to the polynomial function p closest to 0 is probably the best one.

The proposed algorithm also works for channel surfaces as can be seen in Fig. 14. There, two good solutions are displayed together with two bad solutions. In the latter case, we observe that the radius function may have zeros in the interval $[0, 1]$. This means that the orientation of the spheres in the one-parameter family changes. If this happens twice (an even number of changes), then both data sets at the ends are properly oriented (they have equal orientations). Such cases can be treated relatively easy by adjusting the shape parameters μ_i . An odd number of zeros, or equivalently, an odd number of orientation switches, can be repaired by changing the orientation of the sphere at one of the two ends.

If a solution looks pretty good and shows no zeros of the radius function, it may still grow into the wrong direction, see Fig. 13 (bottom row, right). This can be repaired by changing the signs of μ_i .

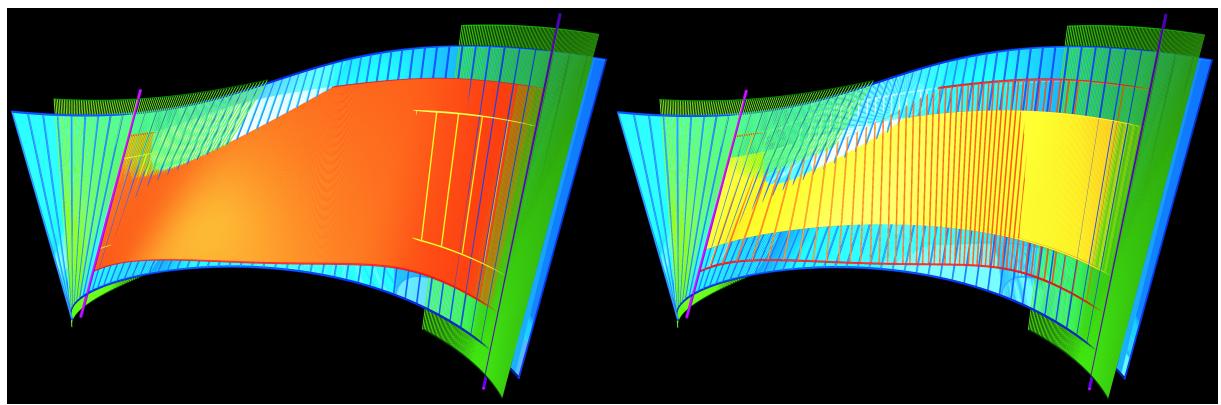


Fig. 13. Comparison of two solutions of G^2 interpolation problem for ruled surfaces. The G^2 data was taken from the blue surface. The yellow and the orange solution have been chosen according to the deviations of the function $p(t)$ from the zero polynomial.

