SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 15, číslo 29, 2018
ISSN 1336-524X

G
Slovenský časopis pre geometriu a grafiku

Ročník 15 (2018), číslo 29
ISSN 1336-524X

Vydáva:
Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku
IČO: 31 816 304
Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Námestie slobody 17
812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:
Redakcia G - SSGG
ÚMF SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava
ssgg@ssgg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.
Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Euro.
Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adrese: www.ssgg.sk

Tlačí: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

Časopis G je citovaný v: Zentralblatt für Mathematik

SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
SLOVAK JOURNAL FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

ročník 15, číslo 29, 2018
volume 15, number 29, 2018

Obsah – Contents

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ

SG

PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie

b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR

c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania

d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike

e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike

f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť

g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG
Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

O maximálnych a minimálnych ideáloch pologrúp s ohľadom na ich podmnožiny, I

Imrich Abrhan, Daniela Velichová

Abstrakt

V prvej časti práce ku každému nezávislému systému ľavých hlavných ideálov $\mathscr{H}_L$ pologrupy S s ohľadom na podmnožinu B pologrupy S priradíme ľavý ideál $H(\mathscr{H}_L)$ pologrupy S. Definujeme maximálny (minimálny) ľavý ideál v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ a je dokázané základné tvrdenie o štruktúre týchto ideálov v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, pozri vetu 1.3.

V druhej časti tejto práce definujeme maximálny ľavý ideál L^* v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$. Ďalej je rozpísaná štruktúra ľavého ideálu $H(\mathscr{H}_L)$ pologrupy S, ak $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje maximálny ľavý ideál L^* v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, pozri vetu 2.1.

V prípade, že napr. $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje maximálny ľavý ideál L^* s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, vyšetruje sa napr. štruktúra množiny $\overline{L}^* = H(\mathscr{H}_L)\backslash L^*$, pozri napr. vetu 2.5, alebo vetu 2.6.

Kľúčové slová: nezávislý systém ľavých hlavných ideálov $\mathscr{H}_L$ pologrupy S s ohľadom na podmnožinu B pologrupy S ľavého ideálu $H(\mathscr{H}_L)$ pologrupy S priradený k $\mathscr{H}_L$, maximálny (minimálny) ľavý ideál v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, parciálna ľavá grupa, parciálna grupa

Abstract

In the first part of this paper we relate a left principle ideal $\mathscr{H}_L$ of semigroup S to any independent system of left ideals $H(\mathscr{H}_L)$ of semigroup S with respect to subset B of semigroup S. We define maximal (minimal) left ideal in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ and prove basic proposition about structure of these ideals in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, see Theorem 1.3.

In the second part of this paper we define maximal left ideal L^* in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$. Next, we describe structure of left ideal $H(\mathscr{H}_L)$ of semigroup S, if $H(\mathscr{H}_L)$ contains maximal left ideal L^* in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, see Theorem 2.1.

In case that e.g. $H(\mathscr{H}_L)$ contains maximal left ideal L^* with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, we study for instance structure of set $\overline{L}^* = H(\mathscr{H}_L)\backslash L^*$, see Theorem 2.5 or Theorem 2.6.

Key words: independent system of left principle ideals $\mathscr{H}_L$ of semigroup S with respect to subset B of semigroup S left ideal $H(\mathscr{H}_L)$ of semigroup S related to $\mathscr{H}_L$, maximal (minimal) left ideal in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, partial left group, partial group

0 Úvod

Predovšetkým uvedieme definície základných pojmov a tvrdenia o týchto pojmoch.

V ďalšom namiesto „S je pologrupa a B je jej neprázdna podmnožina“, budeme písať „S je pologrupa a $B \subseteq S$“. V prípade, že pologrupa S je pologrupa s nulou 0, budeme vždy predpokladať, že $0 \notin B$.

Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Znakom:

1. $L(a)(R(a), J(a))$ budeme označovať hlavný ľavý (pravý, obojstranný) ideál pologrupy S generovaný prvkom $a \in S$ (napr. $L(a) = a \cup Sa$, napr. $J(a) = a \cup Sa \cup aS \cup SaS$).
2. $L(B)$ $(R(B), J(B))$ označujeme množinu $\cup\{L(b) \mid b \in B\}$ $(\cup\{R(b) \mid b \in B\}$, $\cup\{J(b) \mid b \in B\})$ (napr. $L(B) = \cup\{L(b) \mid b \in B\}$)
3. $\mathscr{L}(\mathscr{R}, \mathscr{J})$ budeme označovať Greenovu reláciu ekvivalencie na S, definovanú napr. takto: $a, b \in S$ sú v relácii ekvivalencie $\mathscr{L}$ na S (t. j. $a\mathscr{L}b$) práve vtedy, ak $L(a) = L(b)$.
4. $L_a(R_a, J_a)$ označujeme $\mathscr{L}$-triedu ($\mathscr{R}$-triedu, $\mathscr{L}$-triedu) priradenú k relácii ekvivalencie $\mathscr{L}(\mathscr{R}, \mathscr{J})$ na S obsahujúcu prvok $a \in S$.
5. $S/\mathscr{L}$ $(S/\mathscr{R}, S/\mathscr{J})$ označujeme množinu všetkých $\mathscr{L}$-tried ($\mathscr{R}$ -tried, $\mathscr{J}$ -tried) priradených relácii ekvivalencie $\mathscr{L}(\mathscr{R}, \mathscr{J})$ na S.
6. „$\leq$“ označujeme čiastočné usporiadanie na $S/\mathscr{L}$ $(S/\mathscr{R}, S/\mathscr{J})$ (napr. $L_a \leq L_b$, $a, b \in S$ práve vtedy, ak $L(a) \subseteq L(b)$) (pod $A \subset B$ rozumieme množinu A, ktorá je vlastnou podmnožinou množiny B a pod $A \subseteq B$ rozumieme, že buď $A \subset B$, alebo $A = B$).
7. $NL(B)(NR(B), N(B))$ označujeme množinu všetkých takých $x \in S$, že pre každé $b \in B$ je $L_b \not\leq L_x$ $(R_b \not\leq R_x, J_b \not\leq J_x)$ (pozri [8]).
8. $L(B)/\mathscr{L}$ $(\mathscr{R}(B)/\mathscr{L}, \mathscr{J}(B)/\mathscr{L})$ je množina všetkých takých tried $L_b(R_b, J_b)$ priradený relácii ekvivalencie $\mathscr{L}(\mathscr{R}, \mathscr{S})$ na S, že $L_b \subseteq L(B)$ $(R_b \subseteq R(B), J_b \subseteq J(B))$.
9. Znakom $\overline{NL(B)}$ označujeme množinu $S\backslash NL(B)$, t. j. $\overline{NL(B)} = S\backslash NL(B)$ ($A\backslash B$ je rozdiel množín A, B). Analogicky definujeme $\overline{NR(B)}$, $\overline{N(B)}$.
10. Budeme hovoriť, že prvok $b \in B$ spĺňa podmienku (A), ak $Sa = L(b)a = L(b)$ práve vtedy, ak $a \in L_b$.
11. $D_l(B)$ $(D_r(B))$ označíme množinu všetkých takých $b \in B$, že $bB = B$ $(Rb = R)$.

Lema 0.1. Nech S je pologrupa a nech $b \in S$. Potom:

Ak $\overline{L}_b = (L(b)\backslash L_b) \neq \emptyset$, $(\overline{R}_b = (R(b)\backslash R_b) \neq \emptyset$, $\overline{J}_b = (J(b)\backslash J_b) \neq \emptyset)$, potom $\overline{L}_b$ $(\overline{R}_b, \overline{J}_b)$ je ľavý (pravý, obojstranný) ideál pologrupy S.

Definícia 0.1 (pozri napr. [8]). Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Ľavý ideál pologrupy S (alebo v S) nazývame minimálnym ľavým ideálom v S s ohľadom na množinu B, ak $L \cap B \neq \emptyset$ a neexistuje taký ľavý ideál L' pologrupy S, že $L' \subset L$ a $L' \cap B \neq \emptyset$.

Minimálny pravý (obojstranný) ideál pologrupy S s ohľadom na množinu B definujeme analogicky.

Veta 0.1 (pozri napr. [8]). Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Potom

(a) Pre každé $L \subseteq S$ a $L \neq \emptyset$ platí: L je minimálny ľavý ideál pologrupy S s ohľadom na B vtedy a len vtedy, ak existuje také $b \in B$, že $L = L(b)$ a L_b je minimálny prvok v $\overline{NL(B)}/\mathscr{L}$.

(b) Pre každé $b \in B$ platí: $L(b)$ je minimálny ideál v S s ohľadom na B vtedy a len vtedy, ak $L(b) \cap \overline{NL(B)} = L_b$.

Definícia 0.2 (pozri napr. [10]). Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Ľavý ideál L pologrupy S nazývame maximálnym ľavým ideálom pologrupy S s ohľadom na B, ak $L \subset S$ a $\overline{L} \cap B \neq \emptyset$ ($\overline{L} = S \setminus L$) a neexistuje taký ľavý ideál L' pologrupy S, že $L \subset L'$ a $\overline{L'} \cap B \neq \emptyset$.

Veta 0.2. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$.

α) Ľavý ideál L pologrupy S je maximálnym ľavým ideálom pologrupy S s ohľadom na množinu B práve vtedy, ak existuje také $b \in B$, že $N = NL(b)$ a L_b je maximálny prvok v $L(B)/\mathscr{L}$.

β) Pre každé $b \in B$ platí: $N(b)$ je maximálny práve vtedy, ak $\overline{NL(b)} \cap L(b) = L_b$. ($NL(b) = NL(\{b\})$).

1

Definícia 1.1. Nech S je pologrupa a Λ je neprázdna množina. Systém $\mathscr{H}_L = \{L_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, kde pre každé $\alpha \in \Lambda$ je L_α ľavý ideál v S nazveme nezávislým systémom ľavých ideálov v S, ak buď

(a) $L_\alpha = L_\beta$ pre každé $\alpha, \beta \in \Lambda$ (t.j. buď $\mathscr{H}_L = \{L = L_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, alebo $\mathscr{H}_L = \{L\}$, kde L je ľavý ideál v S), alebo

(b) existuje také $\alpha, \beta \in \Lambda$ ($|\Lambda| \geq 2$), že $L_\alpha \neq L_\beta$ a pre každé také $\mu, \nu \in \Lambda$, že $L_\mu \neq L_\nu$ je $L_\mu \not\subset L_\nu$ a $L_\nu \not\subset L_\mu$.

Znakom $\mathscr{M}_L$ ($\mathscr{M}_R$, $\mathscr{M}_O$) označme množinu všetkých nezávislých systémov ľavých (pravých, obojstranných) ideálov pologrupy (alebo v S). Množina $\mathscr{M}_L$ ($\mathscr{M}_R$, $\mathscr{M}_O$) je čiastočne usporiadaná a čiastočné usporiadanie na $\mathscr{M}_L$ ($\mathscr{M}_R$, $\mathscr{M}_O$) je definované množinovou inklúziou $\subseteq$.

Poznámka 1.1. V ďalšom budeme často uvádzať len definície pojmov a tvrdenia o týchto pojmoch o ľavých ideáloch pologrupy S, pričom analogické definície a tvrdenia o pravých (obojstraných) ideáloch v S nebudeme vždy uvádzať. Namiesto „$\mathscr{H}_L = \{L_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$“ budeme písať len „$\mathscr{H}_L$“.

Príklad 1.1. Ľahko sa dá ukázať, že množina všetkých maximálnych (minimálnych) ľavých ideáloch pologrupy S je nezávislý systém ľavých ideálov v S (v prípade, že je neprázdna).

Veta 1.1. Nech S je pologrupa. Potom:

(a) $\mathscr{M}_L \neq \emptyset$,

(b) ak L je ľavý ideál S, potom existuje také $\mathscr{H}_L \in \mathscr{M}_L$, že $L \in \mathscr{H}_L$,

(c) ak $\mathscr{H}_L \in \mathscr{M}_L$, potom existuje aspoň jeden maximálny nezávislý systém ľavých ideálov $\mathscr{H}^*_L \in \mathscr{M}_L$ taký, že $\mathscr{H}_L \subseteq \mathscr{H}^*_L$ (t.j. pre každé také $\mathscr{H}'_L \in \mathscr{M}_L$, že $\mathscr{H}_L \subseteq \mathscr{H}'_L$ je $\mathscr{H}'_L \subseteq \mathscr{H}^*_L$).

Dôkaz. Pravdivosť tvrdení v (a) a (b) je zrejmá. Dokážeme pravdivosť tvrdenia v (c). Nech $\mathscr{P}_L$ je množina všetkých takých prvkov z $\mathscr{M}_L$, z ktorých každý obsahuje $\mathscr{H}_L$. Znakom Q_L označme množinu všetkých takých prvkov z $\mathscr{P}_L$, že pre každé $\mathscr{H}^1{}_L, \mathscr{H}^2{}_L \in Q_L$ je buď $\mathscr{H}^1{}_L \subseteq \mathscr{H}^2{}_L$ alebo $\mathscr{H}^2{}_L \subseteq \mathscr{H}^1{}_L$. Položme $\mathscr{S}_L = \{\mathscr{H}_L | \mathscr{H}_L \in Q_L\}$. Potom $\mathscr{S}_L$ je podľa vety Hausdorffovej prvkom aspoň jedného maximálneho nezávislého systému $\mathscr{S}_L^* \in \mathscr{P}_L$ ľavých ideálov.

Príklad 1.2. Ľahko sa dá ukázať, že množina všetkých minimálnych ľavých ideálov pologrupy S je maximálnym nezávislým systémom ľavých ideálov v S s ohľadom na $B \subseteq S$ (v prípade, že je neprázdna).

Definícia 1.2 (pozri [9]). Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Systém $\mathscr{H}_L = \{L(b) \,|\, b \in B\}$ ľavých hlavných ideálov pologrupy S nazveme nezávislým systémom ľavých hlavných ideálov v S s ohľadom na B, ak buď

a) $L(a) = L(b)$ pre každé $a,b \in B$, alebo

b) existujú také $a,b \in B$ že $L(a) \neq L(b)$ a pre všetky $u,v \in B$ platí, že ak $L(u) \neq L(v)$, potom je $L(u) \not\subset L(v)$ a $L(v) \not\subset L(u)$.

Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \,|\, b \in B\}$ je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov v S s ohľadom na B. Znakom:

(a) $H(\mathscr{H}_L)$ budeme označovať množinu $\cup\{L(b) \,|\, b \in B\}$, t.j. $H(\mathscr{H}_L) = \cup\{L(b) \,|\, b \in B\}$ (t.j. $H(\mathscr{H}_L) = L(B)$).

Zrejme platí:

α) $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$

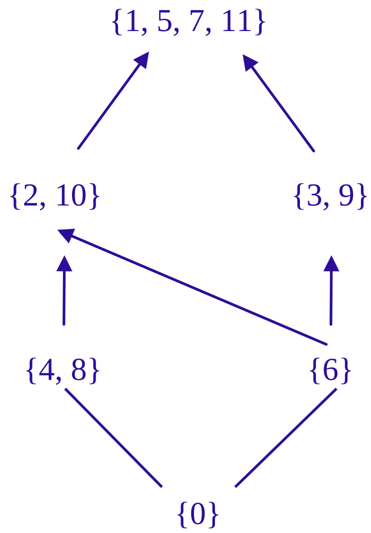
β) $H(\mathscr{H}_L)$ je ľavý ideál pologrupy S.

(b) $H(\mathscr{H}_L)/\mathscr{L}$ budeme označovať množinu všetkých takých prvkov $L_\alpha \in S/\mathscr{L}$, $a \in S$, že $L_a \subseteq H(\mathscr{H}_L)$.
Na príklade sa dá ukázať, že ľavý ideál L v $H(\mathscr{H}_L)$ nemusí byť aj ľavým ideálom podpologrupy $H(\mathscr{H}_L)$ pologrupy S a obrátene. V prípade, že L je ľavým ideálom podpologrupy $H(\mathscr{H}_L)$ (t. j. $H(\mathscr{H}_L)L \subseteq L$) budeme namiesto „$L$ je ľavým ideálom v $H(\mathscr{H}_L)$“ písať „L je ľavým ideálom podpologrupy $H(\mathscr{H}_L)$“.

Poznámka 1.2. V ďalšom pod „L je ľavý ideál v $H(\mathscr{H}_L)$“ budeme rozumieť, že „L je ľavý ideál pologrupy S a $L \subseteq H(\mathscr{H}_L$.

Príklad 1.3. Nech S_{12} je pologrupa zvyškových tried mod12.

α) Množina všetkých $\mathscr{L} \to \mathscr{R} - \mathscr{J}$ - triedy a ich usporiadanie v $S_{12}/\mathscr{J}$:



β) Nezávislý systém obojstranných (ľavých) hlavných ideálov v pologrupe S_{12} napr. $\mathscr{H}_L = \{\{2, 4, 6, 8, 10, 0\}, \{3, 6, 9, 0\}\}$. Potom $H(\mathscr{H}_L) = S_{12} \backslash \{1, 5, 7, 11\}$. Potom $S_{12} . 2 \neq H(\mathscr{H}_L) . 2$ a napr. $S_{12}. 3 = H(\mathscr{H}_L) . 3$.

Potom napr. a) $\mathscr{H}_L = \{L(10), L(3)\}$ je nezávislý systém obojstranných hlavných ideálov (teda aj ľavých) s ohľadom na $B_1 = B\{10, 3\}$.

b) $\mathscr{H}_L = \{L(8), L(9)\} = \{\{0, 4, 8\}, \{0, 6, 3, 9\}\}$ je nezávislý systém obojstranných hlavných ideálov s ohľadom na $B_2 = \{8, 9\}$.

c) Nech $\mathscr{H}_L$ je nezávislý systém obojstranných hlavných ideálov (teda aj ľavých) v S_{12} s ohľadom B_1. Potom hlavný ľavý ideál $L(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ pologrupy S_{12} nie ľavým hlavným ideálom pologrupy $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B_1 a je ľavým ideálom v $H(\mathscr{H}_L) = L(2) \cup L(8)$.

Lema 1.1. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov pologrupy S s ohľadom na B. Potom pre každé $a \in H(\mathscr{H}_L)$ platí:

(a) L_a je maximálny prvok v $H(\mathscr{H}_L)/\mathscr{L}$ práve vtedy, ak existuje taký prvok $b \in B$, že $L_a = L_b$.

(b) L_a je minimálny prvok v $\overline{NL(B)}/\mathscr{L}$ práve vtedy, ak existuje taký prvok $b \in B$, že $L_a = L_b$.

Dôkaz. (a) I. Predpokladajme, že L_a, $a \in H(\mathscr{H}_L)$ je maximálny prvok v $H(\mathscr{H}_L)/\mathscr{L}$ a pre každý prvok $b \in B$ je $L_a \neq L_b$. Podľa predpokladu existuje taký prvok $d \in B$, že $a \in L(d)$. Potom $a \in L_a \subseteq L(a) \subseteq L(d)$ z čoho $L_a = L_d$. To je spor s predpokladom. Z toho vyplýva, že existuje taký prvok $b \in B$, že $L_a = L_b$.

II. Predpokladajme, že $L_a = L_b$, $a \in H(\mathscr{H}_L)$ a $b \in B$ a L_a nie je maximálny prvok v $H(\mathscr{H}_L)/\mathscr{L}$. Potom existuje taký prvok $x \in H(\mathscr{H}_L)$, že $L_a < L_x$. Potom podľa predpokladu existuje taký prvok $d \in B$, že $x \in L(d)$, a $L_a < L_x \leq L_d$ a teda $L(b) \subset L(d)$. To je spor s predpokladom.

Z úvah v I. a II. vyplýva pravdivosť tvrdenia v (a).

(b) I. Predpokladajme, že L_a, $a \in H(\mathscr{H}_L) \cap \overline{NL(B)}$ je minimálny prvok v $\overline{NL(B)}/\mathscr{L}$ a pre každé $b \in B$ je $L_a \neq L_b$. Potom podľa predpokladu existuje také $d \in B$, že $L_d < L_a$ a také $d \in B$, že $a \in L(b)$, teda platí $L(d) \subset L(b)$. To je spor s predpokladom. Z predchádzajúceho vyplýva, že existuje také $b \in B$, že $L_a = L_b$.

II. Predpokladajme, že $L_a = L_b$, $a \in \overline{NL(B)} \cap H(\mathscr{H}_L)$, $b \in B$ a L_a nie je minimálny prvok v $\overline{NL(B)}/\mathscr{L}$. Potom existuje taký prvok $x \in \overline{NL(B)} \cap H(\mathscr{H}_L)$, že $L_x < L_a$. Potom existuje taký prvok $d \in B$, že $L_d \leq L_x < L_a = L_b$ a teda platí $L(d) \subset L(b)$, čo je spor s predpokladom. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že $L_a = L_b$ je minimálny prvok v $\overline{NL(B)}/\mathscr{L}$.
Z úvah v I. a II. vyplýva pravdivosť tvrdenia v (b).

Veta 1.2. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov v S s ohľadom na B. Položme $\overline{NL(B)}_H = \overline{NL(B)} \cap H(\mathscr{H}_L)$ a $NL(B)_H = H(\mathscr{H}_L) \setminus \overline{NL(B)}_H$. Potom platí:

(a) $\overline{NL(\mathscr{H})}_H = \cup\{L_b \mid b \in B\}$.

(b) Ak $NL(B)_H \neq \emptyset$, potom $NL(B)_H$ je ľavý ideál v $H(\mathscr{H}_L)$.

Dôkaz. (a) I. Nech $x \in \overline{NL(B)} \cap H(\mathscr{H}_L)$. Predpokladajme, že $x \notin L_b$ pre každé $b \in B$. Podľa predpokladu je $x \in H(\mathscr{H}_L)$. Potom existuje taký prvok $d \in B$, že $L_x < L_d$ a existuje taký prvok $c \in B$, že $L_c \leq L_x$. Z toho vyplýva, že $L(c) \subset L(d)$. To je spor s tým, že $c, b \in B$. Z toho vyplýva, že existuje také $b \in B$, že $x \in L_b$, t.j. $x \in \cup\{L_b \mid b \in B\}$.

II. Nech $x \in \cup\{L_b \mid b \in B\}$. Potom existuje také $b \in B$, že $x \in L_b$. Z toho podľa predpokladu dostaneme, že $x \in \overline{NL(\mathscr{H}_L)}$.
Z úvah v I. a II. vyplýva tvrdenie v (a).

(b) Predpokladajme, že existuje také $x \in NL(\mathscr{H}_L)_H$ a také $s \in S$, že $sx \notin NL(\mathscr{H}_L)_H$. Potom $sx \in \overline{NL(\mathscr{H}_L)}_H$. Potom podľa predpokladu existuje také $b \in B$, že $x \in L(b)$. Potom $sx \in L(b)$ a podľa vety 1.2 je $sx \in L_b$. Potom $L(b) = L(sx) = sx \cup Ssx \leq L(x)$. Potom $L_b \leq L_x$. Z toho podľa lemy 1.1 vyplýva, že $x \in L_x = L_b$. To je spor s predpokladom. Z predchádzajúceho vyplýva pravdivosť tvrdenia v (b).

Definícia 1.3. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov v S. Ľavý ideál L pologrupy S nazveme maximálnym ideálom v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B práve vtedy, ak $L \subset H(\mathscr{H}_L)$ a neexistuje taký ľavý ideál L' pologrupy S, že $L' \subset H(\mathscr{H}_L)$ a $L \subset L'$.

Definícia 1.4. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov v S. Ľavý ideál L pologrupy S nazveme minimálnym ľavým ideálom v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na množinu B práve vtedy, ak $L \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, $L \cap B \neq \emptyset$ a neexistuje taký ľavý ideál L' pologrupy S (alebo v S), že $L' \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ a $L' \subset L$ a $L' \cap B \neq \emptyset$.

Poznámka 1.3. Ak platí, že „L je maximálny ľavý ideál v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B“, neznamená to, že L je maximálny ľavý ideál podpologrupy $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B. Na príklade 1.4 sa dá ukázať, že napr. maximálny ľavý ideál pologrupy $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B, nie je maximálnym ľavým ideálom v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B.

Veta 1.3. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov v S s ohľadom na B. Nech L je ľavý ideál pologrupy S a $L \subset H(\mathscr{H}_L)$. Potom:

(a) L je maximálny ideál v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B práve vedy, ak existuje taký prvok $b \in B$, že $H(\mathscr{H}_L)\backslash L = L_b$.

(b) L je minimálny ľavý ideál v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B práve vedy, ak existuje také $b \in B$, že $L = L(b)$.

Dôkaz. Pravdivosť tvrdení (a) a (b) vo vete 1.3 dostaneme bezprostredne podľa lemy 1.1, vety 0.1 a vety 0.2.

Znakom $\mathscr{N}_L$ ($\mathscr{N}_R$,$\mathscr{N}_O$) budeme označovať množinu všetkých nezávislých systémov hlavných ľavých (pravých, obojstranných) ideálov pologrupy S s ohľadom na B. Množina $\mathscr{N}_L$ ($\mathscr{N}_R$, $\mathscr{N}_O$) je čiastočne usporiadaná a čiastočné usporiadanie na $\mathscr{N}_L$ ($\mathscr{N}_R$, $\mathscr{N}_O$) je definované množinovou involúciou.

Nasledujúca veta je dokázaná v práci [8] (pozri vetu 1.2 v [8]) a je bezprostredným dôsledkom vety 1.1.

Veta 1.4. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Potom:

(a) $\mathscr{N}_L \neq \emptyset$.

(b) Každý hlavný ľavý ideál je prvkom aspoň jedného nezávislého systému $\mathscr{H}_L \in \mathscr{N}_L$ s ohľadom na B.

(c) Každý $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ nezávislý systém hlavných ľavých ideálov v S s ohľadom na B je prvkom aspoň jedného maximálneho nezávislého systému hlavných ľavých ideálov $\mathscr{H}^*_L \in \mathscr{N}_L$ s ohľadom na B (t.j. pre každé $\mathscr{H}'_L \in \mathscr{N}_L$ s ohľadom na B a také, že ak $\mathscr{H}_L \subseteq \mathscr{H}'_L$, potom je $\mathscr{H}'_L \subseteq \mathscr{H}^*_L$).

V práci [8] je dokázaná aj nasledujúca veta.

Veta 1.5. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém hlavných ľavých ideálov v S s ohľadom na B. Potom nasledujúce tvrdenia su ekvivalentné:

(a) $\mathscr{H}_L$ je maximálny nezávislý systém hlavných ľavých ideálov v S s ohľadom na B.

(b) Pre každé $a \in S$ existuje také $b \in B$, že buď $L(b) \subseteq L(a)$, alebo $L(a) \subseteq L(b)$.

Poznámka 1.4. V prípade, že $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je maximálny nezávislý systém hlavných ľavých ideálov v S s ohľadom na B, budeme ho v ďalšom označovať $\mathscr{H}^*_L = \{L(b) \mid b \in B^*\}$.

Poznámka 1.5. Podľa lemy 1.1 ľavý ideál L pologrupy S a $L \subset H(\mathscr{H}_L)$ je maximálnym ľavým ideálom v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B práve vtedy, ak existuje taký prvok $b \in B$, že $L = H(\mathscr{H}_L) \setminus L_b$. Maximálny ľavý ideál $L = H(\mathscr{H}_L) \setminus L_b$, $b \in B$ budeme označovať L^b.

Na základe predchádzajúcich tvrdení (napr. pozri vetu 1.3) je zrejmá nasledujúca veta:

Veta 1.6. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém hlavných ľavých ideálov v S s ohľadom na B. Položme $\mathscr{H}^L = \{L^b \mid b \in B\}$. Potom

(a) $\mathscr{H}^L$ je množina všetkých maximálnych ideálov $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B.