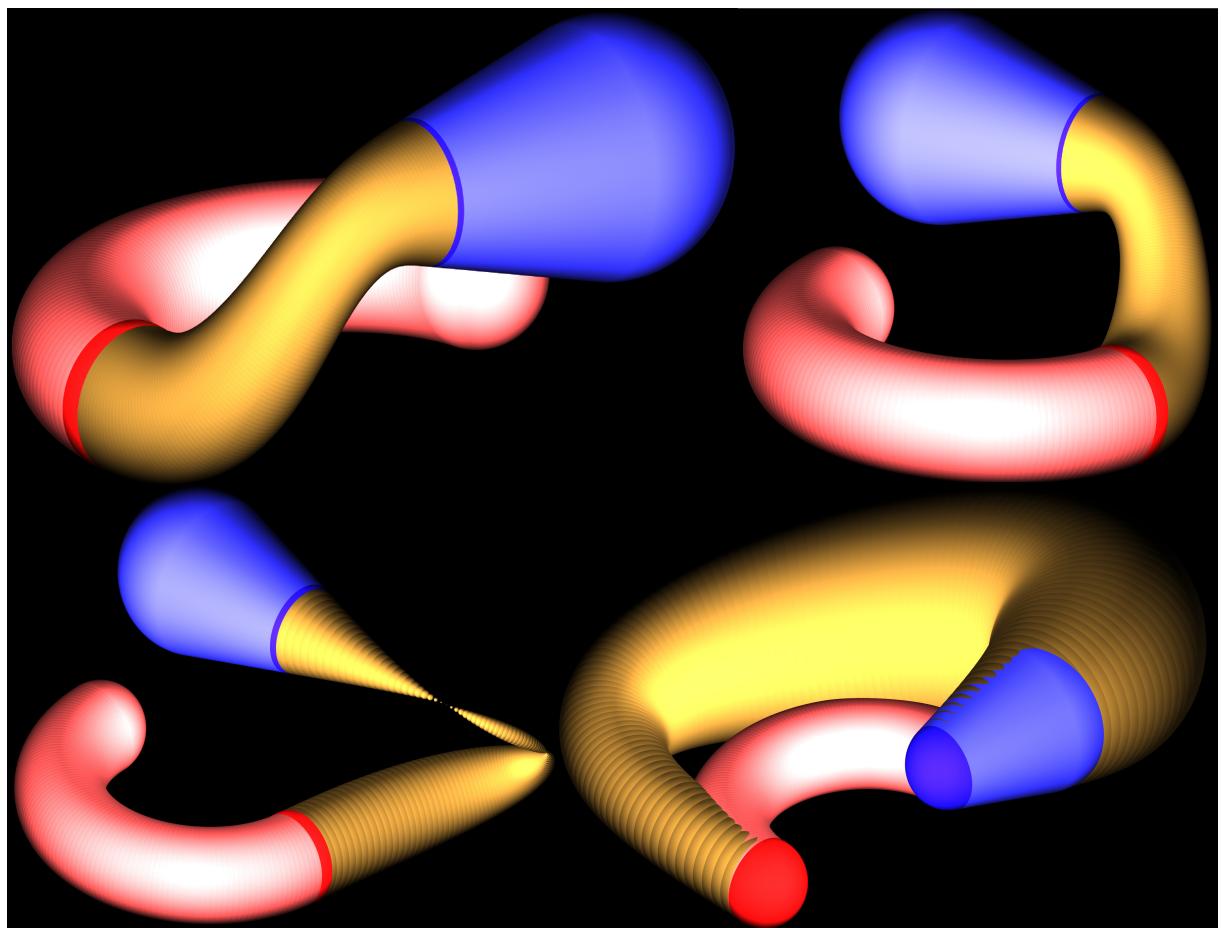


Fig. 14. Top row: two good solutions of a G^2 interpolation problem with channel surfaces. Bottom row: two bad solutions with zeros of the radius function (left) or growth into the wrong direction (right).

4.3 G^3 Hermite interpolation - common flecnodes

Finally, we pay attention to the interpolation of G^3 data $D_0 = [P, \dot{P}, \ddot{P}, \dddot{P}]$ and $D_1 = [Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, \dddot{Q}]$. In this case, the interpolant does not only share the ruling or sphere P , the parabolic linear line or sphere congruence defined by $[P, \dot{P}]$, and the osculating regulus or Dupin cyclide defined by $[P, \dot{P}, \ddot{P}]$ with the ruled or channel surface to be interpolated. Among the asymptotic tangents or spheres of both ruled or channel surfaces along the common ruling or sphere P (and different from P), there are in general two lines or spheres which *hyperosculate* the ruled or channel surfaces, i.e., locally they intersect the surfaces at least with multiplicity four. These two asymptotic lines or spheres are called *flecnodal tangents* or *flecnodal spheres*, [24, 30, 33].