(b) $\mathscr{H}^L$ je nezávislý systém maximálnych ľavých ideálov v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B.

2

Definícia 2.1. Nech $\mathscr{H}_L$ je systém ľavých hlavných ideálov pologrupy S s ohľadom na $B \subseteq S$. Budeme hovoriť, že $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje (alebo v $H(\mathscr{H}_L)$ existuje) maximálny ľavý ideál L^* s ohľadom na B, ($B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$) ako pre každý vlastný ľavý ideál L v $H(\mathscr{H}_L)$ a $L \neq H(\mathscr{H}_L)$ je $L \subseteq L^*$.

V ďalšom budeme vyšetrovať vlastnosti maximálnych ideálov L^* v $H(\mathscr{H}^*_L)$ s ohľadom na B, a tým zovšeobecníme doteraz známe výsledky a uvedieme aj nové základné výsledky (pozri napr. [14]) o maximálnych ideáloch L^* v pologupe S.

Definícia 2.2. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = \{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém hlavných ľavých ideálov v S s ohľadom na B a nech $\mathscr{H}^L = \{L^b \mid b \in B\}$ je nezávislý systém (všetkých) maximálnych ľavých ideálov v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B. Podmnožinu $B\mathscr{H}^L \subseteq B$ nazveme bázou nezávislého systému (všetkých) maximálnych ideálov pologrupy S s ohľadom na B, ak

(a) $c \in B\mathscr{H}^L$, potom existuje práve jedno také $b \in B$, že $c \in L_b$ a teda každému $c \in B\mathscr{H}^L$ je priradený práve jeden maximálny ľavý ideál L^b $(= H(\mathscr{H}_L) \setminus L_b) \in \mathscr{H}^L$.

(b) Pre každé $c,d \in B\mathscr{H}^L$ platí: Ak $c \neq d$, $c \in L_u$, $d \in L_v$, $u,v \in B$, potom $L_u \neq L_v$, t.j. $L^u \neq L^v$.

(c) $L^b \in \mathscr{H}^L$, potom existuje práve jedno $c \in B\mathscr{H}^L$ také, že $b \in L_c$, t.j. práve jeden maximálny ľavý ideál v $H(\mathscr{H}_L) \setminus L_c = H(\mathscr{H}_L) \setminus L_b = L^b \in \mathscr{H}^L$.

Poznámka 2.1. Ak $\mathscr{H}^L = \{L^b \mid b \in B\}$ je maximálny nezávislý systém maximálnych ľavých ideálov v $H(\mathscr{H}^L)$, potom ho budeme označovať takto: $\mathscr{H}^{*L} = \{L^b \mid b \in B^*\}$.

Veta 2.1. Nech $B\mathscr{H}^{*L}$ je báza maximálneho nezávislého systému maximálnych ľavých ideálov v S s ohľadom na $B \subseteq S$. Nech $H(\mathscr{H}^*_L)$ obsahuje maximálny ľavý ideál L^* s ohľadom na B. Potom

(a) $|\mathscr{H}^{*L}| = 1$, t.j. $B\mathscr{H}^{*L} = \{b\}$, $b \in B^*$.

(b) $H(\mathscr{H}^*_L) = L(b)$, $b \in B \subseteq L_b$, $b \in B\mathscr{H}^{*L}$.

(c) $L^* = L(b) \setminus L_b$, $b \in B$.

Dôkaz. (a) Predpokladajme, že $|B\mathscr{H}^{*L}| \geq 2$. Nech $b, c \in B\mathscr{H}^{*L}$, $b \neq c$, $L^b{}_H = H(\mathscr{H}_L)\backslash L_b$ a $L^c{}_H = H(\mathscr{H}_L)\backslash L_c$. Potom s ohľadom na predpoklad $L_b \neq L_c$ a teda aj $L^b{}_H \neq L^c{}_H$, $L^b{}_H, L^c{}_H$, sú maximálne vlastné ľavé ideály v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na B. Potom $L^b{}_H \not\subset L^c{}_H$ a $L^c{}_H \not\subset L^b{}_H$. Pre každý z ideálov $L^b{}_H, L^c{}_H$ je $L^b{}_H \subset H(\mathscr{H}_L)$ a $L^c{}_H \subset H(\mathscr{H}_L)$. Z toho vyplýva $H(\mathscr{H}_L)$, neobsahuje L^*. To je spor s predpokladom, teda je tvrdenie v (a) pravdivé.

(b) Podľa vety 1.3 a podľa predpokladu pre každý prvok $x \in S$ existuje také $b \in B$ ($B \subseteq L_b$, $b \in B\mathscr{H}^{*L} = \{b\}$, $b \in B$), že buď $L_b \leq L_x$, alebo $L_x < L_b$. Potom podľa predpokladu pre každé $x \in H(\mathscr{H}_L)$ je buď $x \in L_b$, alebo $x \in L(b)\backslash L_b$. To znamená, že $H(\mathscr{H}_L) \subseteq L(b)$ a je zrejmé, že $L(b) \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ pre každé $b \in B$. Z predchádzajúceho vyplýva pravdivosť tvrdenia v (b).

(c) Podľa lemy 0.1 a tvrdenia v (b) dostaneme pravdivosť tvrdenia v (c).

Veta 2.2. Nech $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje maximálny ľavý ideál L^* s ohľadom na B pologrupy S. Nech $L^* = L(b)\backslash L_b$, $b \in B$ a $L(b)c \cap L_b \neq \emptyset$ práve vtedy, ak $c \in L_b$. Potom

(a) $L(b)c = L(b)$ práve vtedy, ak $c \in L_b$.

(b) L_b je podpologrupa v $L(b)$.

Dôkaz. a) Nech c je ľubovoľný prvok z L_b. Potom podľa predpokladu $L(b)c \cap L(b) \neq \emptyset$. Nech $d \in L(b)c \cap L_b$. Potom $L(b) = L(d) \subseteq L(b)c \subseteq L(b)$. Potom $L(b)c = L(b)$ pre každé $c \in L_b$.
Predpokladajme, že $c \in L(b)$ a $c \notin L_b$. Potom $c \in \overline{L}_b = H(\mathscr{H}_L)\backslash L_b$, a podľa lemy 0.1 je $L(b)c \subseteq \overline{L}_b$. Z predchádzajúcich úvach vyplýva pravdivosť tvrdenia v (a).

b) Nech c, d sú ľubovoľné dva prvky z L_b. Potom podľa tvrdenia v (a) je $L(b)(cd) = L(b)d = L(b)$ a $cd \in L_b$. Z toho dostaneme pravdivosť tvrdenia v (b).

Lema 2.1. Nech S je pologrupa a $b \in S$. Nech $\overline{L}_b = L(b)\backslash L_b$, $\overline{L}_b \neq \emptyset$ a L_b je podpologrupa v S. Potom patí:

L_b je silná podpologrupa podpologrupy $L(b)$ (ďalej len v $L(b)$) práve vtedy, ak $\overline{L}_b$ je obojstranný ideál v $L(b)$ (alebo $\overline{L}_b = \emptyset$).

Dôkaz. I. Predpokladajme, že L_b je silná podpologrupa v podpologrupe v $L(b)$. Podľa lemy 0.1 je $\overline{L}_b$ ľavý ideál v $L(b)$ (aj v S). Ukážeme, že $\overline{L}_b$ je aj pravým ideálom v pologrupe $L(b)$. Predpokladajme, že existuje taký prvok $a \in \overline{L}_b$ a taký prvok $c \in L(b)$, že $ac \notin \overline{L}_b$. Potom $ac \in L_b$, z čoho dostaneme, že $a \in L_b$. To je spor s predpokladom. Z predchádzajúceho vyplýva, že $\overline{L}_b$ je obojstranný ideál v $L(b)$.

II. Predpokladajme, že $\overline{L}_b$, $b \in S$ je obojstranný ideál v $L(b)$. Ďalej predpokladajme, že existujú také prvky $a, c \in L(b)$, že $ac \in L_b$ a napr. $a \notin L_b$. Potom podľa predpokladu $ac \in \overline{L}_b$. To je spor s predpokladom. Z toho vyplýva, že $a \in L_b$. Podobne sa dá ukázať, že aj $c \in L_b$. Z predchádzajúceho vyplýva, že L_a je silná podpologrupa v $L(b)$.

Z úvah v I. a II. vyplýva pravdivosť tvrdenia v leme 2.1.

Veta 2.3. Nech $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje maximálny ľavý ideál L^* s ohľadom na B. Nech $L^* = L(b)\backslash L_b$, $b \in B$ a nech L_b je silná podpologrupa podpologrupy $L(b)$. Potom podpologrupa L_b je zľava jednoduchou podpologrupou v $L(b)$.

Dôkaz. Podľa predpokladu $L(b)c \cap L_b \neq \emptyset$ pre každé $c \in L_b$. Nech $d \in L(b)c \cap L_b$. Potom $L(d) \subseteq L(b)c \subseteq L(b)$. Podľa predpokladu $L(d) = L(b)$. Potom $L(b)c = L(b)$ pre každé $c \in L_b = (L^* \cup L_b)c = L^*c \cup L_bc = L^* \cup L_b$ pre každé $c \in L_b$. Podľa predpokladu a lemy 2.1 $L^*c \subseteq L^*$ a $L_bc \subseteq L_b$. Z toho vyplýva, že $L_bc = L_b$ (aj $L^*c = L^*$) pre každé $c \in L_b$, t.j. L_b je zľava jednoduchá podpologrupa v $L(b)$.

Veta 2.4. Nech $e_r \in H(\mathscr{H}_L)$ je pravou jednotkou v $H(\mathscr{H}_L)$ a $\overline{L}_b = L(b)\backslash L_b \neq \emptyset$ pre každé $b \in B$. Potom:

(a) Existuje práve jedno L_b, $b \in B$ také, že $e \in L_b$.

(b) $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje maximálny ľavý ideál L^* s ohľadom na B a $L^* = \overline{L}_b$, $b \in B$ ($e \in L_b$).

Dôkaz. Podľa predpokladu existuje také $b \in B$, že $e \in L(b)$, $b \in B$. Predpokladajme, že $e \notin L_b$. Potom $e \in \overline{L}_b = L(b)\backslash L_b$. Potom podľa lemy 0.1 je $be \in \overline{L}_b$ a podľa predpokladu $be = b$. Z toho vyplýva, že $b \in L_b \cap \overline{L}_b \neq \emptyset$. To je spor. Ďalej predpokladajme, že existuje také $d \in B$, že $e \in L(d)$ a $L(d) \neq L(b)$. Z predchádzajúceho vyplýva, že $e \in L_d \cap L_b$. Potom $L(e) = L(d)$ a $L(e) = L(b)$ a teda $L(d) = L(b)$. To je spor predpokladom. Z predchádzajúceho vyplýva pravdivosť tvrdenia v (a).
Predpokladajme, že existuje také $d \in B$, že $L_d \neq L_b$. Potom $L_b \subseteq H(\mathscr{H}_L)\backslash L_d$. Potom $de \in H(\mathscr{H}_L)\backslash L_d$ a podľa predpokladu $d = de$. Potom $d \in H(\mathscr{H}_L)\backslash L_d$ a $d \in L_d$. To je spor. Z predchádzajúceho vyplýva, že $H(\mathscr{H}_L) = L(b)$, $b \in B \subseteq L_b$ ($e \in L_b$). Potom $L^* = L(b)\backslash L_b$, $b \in B$, teda je pravdivé tvrdenie v (b).

Definícia 2.3. Podpologrupu S nazveme parciálnou ľavou grupou, ak S obsahuje takú silnú podpologrupu H, že pre každé $a \in H$ a každé $b \in S$ má rovnica $xa = b$ práve jedno riešenie.

Veta 2.5. Nech $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje maximálny ľavý ideál L^* s ohľadom na B. Nech

(a) $H(\mathscr{H}_L) = L(b)$, $L^* = L(b)\backslash L_b$, $b \in B$ a L_b je silná podpologrupa podpologrupy $L(b)$.

(b) $E(L_b) \neq \emptyset$ a $e \in E(L_b)$.

Potom platí:

(α) e je pravou jednotkou podpologrupy $L(b)$.

(β) L^* je obojstranný ideál v $L(b)$.

(γ) $L(b)$ je parciálna ľavá grupa.

(δ) L_b je ľavou grupou podpologrupy $L(b)$.

Dôkaz. α) Tvrdenie v (α) je zrejmé.

β) Podľa predpokladu L^* je ľavý ideál v $L(b)$. Ukážeme, že L^* je aj pravý ideál v $L(b)$. Predpokladajme, že existuje taký prvok $a \in L^*$ a taký prvok $c \in L(b)$, že

$ac \notin L^*$. Potom $ac \in L_b$ a teda $a \in L_b$, čo je spor s predpokladom. Z toho vyplýva, že je pravdivé tvrdenie v (β).

γ) Podľa predpokladu a podľa vety 2.2 je $L(b) = L(b)a$ pre každé $a \in L_b$. Potom pre každé $a \in L_b$ a každé $c \in L(b)$ existuje také $x \in L(b)$, že $xa = c$.

1) Nech a je ľubovoľný prvok L_b. potom podľa predpokladu (v (a)), existuje taký prvok $\bar{a} \in L_a$, že $\bar{a}\,a = e$. Potom $a\bar{a} \in L_b$ a podľa tvrdenia v (α) je $(a\bar{a})(a\bar{a}) = a(\bar{a}\,a)\bar{a} = (ae)\bar{a} = a\bar{a}$, t.j. $e' = a\bar{a} \in E(L_a)$.

2) Ukážeme, že existuje práve jedno $x \in L(b)$ také, že $xa = c$.
Predpokladajme, že existujú také $x_1, x_2 \in L(b)$, $(x_1 \neq x_2)$, že $x_1 a = c$ a $x_2 a = c$. Potom $(x_1 a)\bar{a} = c\bar{a}$ a $(x_2 a)\bar{a} = c\bar{a}$ a podľa predchádzajúceho $x_1 e' = x_2 e'$. Potom podľa tvrdenia v (a) dostaneme, že $x_1 = x_2$. Podľa predpokladu v (a) a z predchádzajúceho vyplýva pravdivosť tvrdenia v (γ).