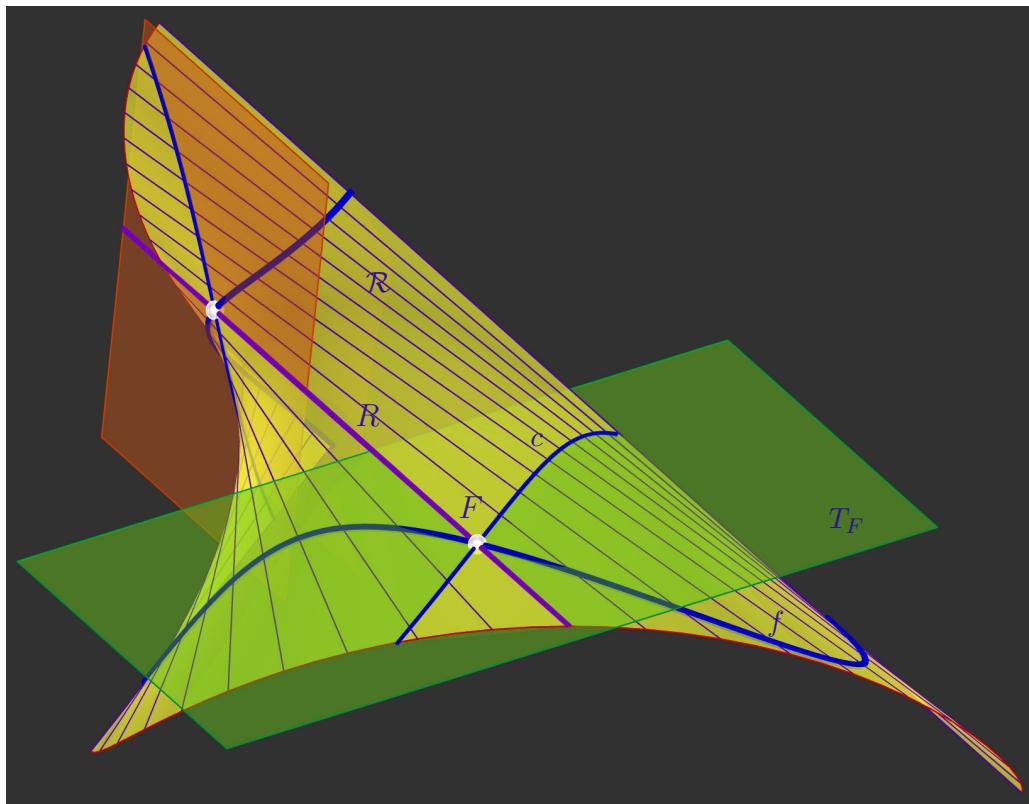


Fig. 15. The tangent plane T_F at a flecnode F of a ruled surface \mathcal{R} intersects \mathcal{R} along the ruling R through F and a curve c with an inflection point at the flecnode F . The locus of all flecnodes on \mathcal{R} is the curve f consisting of two branches (at least in this example).

We have to choose $n = 7$ in (8) in order to have the necessary degrees of freedom, i.e., the necessary number of control points. The relations between the control points and the derivative points at the boundary, similar to (11), (12), and (18) are

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{p}, & \mathbf{b}_7 &= \mathbf{q}, \\ \mathbf{b}_1 &= \lambda_1 \mathbf{p} + \mu_1 \dot{\mathbf{p}}, & \mathbf{b}_6 &= \lambda_2 \mathbf{q} + \mu_2 \dot{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{b}_2 &= \alpha_1 \mathbf{p} + \beta_1 \dot{\mathbf{p}} + \gamma_1 \ddot{\mathbf{p}}, & \mathbf{b}_5 &= \alpha_2 \mathbf{q} + \beta_2 \dot{\mathbf{q}} + \gamma_2 \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (23)$$

where $\lambda_i : \mu_i \neq 0 : 0$ and $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i \neq 0 : 0 : 0$ for $i \in \{1, 2\}$. Additionally, we have to take the third derivatives at the boundaries into account. In order to achieve a G^3 contact at P and Q , we

make sure that the osculating three-spaces of the interpolant and the curves to be interpolated agree at the endpoints P and Q . Therefore, we have

$$\mathbf{b}_3 = \nu_1 \mathbf{p} + \omega_1 \dot{\mathbf{p}} + \rho_1 \ddot{\mathbf{p}} + \sigma_1 \dddot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{b}_4 = \nu_2 \mathbf{q} + \omega_2 \dot{\mathbf{q}} + \rho_2 \ddot{\mathbf{q}} + \sigma_2 \dddot{\mathbf{q}} \quad (24)$$

where $\nu_i : \omega_i : \rho_i : \sigma_i \neq 0 : 0 : 0 : 0$ for $i \in \{1, 2\}$. In analogy to (13) and (19), the coefficients of the polynomial (10) yield the eleven equations

$$\begin{aligned} 6\Omega_{5i-5,5i-3} + 7\Omega_{5i-4,5i-4} &= 0, \\ 5\Omega_{4i-4,4i-1} + 21\Omega_{4i-3,4i-2} &= 0, \\ 10\Omega_{3i-3,3i+1} + 70\Omega_{3i-2,3i} + 63\Omega_{3i-1,3i-1} &= 0, \\ 3\Omega_{2i-2,2i+3} + 35\Omega_{2i-1,2i+2} + 105\Omega_{2i,2i+1} &= 0, \\ 2\Omega_{i-1,i+5} + 42\Omega_{i,i+4} + 210\Omega_{i+1,i+3} + 175\Omega_{i+2,i+2} &= 0, \\ \Omega_{0,7} + 49\Omega_{1,6} + 441\Omega_{2,5} + 1225\Omega_{3,4} &= 0 \end{aligned} \quad (i \in \{1, 2\}) \quad (25)$$

since four coefficients vanish automatically. Because of (7), we have $\Omega_{0,0} = \Omega_{7,7} = \Omega_{0,1} = \Omega_{6,7} = 0$. So far, (25) involve 18 variables, i.e., the homogeneous coordinates fixing the control points in the osculating subspaces together with the shape parameters. These 18 variables are subject to 11 conditions. From that we can infer that there is a seven-dimensional manifold of solutions to the G^3 interpolation problem.

We insert (23) and (24) into (25). The first two equations are univariate and linear in γ_i and can be solved for which gives

$$\gamma_i = \frac{7}{6}\mu_i^2 \quad (i \in \{1, 2\}) \quad (26)$$

since $\Omega_{\mathbf{p},\ddot{\mathbf{p}}} = -\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\ddot{\mathbf{p}}}$ and $\Omega_{\mathbf{q},\ddot{\mathbf{q}}} = -\Omega_{\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}}}$ according to (7). The third to sixth equation of (25) are four linear equations in ρ_i and σ_i ($i \in \{1, 2\}$) even after the substitution of (26). So, we solve the latter four equations for ρ_i , σ_i and substitute into the remaining equations. This yields five equations in twelve unknowns. There, we observe that the first two equations are linear in α_1 and α_2 , and thus, they can be solved for α_i which (after substitution for α_i) leads to three equations in ten unknowns still describing a seven-dimensional manifold of solutions. These three equations are all of the same algebraic shape, i.e., they agree in the degree in total as well as in the degrees when considered as polynomials in certain variables:

$$[26, [\beta_i, 6], [\lambda_i, 6], [\mu_i, 16], [\nu_i, 2], [\omega_i, 2]] \quad (i \in \{1, 2\}).$$

The first number equals the total degree (it is 26).

Surprisingly, the latter three polynomial equations *all* share the same quadratic factor $c_1\lambda_1\lambda_2 + c_0$ with multiplicity two. On the doubly counted quadratic hypercylinder $\Gamma : c_1\lambda_1\lambda_2 + c_0 = 0$ in \mathbb{R}^{10} , we can for sure find a huge variety of real solutions to the G^3 interpolation problem on quadrics. Unfortunately, the complexity of the computation - the high degrees of the three final equations - forces us to restrict the manifold of solutions in practical cases. It means no restriction to set some of the shape parameters to certain fixed values, thereby guaranteeing that all derivative points contained in the boundary data have influence on the interpolant.

For example: Setting the parameters β_i , λ_i , and μ_i to certain fixed values and eliminating all remaining unknowns except ν_i yields an algebraic curve of degree 16 in the $[\nu_1, \nu_2]$ -plane all

of whose points correspond to solutions to the initial G^3 interpolation problem in general. The solutions taken from the sextadecic differ from those corresponding to the points on the quadratic cylinder Γ . We can summarize:

Theorem 4.3. The G^3 Hermite interpolation problem for ruled and channel surfaces can be done with septic curves on Plücker's or Lie's quadric. The solutions correspond to points on a seven-dimensional algebraic variety whose degree is at most $26^3 = 17576$.

With prescribed weights β_i , λ_i , and μ_i the variety of solutions is an algebraic curve of degree 16.

Figure 16 shows three ruled surface patches glued together with G^3 continuity. The smoothness of the reflection lines of a spherical grid demonstrates the quality of the interpolation.

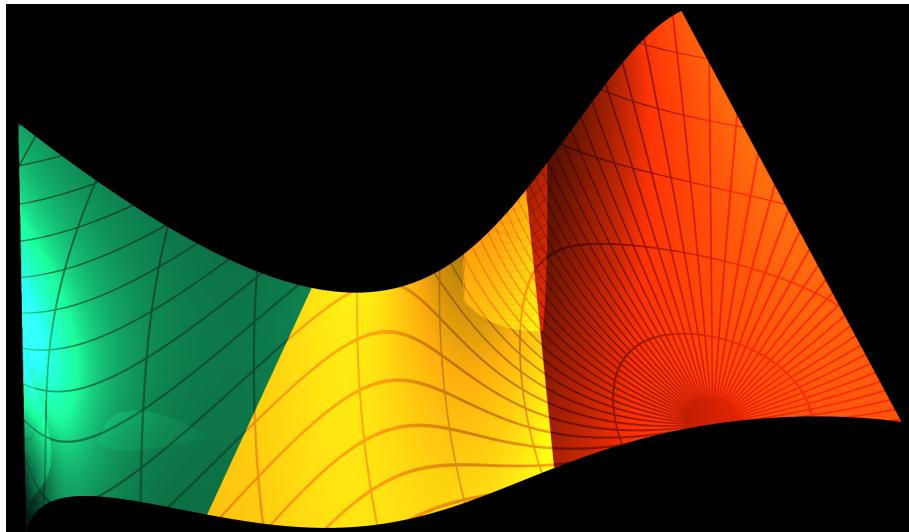


Fig. 16. Three patches of ruled surfaces joined with third order geometric continuity. The fading grid of curves on the surface(s) is the reflection of a spherical grid.

5 Conclusion and further ideas

5.1 C^1 instead of G^1 connections

In Sec. 1 (see page 1), we have foretold that a quartic curve can also be used for the interpolation of G^1 data on a quadric \mathcal{Q} . Moreover, even a C^1 join can be achieved. We use the well-known fact that the derivatives of a Bézier curve \mathcal{B} at both of its endpoints can be given in the simple form $\dot{\mathcal{B}}(0) = \Delta \mathbf{b}_1$ and $\dot{\mathcal{B}}(1) = \Delta \mathbf{b}_4$ where $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i-1}$ is short hand for the *forward difference operator* applied to the i -th control point \mathbf{b}_i (see, e.g., [13]). Now, we have

$$\dot{\mathcal{B}}(0) = \dot{\mathbf{p}} = 4(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad \dot{\mathcal{B}}(1) = \dot{\mathbf{q}} = 4(\mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_3),$$

and clearly $\mathcal{B}(0) = \mathbf{b}_0 = \mathbf{p}$ and $\mathcal{B}(1) = \mathbf{b}_4 = \mathbf{q}$, and therefore, we find