δ) Podľa predpokladu a vety 2.2 podpologrupa L_a je zľava jednoduchou pologrupou. Podľa tvrdenia v γ) pre každé $a, c \in L_b = L(b)$ má rovnica $xa = c$ práve jedno riešenie. Z toho podľa predpokladu dostaneme, že $x \in L_a$. Z predchádzajúceho vyplýva, že L_b je ľavá grupa (definíciu ľavej grupy pozri napr. v [1]).

Príklad 2.1. Nech $S_2 = \{a, b, c, d, g, h\}$ a binárna operácia $\circ$ na S_2 je definovaná multiplikatívnou tabuľkou 2.1. Potom $S_2 = (S_2, \circ)$ je pologrupa.

$\circ$	a	b	c	d	g	H
a	a	a	a	a	a	A
b	b	b	b	b	b	B
c	a	b	c	c	g	H
d	a	b	d	d	g	H
g	a	b	g	g	g	G
h	a	b	h	h	h	H

Tab. 2.1

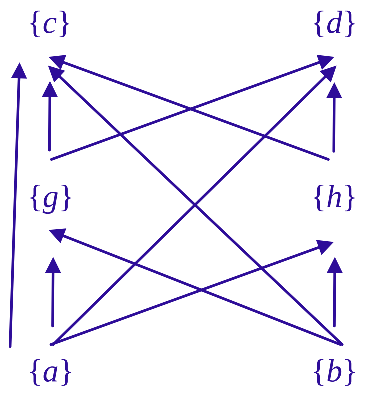
Všetky:

a) $\mathscr{L}$ - triedy a ich usporiadanie $S_2/\mathscr{L}$.

$$\begin{tikzcd} \{c, d\} \\ \{g, h\} \arrow[u] \\ \{a, b\} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

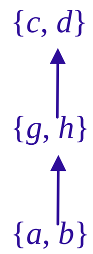
Tab. 2.2

b) $\mathscr{R}$ - triedy a ich usporiadanie $S_2/\mathscr{L}$:



Tab. 2.3

c) $\mathscr{J}$ - triedy a ich usporiadanie v $S_2/\mathscr{J}$:



Tab. 2.4

Potom $S/\mathscr{L} = S/\mathscr{J}$.

Na základe pojmov a tvrdení uvedených v tejto práci platia nasledovné vzťahy.

A) Nech pologrupa S je pologrupa S_2 a nech $B = \{c, d\} \subseteq S_2$. Potom $\mathscr{H}_L = \{L(c),\ c \in B\}$ (alebo $L(d)$) je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov pologrupy S_2 s ohľadom na B. $H(\mathscr{H}_L) = L(c)$ (alebo $L(d)$). S_2 obsahuje maximálny ľavý ideál $L^* = \{a, b, g, h\}$ s ohľadom na $B \subseteq S_2$ a napr. $L^* = \{a, b, c, d, g, h\}\backslash\{c, d\}$. Potom $L^* = \{a, b, g, h\}$. $L_c = \{c, d\}$ je silná podpologrupa podpologrupy $L(c)$. Pre každé $u \in L_c = \{c, d\}$ a každé $v \in L(c) = \{a, b, c, d, g, h\}$ má rovnica $xu = v$ práve jedno riešenie v $L(c)$. Potom S_2 je parciálna ľavá grupa a L_c je ľavá grupa. (Pravdivosť tvrdení v A) a v B) dostaneme aj pomocou tabuľky 2.1.)

B) Nech pologrupa S je pologrupa S_2 a nech $B = \{g, h\} \subseteq S_2$. Potom $\mathscr{H}_L = \{L(h)\}$ je nezávislý systém hlavných ľavých ideálov v S_2 s ohľadom na B. $H(\mathscr{H}_L) = L(h) = \{a, b, g, h\}$. Podpologrupa S_2 obsahuje maximálny ľavý hlavný ideál $L^* = L(h)\backslash L_h$, kde $L_h = \{g, h\}$ a teda $L^* = \{a, b, g, h\}\backslash\{g, h\} = \{a, b\}$. $L_h = \{g, h\}$ je silná podpologrupa v $L(h)$ (a nie v S_2). Pre každé $b \in L(h)$ a každé $a \in L_h$ má rovnica $xa = b$ práve jedno riešenie v $L(h)$. Potom $L(h)$ je parciálna ľavá grupa a L_h je ľavá grupa. Pravdivosť tvrdení v A) a v B) dostaneme aj pomocou tabuľky 2.1.

Veta 2.6. Nech $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje maximálny ľavý ideál L^* s ohľadom na B. Nech $H(\mathscr{H}_L) = L(b)$, $L^* = L(b) \backslash L_b$, $b \in B$ a L_b má aspoň dva prvky a $L(b)c = Sc$ práve vtedy, ak $c \in L_b$. Potom L_b je podpologrupa v $L(b)$.

Dôkaz. Podľa predpokladu L_b má aspoň dva prvky a nech $c \in L_b$. Ďalej predpokladajme, že $L(b)c \cap L_b = \emptyset$. Potom podľa predpokladu $Sc \cap L_b = \emptyset$ a $L^* \cup L(c) = L^* \cup \{c\} \subset L(b)$. To je spor s predpokladom. Potom pre každé $c \in L_b$ je $L(b)c \cap L_b \neq \emptyset$. Nech $d \in L(b)c \cap L_b$. Potom $L(d) \subseteq L(b)c \subseteq L(b)$. Z toho podľa predpokladu vyplýva $L(b)c = L(b)$ pre každé $c \in L_b$ a podobne ako vo vete 2.2 sa dá ukázať, že $L(b)c = L(b)$ práve vtedy, ak $c \in L_b$ a teda $c \in L(b)c$ pre každé $c \in L_b$. Z toho podľa vety 2.2 dostaneme, že L_b je podpologrupa v $L(b)$.

Definícia 2.4. (pozri napr. [15]). Pologrupu S nazveme obojstrannou, ak každý jej ideál je obojstranný.

Definícia 2.5. Pologrupu S nazývame parciálnou grupou, ak existuje taká silná podpologrupa H, že pre každé $a,b \in H$ rovnice $xa = b$ a $ay = b$ majú práve jedno riešenie v H.

Veta 2.7. Nech S je obojstranná pologrupa. Nech $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje maximálny obojstranný ideál M^* s ohľadom na B. Nech $\overline{M}^* = H(\mathscr{H}_L) \backslash M^*$ obsahuje aspoň dva prvky a nech pre každé $a,b \in B$ je $L(b)a = Sa$. Potom

(a) $\overline{M}^* = H(\mathscr{H}_L) \backslash M^*$ je grupa.

(b) $H(\mathscr{H}_L)$ je parciálna grupa.

Dôkaz. Najprv dokážeme, že pre každé $a \in S$ je (α) $L(a) = J(a)$ a (β) $L_a = J_a$.
(α) I. Je zrejmé, že $L(a) = a \cup Sa \subseteq a \cup Sa \cup aS \cup SaS = J(a)$.
II. Podľa predpokladu $L(a)$ je obojstranný ideál v S. Potom $aS \subseteq L(a)$ a $SaS = S(aS) \subseteq L(a)$. Potom je zrejmé, že $J(a) \subseteq L(a)$.
Z I. a II. vyplýva pravdivosť tvrdenia v (α).
(β) I. Nech $d \in L_a$. Potom podľa predpokladu a podľa tvrdenia v (α) platí $J(d) = L(d) = L(a) = J(a)$. Z toho vyplýva, že $L_a \subseteq J_a$.
II. $c \in J_a$. Potom podľa predpokladu a tvrdenia v (α) je $L(c) = J(c) = J(a) = L(a)$. Z toho vyplýva, že $J_a \subseteq L_a$.
Z I. a II. vyplýva pravdivosť tvrdenia v (β).

a) I. Podľa tvrdenia v (α), v (β) a podľa vety 2.1 je $H(\mathscr{H}_L) = L(b)$, $M^* = L^* = L(b) \backslash L_b$, $b \in B \subseteq L_b$. Predpokladajme, že existuje také $a \in L_b$, že $L(b)a \cap L_b = \emptyset$. Potom podľa predpokladu je $Sa \cap L_b = \emptyset$, a platí $M^* \subset M^* \cup L(a) = M^* \cup \{a\} \subset L(b)$. To je spor s predpokladom. Potom pre každé $c \in L_b$ je $L(b)c \cap L_b \neq \emptyset$, $b \in B$. Z toho podľa vety 2.2 a podľa predpokladu je $L(b)c = L(b)$ práve vtedy, ak $c \in L_b$ a L_b je podpologrupa v $L(b)$ (aj v S). Podľa predpokladu a lemy 2.1 je L_b silná podpologrupa v $L(b)$. Potom podľa vety 2.3 je L_b zľava jednoduchá podpologrupa v $L(b)$.
II. Podľa tvrdenia v I. je L_b silná podpologrupa v $L(b)$. Potom podľa predpokladu $cL(b) \cap L_b \neq \emptyset$ práve vtedy, ak $c \in L_b$. Potom analogicky ako v I. sa dá dokázať, že L_b je sprava jednoduchá pologrupa v $L(b)$.
Z tvrdení v I. a v II. dostávame, že pre každé a, $b \in L_b$ majú rovnice $xa = b$ a $ya = b$ riešenie v L_b. Z toho vyplýva, že L_b je grupa, t.j. je pravdivé tvrdenie v (a).

b) Z tvrdení v I. a v II. v a) a podľa vety 2.5 dostaneme, že $L(b)$ je parciálna ľavá grupa a naviac podľa analogickej vety k vete 2.5 pre pravé hlavné ideály v S dostaneme, že $L(b)$ je pravá parciálna grupa. Z toho vyplýva, že $L(b)$ je parciálnou grupou, teda platí tvrdenie v (b).

Veta 2.8 (pozri [8]). Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech $\mathscr{H}_L = (\{L(b) \mid b \in B\}$ je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov v S. Nech $\overline{L}_b = L(b) \backslash L_b\ (= \emptyset)$, $b \in B$ a $E(L_b) \neq \emptyset$. Nech $\overline{L}_b$ je obojstranný ideál v $L(b)$ a $L(b)a = L(b)$ práve vtedy, ak $a \in L_b$. Položme $G_e = eL(b)$. Potom

(a) G_e je podpologrupa.

(b) $D_r(G_e) = G_e \cap L_b$ a $D_r(G_e)$ je grupa.

(c) $D_r(G_e) = D_l(G_e)$.

(d) G_e je parciálna grupa.

Dôkaz. a) Nech $e \in E(G_e)$. Potom e je pravou jednotkou v $L(b)$. Je zrejmé, že e je pravou jednotkou v $L(b)$. Nech $u, v \in G_e$, potom existujú také prvky $x, y \in L(b)$, že $u = ex$ a $v = ey$. Potom $uv = e(xe)y = exy \in G_e$. Z predchádzajúceho vyplýva tvrdenie (a).

b) 1) Nech $a \in D_r(G_e)$ (t. j. $a \in eL(b)$ a $eL(b)a = eL(b)$). Predpokladajme, že $a \notin L_b$. Potom $a \in \overline{L}_b$ a podľa predpokladu $G_e = G_e a \subseteq \overline{L}_b$. To je spor. Z toho vyplýva

$$D_r(G_e) \subseteq G_e \cap L_b\ . \tag{1}$$

2) Nech $a \in G_e \cup L_b$. Potom podľa predpokladu $L(b)a = L(b)$. Potom $G_e a = G_e$ a platí

$$G_e \cup L_b \subseteq D_r(G_e)\ . \tag{2}$$

3) Zrejme e je ľavou jednotkou pologrupy G_e. Podľa b) $(G_e a = G_e)$ pre každé $a \in D_r(G_e)$ existuje také $a' \in G_e'$, že $a'a = e$. Z toho a z a) vyplýva, že G_e je grupa.
Z úvah b) (1, 2, 3) vyplýva pravdivosť tvrdenia v (b).

c) I. Nech $a \in D_r(G_e)$ $(G_e a = G_e)$. Podľa tvrdenia v (b) existuje taký prvok $a' \in G_e$, že $aa' = e$. Predpokladajme, že $a' \in \overline{L}_b$. Potom podľa predpokladu $e = aa' \in \overline{L}_b$. To je spor. Potom podľa (a) pre každé $b \in G_e = eb = aa'b = a(a'b) \in aG_e$. Z toho vyplýva, že $G_e \subseteq aG_e$ a teda $a \in D_l(G_e)$. Potom

$$D_r(G_e) \subseteq D_l(G_e)\ . \tag{3}$$

II. Nech $a \in D_l(G_e)$. Predpokladajme, že $a \in \overline{L}_b$. Potom podľa predpokladu $e \in G_l = aG_l \subseteq \overline{L}_b$, čo je spor. Potom $a \in L_b$ a podľa predpokladu $L(b) = L(b)a$. Potom $G_e = G_e a$, t. j. $a \in D_r(G_e)$. Potom

$$D_l(G_e) \subseteq D_r(G_e)\ . \tag{4}$$

Z (3) a (4) vyplýva pravdivosť tvrdenia v (c).

Veta 2.9. Nech S je pologrupa a $B \subseteq S$. Nech sú splnené predpoklady vety 2.8. Nech $e, f \in E(L_b)$ $(e \neq f)$. Potom parciálne grupy G_e a G_f $(= L(b))$ sú izomorfné.

Dôkaz. Nech je zobrazenie φ: $G_e \to G_f$ definované takto:

$$\varphi(x) = fx \Leftrightarrow \varphi(x) = fx \text{ pre každé } x \in G_e\,. \tag{5}$$

Ukážeme, že zobrazenie φ: $G_e \to G_f$ je izomorfným zobrazením G_e na G_f.

1) Pre každé $x, y \in G_e$ je $\varphi(x, y) = f(x, y) = fx.fy = \varphi(x)\,\varphi(y)$.

2) Nech $y \in G_f$. Potom $ey \in G_e$ a $\varphi(e, y) = fe\,y = fy = y$.