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{p} + \frac{1}{4}\dot{\mathbf{p}} \quad \text{and} \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{q} - \frac{1}{4}\dot{\mathbf{q}}.$$

This particular choice of $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3$, and \mathbf{b}_4 is necessary and sufficient for a C^1 connection of \mathcal{B} with two curves having G^1 data $D_0 = [\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}]$ and $D_1 = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]$ at its endpoints since the derivative points of the Bézier curve agree with that of the given curve(s).

There is one control point left and we assume that $\mathbf{b}_2 = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$. Then, (10) yields the following five equations

$$3\Omega_{2i-1,2i} + 4\Omega_{2i-1,2i-1} = 0, \quad \Omega_{i-1,i+2} + 6\Omega_{i,i+1} = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \\ \Omega_{0,4} + 16\Omega_{1,3} + 36\Omega_{2,2} = 0.$$

The first four equations are linear in the coordinates of \mathbf{x} which, in general, describe a two-dimensional subspace of the affine space over \mathbb{R}^6 as the orbit of all possible X (or $\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$). In total, we have the system of equations

$$12\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{x}} + \Omega_{\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}} = 0, \quad 12\Omega_{\mathbf{q},\mathbf{x}} + \Omega_{\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}}} = 0, \\ 4\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}} - \Omega_{\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}}} + 24\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{x}} + 6\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\mathbf{x}} = 0, \quad 4\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}} - \Omega_{\dot{\mathbf{p}},\mathbf{q}} + 24\Omega_{\mathbf{q},\mathbf{x}} - 6\Omega_{\dot{\mathbf{q}},\mathbf{x}} = 0, \\ 17\Omega_{\mathbf{p},\mathbf{q}} + 4(\Omega_{\dot{\mathbf{p}},\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}}}) - \Omega_{\dot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{q}}} + \Omega_{\mathbf{x},\mathbf{x}} = 0.$$

Obviously, the solutions of the C^1 interpolation problem fill a one-dimensional quadratic variety (i.e., a conic) in the quadric \mathcal{Q} (either L_2^4 or M_2^4). That is definitely less than in the more flexible cubic ansatz given in (11) and (12). Unfortunately, the reality of solutions cannot be guaranteed in this case.

5.2 Channel surfaces and the cyclographic model

The interpolation with channel (or even pipe) surfaces should preferably done within the cyclographic model (cf. [9, 21]). There, the interpolation task simplifies to a linear G^k spline interpolation. The solutions to prescribed boundary data will be of low degree and unique. The latter may be seen as a minor flaw.

However, one problem still persists: The interpolation in the cyclographic model yields a G^k curve corresponding to a G^k family of spheres. The computation of the envelope consumes one degree of smoothness and so the resulting channel surface shows only a G^{k-1} continuity at the boundaries.

5.3 Torsal interpolants

The presented algebraic approach to the interpolation in quadrics could also be used for finding interpolating torsal ruled surfaces. Therefore, the parametrization \mathcal{B} of the interpolant has to fulfill $\Omega(\dot{\mathcal{B}}, \ddot{\mathcal{B}}) \equiv 0$ in addition to (10). The number of conditions imposed on the fixed number of shape parameters increases and in each case we have to clarify if the chosen degree of the ansatz is sufficiently high.

5.4 Further possible applications

The presented interpolation method on quadrics could also be used for families of circles in the plane, no matter if the plane is Euclidean or pseudo-Euclidean. A stereographic projection to a Euclidean or pseudo-Euclidean sphere establishes the quadric model and the techniques apply.

Our technique can also be used to find exact parametrizations of interpolating motions since Study's quadric S_2^6 serves as a point model for the manifold of motions in Euclidean three-space, see [31]. A detailed study of the behavior of polynomial curves on S_2^6 is needed, especially the relative position of the osculants with respect to the quadric's three-dimensional generators.

5.5 Conclusion

We have presented a unifying treatment of the G^k Hermite interpolation within quadrics. The method was tested at hand of two special geometries: the geometries of lines and spheres. This was done not only since these are apparently of more practical relevance than others. These geometries are understood much better than others. Nevertheless, the results given in Thms. 4.1 – 4.3 are formulated in the general setting of an arbitrary (possibly) regular quadric. Therefore, they contain general results on the G^k Hermite interpolation by means of polynomial curves within quadrics.

References

- [1] BIENERT, A. *Visualisierung und graphische Anwendung von Kanalflächen*. In PhD thesis, Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg, 2016.
- [2] BLASCHITZ, B. *Skinning of Circles and Spheres by Geometric Optimization in Minkowski Space*. In J. Geom. Graphics **18**/2 (2014), 159–172.
- [3] BLASCHKE, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie III*. In Springer-Verlag, Berlin, 1929.
- [4] BURAU, W. *Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie*. In VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961.
- [5] CECIL, T.E. *Lie sphere geometry*. In Springer, New York; 2nd ed. 2008.
- [6] DIETZ, R., J. HOSCHEK, J., JÜTTLER, B. *An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics*. In Comp. Aided Geom. Design **10** (1993), 211–229.
- [7] FAROUKI, R.T. *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*. In Springer, Berlin, 2008.
- [8] GFRERRER, A. *Rational interpolation on a hypersphere*. In CAGD **16**/1 (1999), 21–37.
- [9] GIERING, O. *Vorlesungen über höhere Geometrie*. In Vieweg, Braunschweig - Wiesbaden, 1982.
- [10] HLAVATY, V. *Projektive Liniengeometrie*. In Noordhoff, Groningen, 1953.
- [11] HOSCHEK, J. *Liniengeometrie*. In Bibliographisches Institut, Zürich, 1971.
- [12] HOSCHEK, J. *Bézier Curves and Surface Patches on Quadrics*. In Mathematical Methods in CAGD II: Biri, Norway, 1991, T. Lyche, L.L. Schumaker (eds.), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, 1992, 331–342.
- [13] HOSCHEK, J., LASSE, D. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. In A.K. Peters, Wellesley, MA, 1993.
- [14] HOSCHEK, J., SCHNEIDER, M. *Interpolation and approximation with developable surfaces*. In Curves and Surfaces with Applications in CAGD, A. Le Méhauté, C. Rabut, and L.L. Schumaker, (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1997, 185–202.

- [15] HOSCHEK, J., SCHWANECKE, U. *Interpolation and approximation with ruled surfaces.* In The Mathematics of Surfaces VIII, R. Cripps (ed.), Information Geometers, 1998, 213–231.
- [16] JÜTTLER, B. *Zur Konstruktion rationaler Kurven und Flächen auf Quadriken.* In J. Geometry **47** (1993), 53–64.
- [17] KRASAUSKAS, R. *Minimal rational parametrizations of channel surfaces.* In Computing **79**/2–4, 281–290.
- [18] LANG, J., RÖSCHEL, O. *Developable (1, n)-Bézier surfaces.* In Comput. Aided Geom. Design **9** (1992), 291–298.
- [19] LEOPOLDSEDER, S. *Cone spline surfaces and spatial arc splines.* In PhD thesis, Vienna University of Technology, 1998.
- [20] MÄURER, C., KRASAUSKAS, R. *Joining cyclide patches along quartic boundary curves.* In Mathematical methods for curves & surfaces II. M. Dæhlen, T. Lyche, L.L. Schumacher (eds.), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1998, 359–366.
- [21] MÜLLER, E. *Vorlesungen über Darstellende Geometrie.* In Band II: Die Zyklographie, Deuticke, Leipzig - Wien, 1929.
- [22] MÜLLER E., KRAMES, J.L. *Vorlesungen über Darstellende Geometrie.* In Band III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Deuticke, Leipzig - Wien, 1931.
- [23] ODEHNAL, B. *Subdivision algorithms for ruled surfaces.* In J. Geom. Graphics **12**/1 (2008), 35–52.
- [24] ODEHNAL, B. *Note on flecnodes.* In J. Geom. Graphics **13**/1 (2009), 29–40.
- [25] PETERNELL, M., POTTMANN, H. *Computing rational parametrizations of channel surfaces.* In J. Symbolic Computation **23** (1997), 255–266.
- [26] PETERNELL, M. *G^1 -Hermite Interpolation of Ruled Surfaces.* In: Mathematical Methods in CAGD, Oslo 2000, T. Lyche and L.L. Schumaker (eds.), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2001, 413–422.
- [27] PETERNELL, M. *Developable surface fitting to point clouds.* In Comp. Aided Geom. Design **21** (2004), 785–803.
- [28] PETERNELL, M. *Recognition and reconstruction of developable surfaces from point clouds.* In Proc. Geometric Modeling and Processing 2004, Beijing, China, 301–310.
- [29] POTTMANN, H., FARIN, G. *Developable rational Bezier and B-spline surfaces.* In Comput. Aided Geom. Design **12** (1995), 513–531.
- [30] SAUER, R. *Projektive Liniengeometrie.* In W. de Gruyter, Berlin, 1937.
- [31] WEISS, E.A. *Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik.* In B.G. Teubner, Leipzig, 1935.
- [32] WEISS, E.A. *Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation VII.* In Deutsche Math. **3** (1938), 11–35.
- [33] ZINDLER, K. *Liniengeometrie mit Anwendungen.* In Vol. I & II, G.J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig, 1906.