3) Predpokladajme, že existujú také prvky $x, y \in G_e$, že je $\varphi(x) = \varphi(y)$, t. j. $fx = fy$. Potom $x = ex = efx = efy = ey = y$.

Z predchádzajúcich úvah a 1), 2), 3) vyplýva pravdivosť tvrdenia vo vete 2.9.

Príklad 2.2. Nech $S_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, u, v\}$ je pologrupa a binárna operácia na S_2 je definovaná multiplikatívnou tabuľkou. 1.1.

$\circ$	a	b	c	d	e	f	g	h	p	q	u	v
a	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
b	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a
c	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
d	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c
e	a	b	c	d	e	f	e	f	p	q	u	v
f	b	a	d	c	f	e	f	e	q	p	v	u
g	a	b	c	d	g	h	g	h	p	q	u	v
h	b	a	d	c	h	g	h	g	q	p	v	u
p	a	b	a	b	p	q	p	q	p	p	q	p
q	b	a	b	a	q	p	q	p	q	p	q	p
u	c	d	c	d	u	v	u	v	u	v	u	v
v	d	c	d	c	v	u	v	u	v	u	v	u

Tab. 2.5

Úplný zoznam všetkých $\mathscr{L}$– tried a $\mathscr{R}$– tried aj s ich štruktúrov usporiadania

1. $\mathscr{L}$– triedy a ich usporiadania v $S_2/\mathscr{L}$

$$\begin{array}{c} \{e, f, g, h\} \\ \uparrow \\ \{p, q, u, v\} \\ \uparrow \\ \{a, b, c, d\} \end{array}$$

Tab. 2.6

2. $\mathscr{R}$– triedy a ich usporiadania v $S_2/\mathscr{R}$

$$\begin{tikzcd}
\{e, f\} & & \{g, h\} \\
\{p, q\} \arrow[u] \arrow[urr] & & \{u, v\} \arrow[u] \arrow[ull] \\
\{a, b\} \arrow[u] & & \{c, d\} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Tab. 2.7

Na príklade ilustrujeme, že každý minimálny (maximálny) ideál pologrupy S s ohľadom na podmnožinu B pologrupy S je prvkom aspoň jedného nezávislého systému ideálov pologrupy S s ohľadom na B.

Poznámka 2.2. Nech S_2 je pologrupa uvedená v príklade 2.2. Potom pomocou definícií a tvrdení o pojmoch uvedených v tejto práci (napr. definícia 1.2, 2.1, 2.3 a napr. veta 2.1 atď.) dostaneme pravdivosť tvrdení uvedených v príklade 2.2 o pologrupe S_2 s ohľadom na jej (vlastnú) podmnožinu B (napr. podľa vety 2.8 a vety 2.9).

A) $\mathscr{H}_L = \{L(q)\}$, kde napr. $q \in B = \{q, u\} \subseteq S_2$ je nezávislý systém ľavých hlavných ideálov s ohľadom na B.

B) $L(q) = \{a, b, c, d, p, q, u, v\}$, $L_q = \{p, q, u, v\}$,
$\overline{L}_q = L(q) \setminus L_q = \{a, b, c, d\}$, $E(L_q) = \{p, u\}$, $q \in B$.

$\overline{L}_q$ je obojstranný ideál v $L(q)$ a pre každé $x \in L(q)$ je $L(q)x = L(q)$ práve vtedy, ak $x \in L_q$. To znamená, že sú splnené všetky predpoklady vety 2.8 a vety 2.9 v S_2

(s ohľadom na B). Potom:

(a) $G_u = \{c, d, u, v\}$ je pologrupa v S_2.

(b) $D_r(G_u) = G_u \cap L_q = \{u, v\}$ je grupa.

(c) $D_r(G_u) = D_e(G_u)$.

(d) G_u ($= \{c, d, u, v\}$) je parciálna grupa.

(e) $G_u = u\,L(g)$ a $G_p = p\,L(g)$ ($= \{a, b, p, q\}$) sú izomorfné (pozri vetu 2.9 a tab. 2.3 v príklade 2.2).

Pravdivosť tvrdení (a), (b), (c), (d), (e) si možno overiť aj pomocou tabuľky 2.5.

Záver

V práci [6] ([9]) je definovaný napr. nezávislý systém $\mathscr{J}$–ideálov (ľavých hlavných ideálov pologrupy S) grupoidu G.

V tejto práci je základným pojmom nezávislý systém ľavých hlavných ideálov pologrupy S s ohľadom na podmnožinu B pologrupy S (pozri definíciu 1.2) a budeme ho označovať $\mathscr{H}_L$. Každému nezávislému systému $\mathscr{H}_L$ je priradený ľavý ideál v $H(\mathscr{H}_L)$ pologrupy S. Definuje sa maximálny a minimálny ideál v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na pologrupy $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ a vyšetrujú sa:

a) v prvej časti (tejto práce) základné vlastnosti (štruktúra) maximálnych a minimálnych ľavých ideálov v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ (pozri napr. vetu 1.3).

b) v druhej časti práce je definovaný maximálny ľavý ideál L^* v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ (pozri definíciu 2.1) a vyšetrujú sa jeho základné vlastnosti (pozri napr. vetu 2.5).

1) Vlastnosti ľavých ideálov v $H(\mathscr{H}_L)$ uvedených v a) aj b) vyšetrujú sa „súčasne“. Dôsledkom tvrdení o ľavých ideáloch uvedených v a) aj v b) sú tvrdenia o maximálnych ľavých ideáloch v pologrupe S.

2) Na opis vlastností napr. maximálneho ľavého ideálu L^* v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ sú vhodné zovšeobecnené pojmy: parciálna ľavá grupa a parciálna grupa.

Na príklade sa dá ukázať, že existuje pologrupa S, ktorá neobsahuje minimálne ani maximálne ideály a obsahuje nekonečne veľa ľavých ideálov v $H(\mathscr{H}_L)$ a každý ľavý ideál $H(\mathscr{H}_L)$ obsahuje nekonečne veľa maximálnych a minimálnych ideálov v $H(\mathscr{H}_L)$ s ohľadom na $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ (pozri príklad 0.1 v [7]).

Literatúra

[1] CLIFFORD, A. H., PRESTON, G. B. *The Algebric Theory of Semigroups*. Vol. I; Vol. II, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1961.

[2] ЛАПИН, Е. С. Полугруппы. Наука, Москва 1960.

[3] KUROŠ, A. G. Kapitoly z obecné algebry, československá akadémia vied, Praha 1968.

[4] ABRHAN, I. Poznámka k maximálnym (H_1, H_2) ideálom v pologrupách. In *Matematický časopis 21*, 1971, str. 214-218.

[5] ABRHAN, I. O (H, T) – ideáloch direktného súčinu pologrup. In *Matematický časopis 21*, 1971, No.3, str. 199-211.

[6] ABRHAN, I. O ϑ–подалгебрах в унарных алгебрах, о простых идеалах и ϑ–идеалах в групоидах и подпологрупах. In *Math. Slovaca 28*, 1978, str. 61-80.

[7] ABRHAN, I. On minimal ideals in semigroups with respect to their subsets, I. In *Math. Bohemica*, 122, 1997, No.1, str. 1-12.

[8] ABRHAN, I. On minimal ideals in semigroups with respect to their subsets, II. In *Math. Slovaca*, 44, 1994, No.4, str. 463-478.

[9] ABRHAN, I. O minimálnych ideáloch v pologrupách s ohľadom na ich podmnožiny, III. In *G-slovenský časopis pre geometriu a grafiku č. 17*, *roč.9*, Bratislava: 2012. ISSN 1336-524X, str. 5-26.

[10] ABRHAN, I. O максималных подалгебрах в унарных алгебрах. In *Matematický časopis 24*, 1974, str. 113-128.

[11] ABRHAN, I. O minimálnych a maximálnych podalgebrách v unárnych algebrách s ohľadom na ich podmnožiny. In *G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku č. 8*, *roč.4*, Bratislava: 2007. ISSN 1336-524X, str. 5-20.

[12] FABRICI, I., MACKO, T. On bases and maximal ideals in semigroups. In *Math. Slovaca 31*, 1981, str. 115-120.

[13] FABRICI, I. O úplne maximálnych prvkoch. In *Matematický časopis 13 (1963)*, str. 16-19.

[14] GRILET, P. A. Intersection of maximal ideals in semigroups. In *Amer. Math. Monthly 76*, 1969, str. 503-509.

[15] SCHWARZ, Š. Maхимальние идеалы в теории пологрипп, I., II, К теории полугрупп. In *Чехословацкий матический журнал*, t. *3*, 78, 1956.

[16] SCHWARZ, Š. Maximálne ideály a štruktúra pologrup. In *Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 3, 1953, No.1-2, str. 17-23.

[17] SCHWARZ, Š. Prime ideals and maximal ideals in semigroups. In *Czechoslovak Math. J.*, 12, 94, 1969, pp. 72-79.

[18] SCHWARZ, Š. Semigroups contain maximal ideals. In *Math. Slovaca*, 28, 1978, No2, 1957-188.

[19] TAMURA, T. One - sided bases and translations of a semigroup. In *Math. Japan 3* (1955), pp. 137-141.

doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc.
Silvánska 11, 841 04 Bratislava, SR

doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.
Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: daniela.velichova@stuba.sk

Horopter – od fyziologického k počítačovému vidění

Milada Kočandrlová, Jarmila Radová

Abstrakt
V článku jsou odvozeny vlastnosti prostorové kvartiky zvané horopter. Ve fyziologii vidění je horopter křivka, která se zobrazí do identických bodů obou sítnic. V geometrii je horopter křivka průniku rotační válcové plochy a hyperbolického paraboloidu. Rovnoběžné průměty horopteru do roviny rovnoběžné s osou válcové plochy jsou kubiky. Středové průměty horopteru z jeho bodů na rovinu kolmou k ose válcové plochy jsou kružnice. Definice a vlastnosti horopteru lze využít v počítačovém vidění.

Klíčová slova: křivka, kvartika, kubika, válcová plocha, hyperbolický paraboloid

Abstract
Properties of space quartic horopter are derived in the paper. Horopter is described in physiology of human vision as a curve that is mapped to identical points on both retinas. In geometry it is determined as intersection curve of cylindrical surface of revolution and hyperbolic paraboloid. Views of horopter in parallel projections to plane parallel to axis of cylindrical surface are cubics. Horopter views in central projections from its points to plane perpendicular to axis of cylindrical surface are circles. Definition and properties of horopter can be applied in the computer vision.

Key words: curve, quartic, cubic, cylindrical surface, hyperbolic oparaboloid

1 Úvod

Horopter (z řečtiny: *horos* – hranice, *opter* – pozorovatel) podle Ottova slovníku naučného [1]

„Horopter jest souhrn nebo geometrické místo všech oněch bodů, jejichž obrázky při nazírání oběma očima nalézaly by se v obou sítnicích na tzv. identických bodech.“

Jako první se problémem vidění zabýval v 11. století Muhammad ibn al-Hasan ibn al-Hajtham, zvaný Alhazen (965-1040, arabský matematik, optik, astronom), který vycházel z prací Ptolemaiových o binokulárním vidění. Pozoroval body v zorném poli, ale nepopsal jeho hranici. Pojem horopter zavedl Francois d´Aguilon (1567-1617, belgický matematik, fyzik a architekt) v roce 1613. V roce 1818 Gerhard Vieth (1763-1836, německý pedagog) uvedl, že horopter musí být kružnice, procházející fixačním bodem a uzlovými body obou očí. Poté Johannes Müller (1801-1858, německý biolog a lékař) došel ke stejnému závěru v horizontální rovině, ale očekával, že horopter by měla být plocha. Teoretický horopter v horizontální rovině byl nazýván Viethova-Müllerova kružnice. V roce 1838 Charles Wheatston (1802-1875, britský fyzik) sestrojil zrcadlový stereoskop, který mu umožnil studovat horopter empiricky. Podařilo se mu ukázal, že naše vidění probíhá v mysli kombinací dvou samostatných obrazů objektu, který obě naše oči vidí z různých pozic, viz [2]. Teoretický horopter téměř ve stejnou dobu nezávisle na sobě popsali dva němečtí fyziologové Hermann von Helmholtz (1821-1894) a Ewald Hering (1834-1918). Popsali dvě části horopteru. První část, oblouk na Viethově-Müllerově kružnici, od uzlového bodu jednoho oka přes fixační bod k uzlovému bodu druhého oka. Druhou částí je Prévostova-

Burckhardtova přímka, která je kolmá na rovinu kružnice a prochází fixačním bodem. Jacek Turski v roce 2016 ukázal, že ke každému fixačnímu bodu existuje horopterový oblouk. Helmholtz předpověděl a T. Solomons odvodil tvar prostorového horopteru jako prostorovou kubiku, viz [2].

2 Horopter jako průnik dvou kvadrik

Jednou kvadrikou bude rotační válcová plocha ϑ, na které zvolíme površku p a tečnu t v bodě površky protější k površce p (ne kolmou). Površka p, tečna t a rovina π, kolmá k ose válcové plochy ϑ, určují druhou kvadriku, kterou je hyperbolický paraboloid μ.

Všechny uvedené útvary vyjádříme ve vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic. Osu z umístíme do osy válcové plochy ϑ a osu y tak, aby kolmo protínala površku p.