Dr. Boris Odehnal

University of Applied Arts

Oskar-Kokoschka-Platz 2, A-1010 Vienna, Austria

e-mail: boris@geometrie.tuwien.ac.at

Vyšli Dejiny matematiky

Ján Čízmár

Abstrakt

Príspevok je stručnou informáciou o prvom vydaní mimoriadne podrobnej a obsažnej knižnej publikácie o dejinách matematiky v celej histórii jej existencie, ktorá vyšla v slovenskom jazyku.

Kľúčové slová: dejiny matematiky

Abstract

This contribution is a brief information regarding the first edition of a particularly detailed and comprehensive book on the history of mathematics throughout the duration of its existence, which was published in the Slovak language.

Key words: history of mathematics

10. novembra 2017 v priestoroch bratislavskej inštitúcie INCHEBA v rámci pravidelnej výročnej akcie *Bibliotéka* prebehla prezentácia dlho pripravovanej (a azda aj očakávanej) knihy *Dejiny matematiky*, ktorej autorom je pisateľ týchto riadkov. Organizátorom akcie bolo vydavateľstvo PERFEKT, ktoré knihu vydalo a zastúpené svojou riaditeľkou Mgr. Magdalénou Gocníkovou a značným počtom pracovníčok a zamestnancov vydavateľstva zabezpečovalo prezentáciu a ďalšie sprievodné akcie, ku ktorým patril predaj kníh v stánku vydavateľstva a autogramiáda na záver akcie. Účasť verejnosti na prezentácii bola podľa vyjadrenia zástupcov vydavateľstva a ďalších znalcov podobných podujatí nad očakávanie početná a zo širokého okruhu priateľov a priateľov i ďalších známych a priaznivcov autora možno vyzdvihnúť prítomnosť osobitne významných hostí, ku ktorým nepochybne patrili exminister doc. PhDr. Dušan Čaplovič, DrSc., prof. Pavol Brunovský a prof. Jozef Gruska.

Moderátorom akcie bol doc. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, PhD., rektor Dubnického technologického inštitútu, ktorý bol aj jedným z troch recenzentov publikácie, keď ďalšími dvoma v tejto úlohe boli prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc. a mim. prof. doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD. Po krátkom a obsažnom interview moderátora s autorom o podstatných záležitosťach týkajúcich sa publikácie s príhovormi vystúpili prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc., dekan Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, pani riaditeľka vydavateľstva PERFEKT Mgr. Magdaléna Gocníková a obaja prítomní recenzenti. Z posudku neprítomného recenzenta prof. Ondreja Šedivého prečítať podstatné pasáže moderátor. Na záver podľa zaužívanej tradície prof. Jozef Masarik za asistencie Andreja Ferka a Tomáša Lengyelfalusyho „pokrstil“ knihu množinou papierových číslic.

Kniha *Dejiny matematiky* je podľa súhlasného vyjadrenia všetkých troch recenzentov i prof. Masarika v úvodnom slove na prvých stránkach knihy prvým uceleným dielom o vývoji matematiky v celej histórii jej existencie publikovaným v slovenskom jazyku. Vyplňa citeľnú medzeru v oblasti vhodnej základnej študijnej literatúry k predmetu Dejiny

matematiky v študijnom programe učiteľstva matematiky pre sekundárne všeobecno-vzdelávacie i odborné stredné školy. Je pokusom predstaviť čitateľovi stručný synoptický obraz vzniku a vývoja matematických poznatkov a matematického myslenia v celej histórii existencie druhu *homo sapiens* – a sčasti aj jeho predchodcov – od predhistorickej doby temer až po dnešnú súčasnosť. Prezentuje matematiku ako spoločensko-historický fenomén vznikajúci a rozvíjajúci sa v konkrétnom historicko-spoločenskom prostredí na báze celého predchádzajúceho poznania. Táto koncepcia robí z knihy čítanie prístupné nielen vzdelaným matematikom, ale aj širokému okruhu potenciálnych čitateľov zaujímajúcich sa o dejiny ľudstva, dejiny vedy a špeciálne o dejiny matematiky.

Rámcovú informáciu o obsahu knihy možno poskytne čitateľovi niekoľko nasledovných údajov.