Válcovou plochu ϑ popíšeme implicitní rovnicí

$$\vartheta: x^2 + y^2 = r^2, r > 0 \tag{1}$$

nebo parametrickými rovnicemi v cylindrických souřadnicích

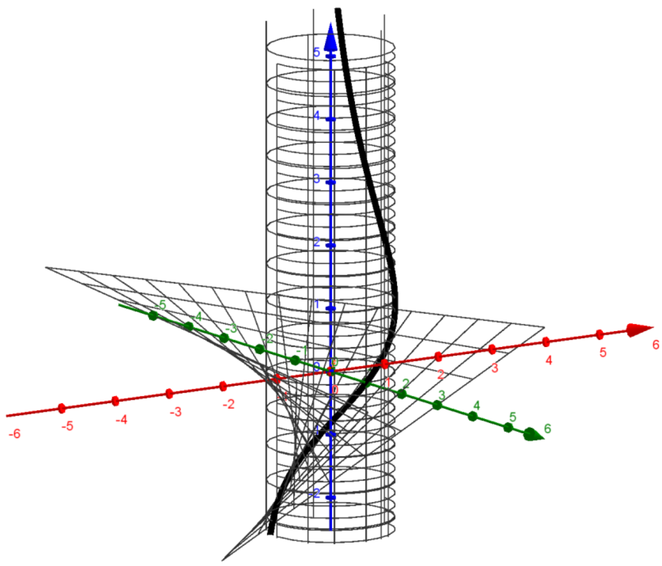
$$X(\varphi, \tau) = [r\cos\varphi, r\sin\varphi, \tau], \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle, \tau \in \mathbf{R}\,.$$

Řídicí útvary hyperbolického paraboloidu, površka p a tečna t válcové plochy ϑ, řídicí rovina π, jsou

$$p: X(t) = [0, -r, t], t \in \mathbf{R}\,,\ t: y = r, z = kx, k > 0,\ \pi: z = 0.$$

Potom rovnice hyperbolického paraboloidu je

$$\mu: 2kr\, x = (y + r)z\,. \tag{2}$$



Obr. 1. Průnik válcové plochy a hyperbolického paraboloidu

Průnik válcové plochy ϑ a hyperbolického paraboloidu μ, obr. 1, je křivka čtvrtého stupně, která se rozpadá na přímku $y = -r, x = 0$ a na kubiku

$$h: X(\varphi) = \left[r\cos\varphi, r\sin\varphi, \frac{2kr\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\right], \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle\,. \tag{3}$$

Kubika (3) podle [3] se nazývá horopter. Přímka $y = -r, x = 0$ je asymptotou kubiky (3).

3 Průměty horopteru do souřadnicových rovin

Rovnoběžným průmětem horopteru h do souřadnicové roviny xy je kružnice

$$h_1: x^2 + y^2 = r^2.$$

Proto možná německý pedagog Gerhard Vieth v roce 1818 usoudil, že horopter musí být kružnice.

Vyloučíme-li z rovnic (1), (2) proměnnou y, dostaneme jako průmět horopteru h do roviny xz kvartiku

$$h_2: x(x\,z^2 + 4kr^2(kx - z)) = 0. \tag{4}$$

Kvartika (4) se rozpadá na kubiku

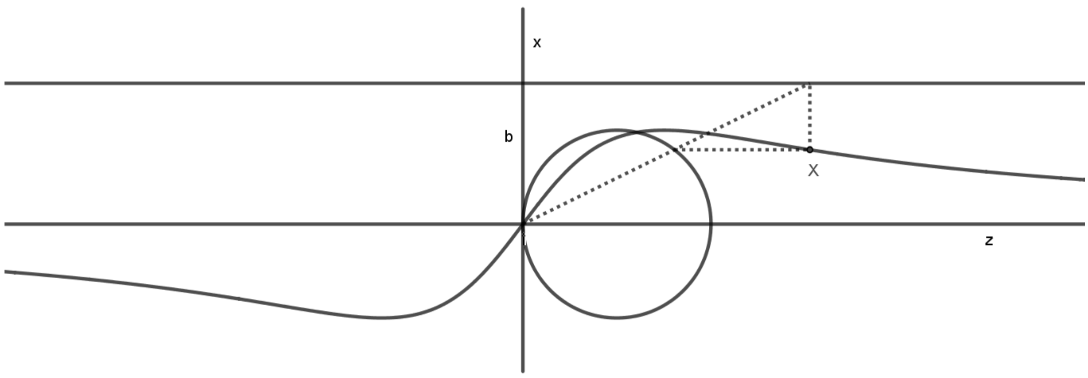
$$x\,z^2 + 4kr^2(kx - z) = 0, \tag{5}$$

která se nazývá kubická spirála, nebo hadovitá křivka (studoval ji Newton v roce 1701) a její asymptotu $x = 0$, obr. 2.

Označíme-li v rovnici (5) kubiky $a = 2r$ průměr kružnice na obr. 2, $b = 2rk$, bude mít rovnice (5) tvar

$$x = \frac{abz}{z^2 + b^2},$$

který snadno odvodíme z obr. 2.



Obr. 2. Kubická spirála daná rovnicí (5)

Vyloučíme-li z rovnic (1), (2) proměnnou x, dostaneme průmět kubiky h do roviny yz

$$h_3 : z^2(y+r)^2 = 4k^2r^2(r^2 - y^2). \tag{6}$$

Křivka (6) je kvartika, která se rozpadá na přímku – asymptotu, obr. 3,

$$y = -r \tag{7}$$

a kubiku

$$z^2(y+r) = 4r^2k^2(r-y). \tag{8}$$

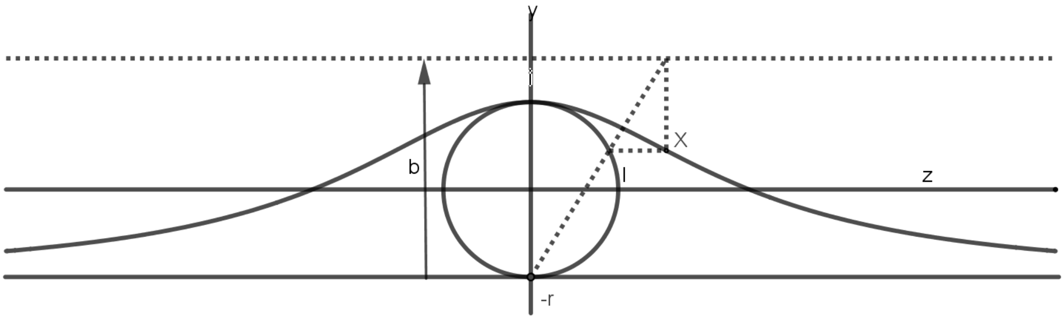
Kubika (8) podle [3] se nazývá zobecněná verziera di Agnesi, (Maria Gaetana Agnesi, 1718-1799, italská matematička a filosofka), nazývaná též Newtonova verziera.

Označíme-li opět v rovnici kubiky (8) $a = 2r, b = 2rk$, bude mít rovnice verziery tvar

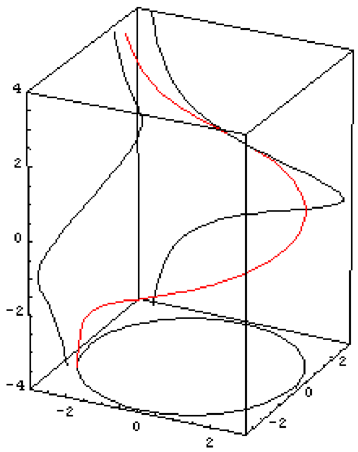
$$y = \frac{a}{2}\frac{b^2 - z^2}{b^2 + z^2}$$

a po jednoduché úpravě dostaneme rovnici, kterou lze odvodit z obr. 3

$$y = \frac{ab^2}{b^2 + z^2} - \frac{a}{2}.$$



Obr. 3. Newtonova verziera daná rovnicí (8)



Obr. 4. Horopter a jeho průměty h_1, h_2, h_3

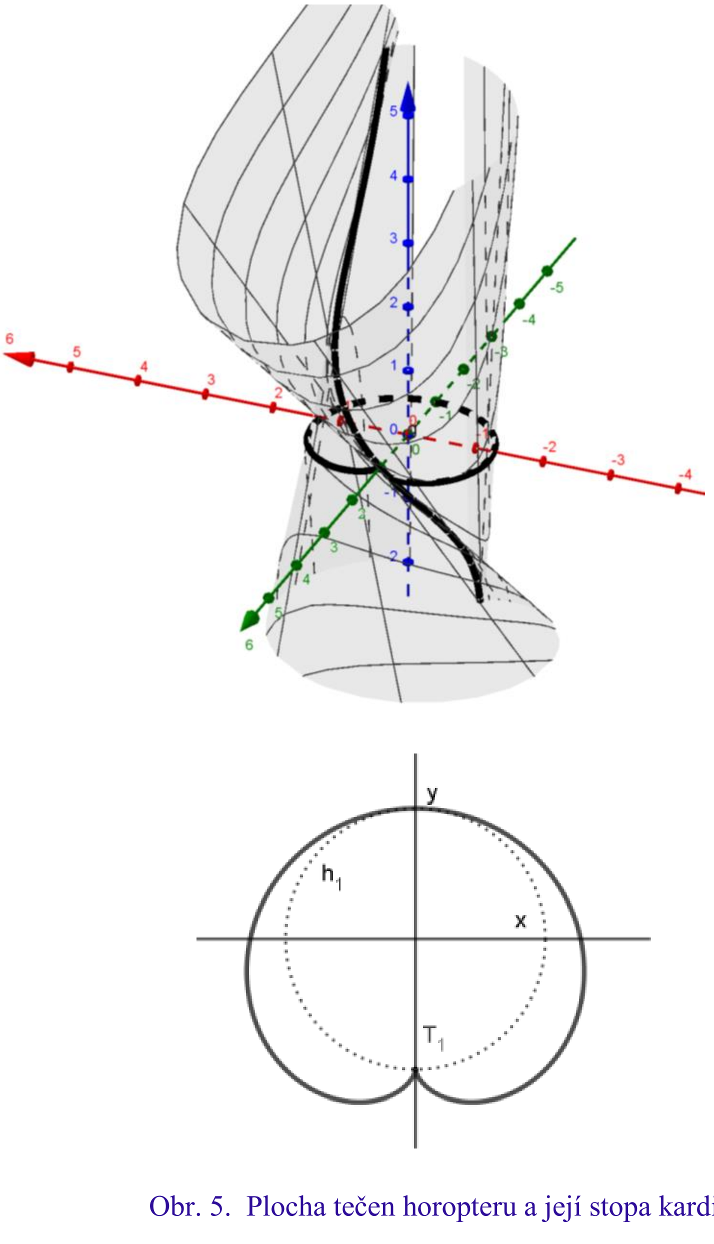
Na obrázku 4 je křivka horopter se svými průměty do souřadnicových rovin, viz. [4].

4 Plocha tečen horopteru

Další křivkou, spojenou s křivkou horopter, je řez σ_π plochy σ jejích tečen rovinou π, obr. 5

$$\sigma: X(\varphi, t) = \left[r\cos\varphi - tr\sin\varphi\,, r\sin\varphi + tr\cos\varphi\,, \frac{2rk}{1+\sin\varphi}(\cos\varphi - t)\right],$$

$$\sigma_\pi: x = r(1-\sin\varphi)\cos\varphi\,, y - r = r(1-\sin\varphi)\sin\varphi\,, \varphi \in \langle 0{,}2\pi\rangle. \qquad (9)$$



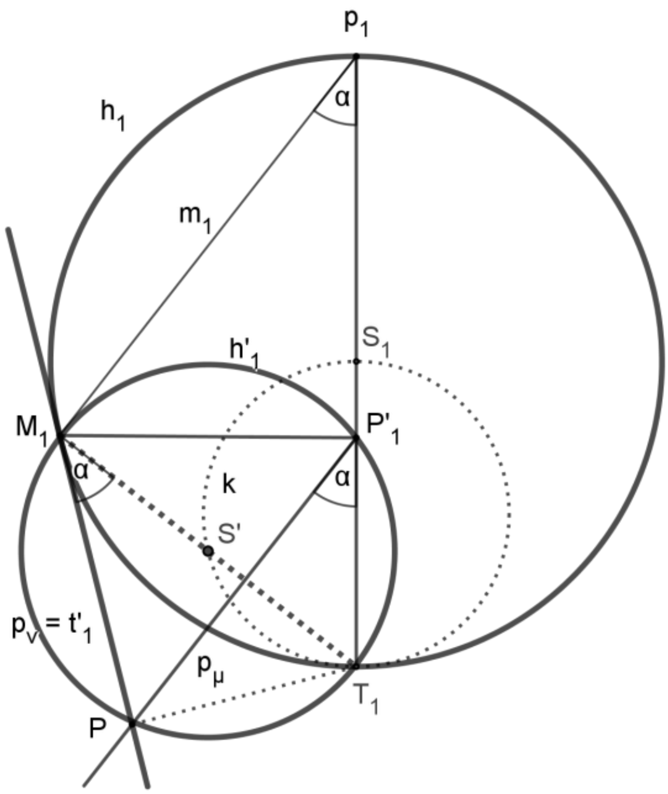
Obr. 5. Plocha tečen horopteru a její stopa kardioida.

Křivka (9) je kardioida, je úpatnicí kružnice h_1 pro pól v jejím bodě T_1, obr. 5.

5 Středový průmět horopteru

Křivka horopter se promítá z každého svého vlastního bodu na rovinu π, kolmou k její asymptotě p, do kružnice.

V obrázku 5 je h_1 kolmý průmět horopteru (řídicí kružnice rotační válcové plochy (1)) na rovinu π. Bod T_1 je kolmý průmět bodu dotyku tečny t válcové plochy (1). Do bodu p_1 se promítá asymptota p horopteru. Do bodu M_1 se promítá z bodu M nevlastní bod horopteru (nevlastní bod asymptoty p). Bod T_1 je průsečík horopteru s rovinou π. Tečna t' horopteru v bodě M se promítá do tečny t'_1 kružnice h_1. Průsečík tečny t' s rovinou π určíme pomocí tečné roviny hyperbolického paraboloidu v bodě M. Její stopa p_μ je rovnoběžná s průmětem m_1 tvořicí přímky hyperbolického paraboloidu (ta je rovnoběžná s řídicí rovinou π). Přímka MP' je tvořicí přímkou druhého regulu hyperbolického paraboloidu, je rovnoběžná s druhou řídicí rovinou $y = 0$. Stopník přímky MP' na rovině π je bod P‘. Na přímce $p_\mu = P'_1P$ leží hledaný stopník P tečny horopteru v bodě M. Tečnou t' se promítá její bod dotyku s horopterem do bodu P.