Kapitoly:

1. Matematika v predhistorických spoločenstvách
2. Matematika v starovekom Egypte a v Mezopotámii
3. Matematika v starovekej Číne a Indii
4. Matematika v starovekom Grécku a helenistickom svete
5. Matematika v stredovekej Číne a Indii
6. Matematika v stredovekých islamských krajinách
7. Matematika v stredovekej Európe (6. – 16. storočie)
8. Európska matematika v 17. storočí
9. Matematika v 18. storočí
10. Matematika v 19. storočí
11. Matematika v 20. storočí

Kapitoly 2 – 11 o vývoji matematiky v historickej dobe sú uvádzané prehľadnými tabuľkami najvýznamnejších historicko-spoločenských a politických udalostí príslušnej historickej epochy, tabuľkami dobových dejín materiálnej a duchovnej kultúry a tabuľkami dôležitých vedeckých objavov a vedeckej tvorby, špeciálne v matematike. Tieto údaje umožňujú sledovať vývoj matematiky ako súčasť celosvetového dejinného pohybu a matematiku ako historicko-spoločenský fenomén v globálnom procese dejín.

Dielo je doplnené kompletným záznamom rokov konania svetových matematických kongresov a úplným zoznamom laureátov Fieldsovej medaily, ktorá v matematickej vede zohráva úlohu Nobelovej ceny v oblasti iných vied. Kniha taktiež obsahuje výber z dostupných portrétov významných svetových matematikov v celej histórii matematiky.

Grafickú zložku diela vrátane počítačového vyhotovenia geometrických obrázkov, skenovanie a uloženie ilustračných materiálov a portrétov a počítačovú editáciu textu kompletne zabezpečila RNDr. Zita Sklenáriková, PhD. Prevod textu do LATEXu a definitívna grafická úprava sú dielom RNDr. Márie Benešovej, PhD. Nehynúcu podstatnú zásluhu na vydanie knihy má mim. prof. doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.

Vydanie knihy z verejných zdrojov podporili Fond na podporu umenia, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Prvá stavebná sporiteľňa a United Industries, a. s.

Knihu si možno objednať vo vydavateľstve PERFEKT, Cukrová 14, 811 08 Bratislava, e-mail: odbyt@perfekt.sk alebo na www.perfekt.sk s 30% zľavou.

Elektronickú verziu si možno kúpiť na www.martinus.sk alebo www.dibuk.sk.

Ján Čižmár: Dejiny matematiky, Od najstarších čias po súčasnosť

Vydavateľstvo Perfekt, 2017

896 strán, pevná väzba, rozmery 165×240 mm

ISBN 978-80-8046-829-3

prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.

Astrova 16, 821 01 Bratislava

e-mail: jan.cizmar80@gmail.com

Abstracts

I. Abrhan, D. Velichová: On independent systems of ideals in subsemigroups of semigroups

In this paper we deal with systems of ideals in subsemigroups of semigroups and some of their properties, and we present definitions and properties of (completely) independent system of ideals. New concepts are introduced as (completely) B -independent system of maximal ideals in subsemigroup H of semigroup S with respect to non-empty set B , and their existence, some properties and connections to principal ideals are proved. Finally, conditions are given for existence of partial right group H in subsemigroup of semigroup S , with respect to set $B \subseteq H$.

M. Kočandrlová, J. Radová: Minimal ellipse to finite set of points

We look for an ellipse with minimal area to a finite set of points in the plane. The number of different points must be at least three. The minimal ellipse to three points has its centre in the centre of gravity of the triangle determined by these three points. The minimal ellipse to four points is an affine image of the ellipse of a family of conics determined by a circle and a pair of intersecting lines. The minimal ellipse to a set of more points can be determined by iterations. A general algorithm is derived from the properties of a polyhedron in five dimensional space.

B. Odehnal: Hermite interpolation of ruled surfaces and channel surfaces

We show an algebraic way to interpolate Hermite data of ruled or channel surfaces by computing polynomial curves within PLÜCKER's and LIE's quadric serving as point models for the geometries of lines and spheres. The Bézier ansatz for a curve in either quadric involves some design parameters guiding the shape of the ruled or channel surface. These parameters are to be determined by solving a system of algebraic equations. Since in our ansatz there are more shape parameters than equations, there are some degrees of freedom which can be used in the design process. The degrees of the equations allow us to predict the number of possible solutions. Together with geometric criteria, useful solutions, i.e., solutions that meet practical requirements can be selected. Our main goal is the interpolation of G^k data at the boundaries of ruled surfaces or channel surfaces. We aim at low degree interpolants.

J. Čižmár: History of Mathematics published

This contribution is a brief information regarding the first edition of a particularly detailed and comprehensive book on the history of mathematics throughout the duration of its existence, which was published in the Slovak language.

G

Slovak Journal for Geometry and Graphics

Volume 14 (2017), No. 28

ISSN 1336-524X

Edited by:

Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

Editor-in-Chief:

Daniela Velichová

Managing Editors:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Editorial Board:

Vojtech Bálint

Miloš Božek

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Štefan Solčan

Margita Vajsálová

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, brief reports, state-of-the-art reviews, analyses, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, analytic, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social and technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

Frequency: One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s. r. o.

G is cited in: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG December 2017, Bratislava

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific contents.

www.ssgg.sk