Obr. 6. Středový průmět horopteru z bodu M na rovinu π

Z obrázku 6 je zřejmé, že body $M_1T_1PP'_1$ leží na kružnici h'_1.

Všechny kružnice, do kterých se středově promítá horopter ze svého vlastního bodu, mají za průměr tětivu kružnice h_1 s jedním krajním bodem T_1, uzlovým bodem. Středy těchto kružnic leží na kružnici k nad průměrem S_1T_1 (geometrické místo středů tětiv svazku tětiv kružnice h_1).

6 Horopter v počítačové grafice

Předpokládejme, že chceme získat 3D objekt, stanoviště kamery, neznámé parametry kamery, ze sady snímků. Různé algoritmy automatické kalibrace kamer řeší různé situace za různých podmínek (počet obrázků, různé parametry kamery, znalost objektu). V práci [4] autoři k páru kamer přiřazují horopter, množinu bodů v prostoru, které mají stejné souřadnice obrazů v obou kamerách, problém řeší iterací. Naznačíme, jak by se problém řešil pomocí vlastností horopteru, které jsme v předchozích odstavcích uvedli.

Předpokládejme, že v jedné kameře máme kubickou spirálu

$$z' = \pm 2kr\sqrt{\frac{r-y'}{r+y'}}\,, x' = 0$$

a ve druhé kameře Newtonovu versieru

$$z' = \frac{2kr}{x'}\left(r \pm \sqrt{r^2 - x'^2}\right), y' = 0$$

vzhledem k lokální soustavě souřadnic x*'*, *y*', *z*'. Natočení kamery vzhledem ke globální soustavě souřadnic *x*, *y*, *z* je určeno třemi úhly: příčným sklonem ω ve směru osy *x*, podélným sklonem φ ve směru osy *y* a pootočením κ ve směru osy *z*. Matice rotace kamery do globální soustavy souřadnic je

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}.$$

Uzlový bod T_1 kamery určíme podle předchozího odstavce.

7 Závěr

V předchozích odstavcích jsme definovali křivku zvanou horopter a odvodili některé její vlastnosti. Nakonec jsme uvedli jak by se mohla křivka využít k rekonstrukci snímků.

Poděkování

Článek vznikl v rámci grantu GAČR 16-21506S a IP1000

Literatura

[1] *Ottův slovník naučný*, díl XI, 1897, s. 634.

[2] https: //en.wikipedia.org/wiki/Horopter/

[3] LORIA, G., SCHÜTTE, F. *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven*, Leipzig, 1911.

[4] RONDA, J. I., VALDÉS, A., JAUREGUIZAR, F. Camera Autocalibration and Horopter Curves, In *SpringerLink*, *International Journal of Computer Vision (2004) 57(3*), pp. 219-232.

doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Vysoká škola ekonomická
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3, ČR
e-mail: kocandrlova@hotmail.cz

doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D.
Vysoká škola ekonomická
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3, ČR
e-mail: radova@vse.cz

Kabinetní axonometrie – odvození hodnot parametrů elips při zobrazení kružnic vepsaných do stěn krychle

Alice Králová

Abstrakt
Obsahem článku je výpočet parametrů elipsy vepsané do kosodélníka, který je projekcí vodorovné stěny krychle v kabinetní axonometrii. Jsou zde předloženy dva nezávislé způsoby výpočtu založené na dvou různých geometrických konstrukcích. Tím jsou získány výsledky, které jsou přesnější než přibližné hodnoty uvedené v technické normě ČSN EN ISO 5456-3.

Klíčová slova: elipsa, kabinetní axonometrie, technická norma ČSN EN ISO 5456-3

Abstract
The subject of this article is calculation of proportions of an ellipse inscribed in parallelogram which is projected horizontal face of a cube in cabinet projection. Two independent methods of calculation are introduced based on two different geometric constructions. Thus obtained results are more accurate than approximate values stated in technical standard ISO 5456-3.

Key words: ellipse, cabinet projection, technical standard ISO 5456-3

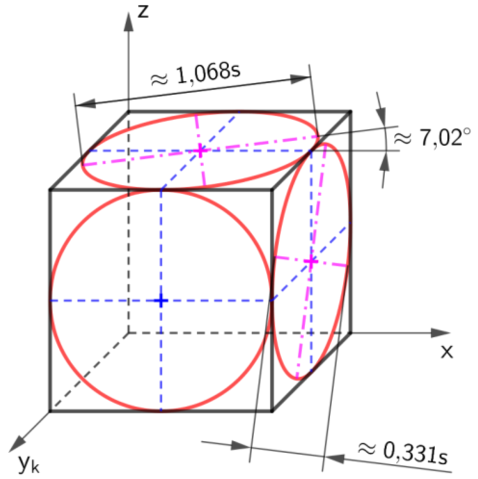
1 Technická norma ČSN EN ISO 5456-3

Označení ČSN EN ISO 5456-3 nese technická norma s hlavičkou Technické výkresy – Metody promítání – Část 3: Axonometrické promítání. V této normě jsou popsány doporučené způsoby axonometrického zobrazování, které se mají používat v technickém kreslení. Jednou z uvedených možností je užití tzv. kabinetní axonometrie, která je typem kosoúhlé axonometrie, při níž je dána svislá průmětna určená souřadnicovými osami x a z. Směr promítání je zvolen tak, že průmět osy y svírá s osou x úhel 45° a délky na prostorové ose y se promítáním zkracují na polovinu.

Jedná se o zobrazení, které se běžně (už od základní školy) nazývá termínem „volné rovnoběžné promítání“, ačkoliv tento název je nepřesný vzhledem k tomu, že pojem volné rovnoběžné promítání je mnohem obecnější, než odpovídá konkrétnímu způsobu axonometrické projekce, kterou je kabinetní axonometrie.[1] Víme, že stěny krychle v rovinách rovnoběžných s průmětnami (x, y) a (y, z) se promítají do kosodélníků a vepíšeme-li do těchto stěn kružnice, promítáním se zobrazí do elips. Pro nás je zajímavý obrázek uvedený v této normě pod číslem 11[2], který tuto situaci zachycuje a k němuž je připojen popis, který tvrdí, že hlavní osa elipsy svírá s hranou krychle odchylku přibližně 7° a pro hlavní a vedlejší osy elipsy platí vztahy $2a \doteq 1{,}06s$, $2b \doteq 0{,}33s$, kde s je délka hrany krychle.

[1] Podobný problém se týká názvů rovnoběžník a kosodélník, kdy rovnoběžník je obecnější pojem než kosodélník, a rovnoběžníkem lze nazvat například čtverec.
[2] Jedná se o obrázek v normě [3], kde je označený číslem 11, do textu je převzatý jako obr. 1.

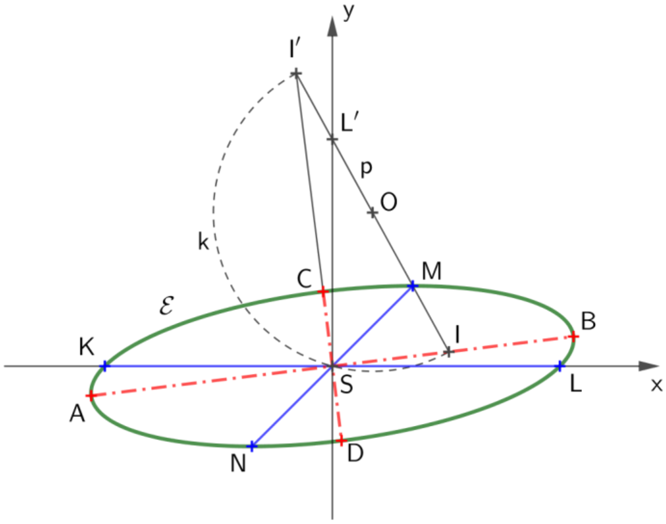
Odvození těchto vztahů je hezkou planimetrickou úlohou, kterou získáme zcela přesné hodnoty, zatímco v normě [3] jsou hodnoty zapsány pouze přibližně desetinnými čísly. Při zaokrouhlování na dvě desetinná místa by délka $2a$ měla být vyjádřena jako $1{,}07s$ (obr. 1).[3]



Obr. 1

2 Výpočet parametrů elipsy užitím Rytzovy konstrukce

Hledaná elipsa $\mathcal{E}$, řekněme v rovině rovnoběžné s průmětnou (x, y), je vepsána do kosodélníka, jehož strany mají délky s, resp. $s/2$, a svírají úhel 45°. Těmito údaji jsou současně popsány tzv. *sdružené průměry elipsy* rovnoběžné se stranami kosodélníka, z nichž je možné užitím *Rytzovy konstrukce* sestrojit kolmé průměry.



Obr. 2

Provedení Rytzovy konstrukce je následující (obr. 2): od středu S elipsy naneseme na kolmici k delšímu průměru KL polovinu jeho délky, čímž získáme bod L', takže $|SL| = |SL'|$. Přímka p

[3] V učebnicích [1] a [2] je pro délku hlavní osy elipsy z normy převzata hodnota 1,06s, navíc je pro délku vedlejší osy uvedena chybná hodnota 0,35s.

je spojnicí bodu L' s bližším bodem kratšího průměru, což je bod M. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě O, který je středem úsečky ML'. Body I a I' jsou průsečíky kružnice k s přímkou p. Hlavní osa elipsy leží na spojnici SI v ostrém úhlu sdružených průměrů, vedlejší osa pak leží na spojnici SI'. $|MI'|$ je délka hlavní poloosy a $|MI|$ je délka vedlejší poloosy elipsy $\mathcal{E}$.

Abychom mohli provést výpočet, zavedeme souřadnicový systém, jehož počátek bude ve středu S elipsy a osu x vedeme průměrem KL. Pokud délku hrany krychle označíme $s = 2a$, je $S[0;\,0]$, $L[a;\,0]$, $L'[0;\,a]$. Protože $|\sphericalangle LSM| = 45°$ a $|SM| = a/2$, je $M\left[\frac{a\sqrt{2}}{4};\ \frac{a\sqrt{2}}{4}\right]$.

Souřadnice středu O úsečky ML' určíme jako aritmetický průměr x-ových a y-ových souřadnic bodů M a L', takže je $O\left[\frac{a\sqrt{2}}{8};\ \frac{a\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)}{8}\right]$. Dále sestavíme rovnici kružnice k, která má střed v bodě O a poloměr $|SO|$.

$$|SO| = \left\|\overrightarrow{SO}\right\| = \sqrt{\frac{2a^2}{64}+\frac{a^2}{64}\cdot\left(16+8\sqrt{2}+2\right)} = \frac{a}{4}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{2}}\ .$$

Rovnice kružnice k:

$$\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{8}\right)^2+\left(y-\frac{a}{8}\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)\right)^2 = \frac{a^2}{16}\cdot\left(5+2\sqrt{2}\right).$$

Kružnici k protneme přímkou ML' v bodech I a I'. Přímka ML' je určena vektorem

$$\overrightarrow{L'M} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\ \frac{a\cdot\left(\sqrt{2}-4\right)}{4}\right).$$

Přímka p je určena parametrickými rovnicemi ve tvaru

$$x = t\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4},$$

$$y = a+t\cdot\frac{a\cdot\left(\sqrt{2}-4\right)}{4}.$$

Průsečíky přímky p s kružnicí k početně hledáme dosazením parametrických rovnic přímky p do rovnice kružnice k:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot t-\frac{a\sqrt{2}}{8}\right)^2+\left(a+t\cdot\frac{a\cdot\left(\sqrt{2}-4\right)}{4}-\frac{a}{8}\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)\right)^2 = \frac{a^2}{16}\cdot\left(5+2\sqrt{2}\right).$$

Vhodnými úpravami lze tuto rovnici zjednodušit do tvaru $\left(2t-1\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}$.

z čehož dopočítáme, že $\left|2t-1\right| = \dfrac{5+2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

Odtud získáme dvě možné hodnoty parametru *t*, a to

$$t_1 = \frac{\sqrt{17}+5+2\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}, \qquad t_2 = \frac{\sqrt{17}-5-2\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}.$$

Dosazením hodnot t_1 a t_2 do parametrických rovnic přímky *p* získáme souřadnice hledaných průsečíků *I* a *I´*. Vidíme, že je $t_1 > t_2$, takže po dosazení hodnoty t_1 získáme větší *x*-ovou souřadnici než po dosazení hodnoty t_2. Tedy v souladu s obr. 2 určuje parametr t_1 polohu bodu *I* a parametr t_2 polohu bodu *I´*.

Souřadnice bodu *I*:

$$x = \frac{a}{4}\cdot t_1\sqrt{2} = \frac{a}{8\sqrt{17}}\cdot\left(\sqrt{34}+5\sqrt{2}+4\right),$$

$$y = \frac{a}{4}\cdot\left(4+t_1\cdot\left(\sqrt{2}-4\right)\right) = \frac{a}{8\sqrt{17}}\cdot\left(8\sqrt{17}+\left(\sqrt{17}+5+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-4\right)\right),$$

$$y = \frac{a}{8\sqrt{17}}\cdot\left(\sqrt{34}+4\sqrt{17}-3\sqrt{2}-16\right).$$

Určíme velikost $\sphericalangle LSI$ jako odchylku vektorů $\overrightarrow{SL}$ a $\overrightarrow{SI}$.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{SL}\cdot\overrightarrow{SI}}{\left\|\overrightarrow{SL}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{SI}\right\|}, \qquad \overrightarrow{SL} = (a;\ 0), \qquad \left\|\overrightarrow{SL}\right\| = a.$$

Hodnoty souřadnic vektoru $\overrightarrow{SI}$ jsou stejné jako hodnoty souřadnic bodu *I*, prozatím je nechme obecně jako *x* a *y*. Je tedy

$$\cos\varphi = \frac{a\cdot x}{a\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Po dosazení se zlomek $\dfrac{a}{8\sqrt{17}}$ vykrátí, tedy výraz, který musíme dopočítat, má tvar

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{34}+5\sqrt{2}+4}{\sqrt{\left(\sqrt{34}+5\sqrt{2}+4\right)^2+\left(\sqrt{34}+4\sqrt{17}-3\sqrt{2}-16\right)^2}}.$$

S využitím programu Maple lze uvedený výraz upravit do tvaru

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{34}+5\sqrt{2}+4\right)}{4\cdot\sqrt{17-3\sqrt{17}}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{2}}}.$$

Po rozšíření součinem $\sqrt{17+3\sqrt{17}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ a dalších úpravách je hledaný úhel roven hodnotě

$$\varphi = \arccos\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}} \doteq 7{,}01812° .$$

Souřadnice bodu I':

$$x = \frac{a}{8\sqrt{17}} \cdot \left(\sqrt{34} - 5\sqrt{2} - 4\right),$$

$$y = \frac{a}{8\sqrt{17}} \cdot \left(8\sqrt{17} + \left(\sqrt{17} - 5 - 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 4\right)\right) = \frac{a}{8\sqrt{17}} \cdot \left(\sqrt{34} + 4\sqrt{17} + 3\sqrt{2} + 16\right).$$

Hlavní poloosa elipsy má délku $|MI'|$, vedlejší poloosa má délku $|MI|$. Protože x-ovou i y-ovou souřadnici bodu M lze zapsat ve tvaru $\frac{a \cdot 2\sqrt{34}}{8\sqrt{17}}$, jsou souřadnice vektoru $\overrightarrow{MI'}$

$$x = -\frac{a}{8\sqrt{17}} \cdot \left(\sqrt{34} + 5\sqrt{2} + 4\right), \quad y = \frac{a}{8\sqrt{17}} \cdot \left(-\sqrt{34} + 4\sqrt{17} + 3\sqrt{2} + 16\right).$$

Po dosazení do výrazu $\sqrt{x^2 + y^2}$ lze vytknout zlomek $\frac{a}{8\sqrt{17}}$, takže je třeba dopočítat

$$\sqrt{\left(\sqrt{34} + 5\sqrt{2} + 4\right)^2 + \left(-\sqrt{34} + 4\sqrt{17} + 3\sqrt{2} + 16\right)^2} .$$

Použijeme-li program Maple, získáme hodnotu

$$|MI'| = a \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{8}},$$

což znamená, že je délka hlavní osy elipsy $\mathcal{E}$ rovna

$$2 \cdot |MI'| = 2a \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{8}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{8}} \cdot s \doteq 1{,}067889603 \cdot s .$$

Vektor $\overrightarrow{MI}$ má souřadnice

$$x = \frac{a}{8\sqrt{17}} \cdot \left(-\sqrt{34} + 5\sqrt{2} + 4\right), \quad y = \frac{a}{8\sqrt{17}} \cdot \left(-\sqrt{34} + 4\sqrt{17} - 3\sqrt{2} - 16\right).$$

Po dosazení do výrazu $\sqrt{x^2 + y^2}$ a vytknutí zlomku $\frac{a}{8\sqrt{17}}$ musíme dopočítat výraz

$$\sqrt{\left(-\sqrt{34} + 5\sqrt{2} + 4\right)^2 + \left(-\sqrt{34} + 4\sqrt{17} - 3\sqrt{2} - 16\right)^2},$$

který lze v programu Maple upravit tak, že délku $2 \cdot |MI|$ vedlejší osy elipsy $\mathcal{E}$ zapíšeme jako

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{8}} \cdot s \doteq 0{,}331076723 \cdot s .$$

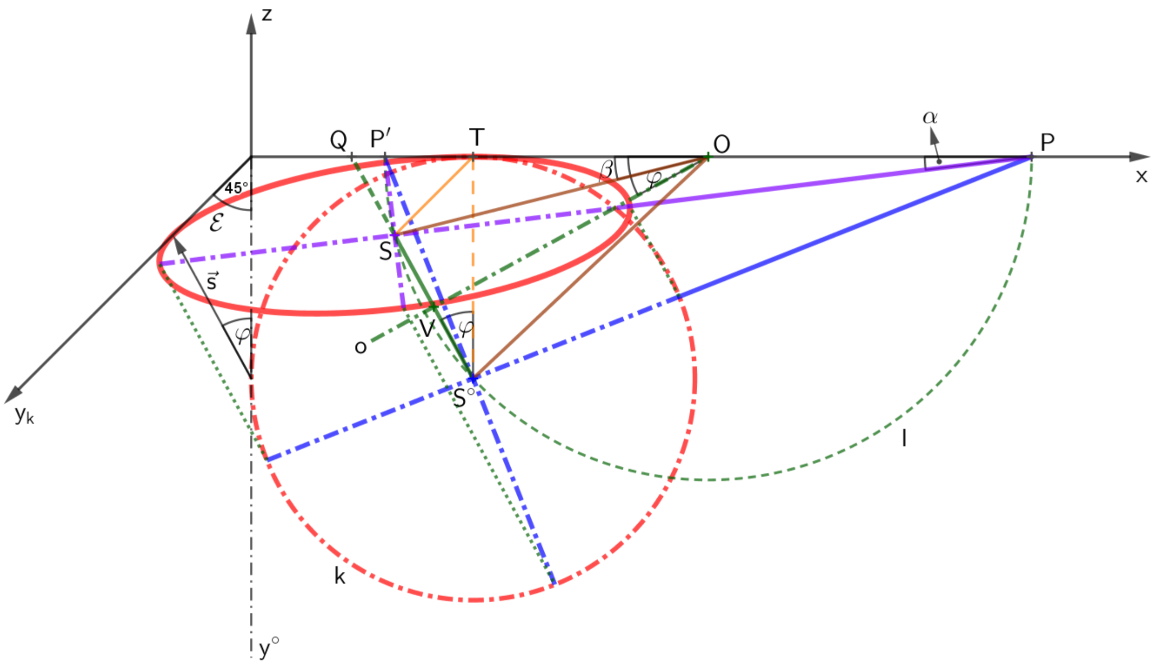
3 Výpočet parametrů elipsy na základě konstrukce v přidružené Mongeově projekci

K půdorysně určené souřadnicovými osami x a y_k, která je kosoúhlým průmětem prostorové osy y, přiřadíme půdorysnu přidružené Mongeovy projekce určené kolmými osami x a $y°$. Na ose $y°$ vidíme délky ve skutečné velikosti. Promítáním na osu y_k se zkracují na polovinu, čímž je určen směr $\vec{s}$ promítacího paprsku.
Mezi otočenou půdorysnou (x, $y°$) a kosoúhlou půdorysnou (x, y_k) existuje afinní vztah realizovaný paprskem $\vec{s}$ s osou afinity v ose x. Kružnice k sestrojená v půdorysně (x, $y°$) se afinitou převede do elipsy $\mathcal{E}$, kterou hledáme.

Využijeme konstrukci, která nám umožňuje z kolmých průměrů kružnice k sestrojit přímo kolmé průměry elipsy $\mathcal{E}$.

Sestrojme kružnici k se středem v bodě $S°$ o poloměru $r = s/2$, která se dotýká souřadnicových os x a $y°$. Určíme polohu středu S elipsy $\mathcal{E}$. Osa úsečky $S°S$ protne osu x v samodružném bodě O, jenž je středem Thaletovy kružnice l procházející oběma středy $S°$ i S. Kolmé průměry kružnice k i elipsy $\mathcal{E}$ procházejí průsečíky P a P' kružnice l s osou x. Krajní body těchto průměrů na kružnici k promítneme směrem $\vec{s}$ do hlavních a vedlejších vrcholů elipsy $\mathcal{E}$.

Výpočet parametrů elipsy provedený užitím této konstrukce je sice náročnější než při použití Rytzovy konstrukce, ale na druhé straně je zase zajímavější.



Obr. 3

Označme φ úhel, který svírá paprsek $\vec{s}$ s osou $y°$. Úhel mezi osami y_k a $y°$ je 45°. Nechť se kružnice k dotýká osy x v bodě T, který je současně bodem dotyku elipsy $\mathcal{E}$ s osou x.

Podívejme se na $\Delta S°TS$:

- $|S°T| = r$ … poloměr kružnice k, $|ST| = r/2$.
- Označme $|S°S| = a$.
- Protože je spojnice $S°S$ rovnoběžná se směrem $\vec{s}$, je $|\sphericalangle TS°S| = \varphi$.
- $|\sphericalangle S°TS| = 45°$.

Abychom stanovili velikost úhlu φ, užijeme pro $\Delta S°TS$ sinovou a kosinovou větu:

$$\frac{|S°S|}{\sin 45°} = \frac{|ST|}{\sin\varphi} \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{r}{2}}{\sin\varphi} \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi = \frac{r\sqrt{2}}{4a}\,.$$

$$a^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} - 2\cdot r\cdot\frac{r}{2}\cdot\cos 45° = \frac{r^2}{4}\cdot\left(5-2\sqrt{2}\right) \quad\Rightarrow\quad a = \frac{r}{2}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}\,.$$

$$\sin\varphi = \frac{r\sqrt{2}}{4\cdot\frac{r}{2}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{34}}\,.$$

Naší snahou bude vyjádřit poloměr $\rho = |SO| = |S°O|$ Thaletovy kružnice l. Začneme tím, že prodloužíme úsečku $S°S$ tak, aby protťala osu x v bodě Q. Označme $x = |SQ|$. Pro nalezení délky x užijeme pravoúhlý $\Delta S°TQ$, v němž je

$$\cos\varphi = \frac{|S°T|}{|S°Q|} = \frac{r}{a+x} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{r}{\cos\varphi} - a\,.$$

Protože je $\varphi < 90°$, je $\cos\varphi > 0$, tedy

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{5+2\sqrt{2}}{34}} = \sqrt{\frac{29-2\sqrt{2}}{34}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{34}}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)\,.$$

Použili jsme úpravu[4]

---

[4] Pro nalezení vztahu mezi $\sqrt{29-2\sqrt{2}}$ a $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ užijeme postup:

$$29-2\sqrt{2} = \left(5+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(a+b\sqrt{2}\right) = 5a+5b\sqrt{2}+2a\sqrt{2}+4b$$

$$\left.\begin{aligned} 29 &= 5a+4b \\ -2 &= 2a+5b \end{aligned}\right\} \quad a = 9,\ b = -4\,.$$

Podobně získáme vztah $\sqrt{9-4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-1$ tak, že napíšeme

$$9-4\sqrt{2} = \left(a+b\sqrt{2}\right)^2 = a^2+2ab\sqrt{2}+2b^2\,.$$

$$\left.\begin{aligned} 9 &= a^2+2b^2 \\ -4 &= 2ab \\ \hline -2 &= ab \end{aligned}\right\} \quad a = -1,\ b = 2\,,$$

přičemž je výraz $2\sqrt{2}-1 > 0$.

$$\sqrt{29-2\sqrt{2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\overbrace{\left(2\sqrt{2}-1\right)}^{>0}.$$

$$x=\frac{r}{2\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\frac{34}{5+2\sqrt{2}}}-\frac{r}{2}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}=\frac{r\cdot\left(2\sqrt{2}+1\right)}{7}\cdot\sqrt{\frac{34\cdot\left(5-2\sqrt{2}\right)}{17}}-\frac{r}{2}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{r\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{14}\cdot\left(2\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{2}+1\right)-7\right)=\frac{r}{14}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right).$$

Označme střed strany $S°S$ jako bod V. Bodem V prochází osa o. Nechť je $v = |VO|$. Prohlédněme si pravoúhlý ΔQVO. V tomto trojúhelníku je úhel při vrcholu Q roven hodnotě $90° - \varphi$, neboť v pravoúhlém $\Delta S°TQ$ je φ úhel při vrcholu $S°$. Je tedy $\sphericalangle VOQ = \varphi$.

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{|VQ|}{|VO|}=\frac{x+\frac{a}{2}}{v}\quad\Rightarrow\quad v=\frac{x+\frac{a}{2}}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2\sqrt{2}-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}=2\sqrt{2}-1.$$

$$v=\left(\frac{r}{14}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)+\frac{r}{4}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)=$$
$$=\frac{r\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{28}\cdot\left(2\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)+7\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)=\frac{r\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{28}\cdot\left(9+4\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)=$$
$$=\frac{r\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{28}\cdot\overbrace{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)}^{7\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)}=\frac{r}{4}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right).$$

Označme $\beta = \sphericalangle SOQ$. Protože je $\sphericalangle VOQ = \varphi$, v pravoúhlém ΔSVO je úhel $\sphericalangle VOS = \varphi - \beta$ a platí

$$\operatorname{tg}(\varphi-\beta)=\frac{|SV|}{|VO|}=\frac{\frac{a}{2}}{v}=\frac{a}{2v}=\frac{1}{1+2\sqrt{2}}.$$

$$\sin(\varphi-\beta)=\frac{|SV|}{|SO|}=\frac{\frac{a}{2}}{\rho}\quad\Rightarrow\quad\rho=\frac{a}{2\cdot\sin(\varphi-\beta)}.$$

Funkci $\sin(\varphi-\beta)$ vyjádříme užitím vztahu

$$\mathrm{tg}^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \quad\Rightarrow\quad \sin^2 x=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} \quad\Rightarrow\quad \sin x=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}}\ .$$

Hodnota $\sin(\varphi-\beta)$ je kladná, proto

$$\sin(\varphi-\beta)=+\sqrt{\frac{\dfrac{1}{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2}}{1+\dfrac{1}{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2}}}=\sqrt{\frac{\dfrac{1}{9+4\sqrt{2}}}{1+\dfrac{1}{9+4\sqrt{2}}}}=\sqrt{\frac{1}{10+4\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{34}}\ .$$

$$\rho=\frac{a}{2\cdot\sin(\varphi-\beta)}=\frac{r}{2}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{34}}{2\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}}=\frac{r\sqrt{34}}{4}\ .$$

Dále užijeme rovnoramenný ΔSOP, v němž je $|SO|=|OP|=\rho$ a $|\sphericalangle SOP|=180°-\beta$.
Platí, že

$$\sin\left(90°-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\cdot|SP|}{|OP|}=\frac{|SP|}{2\rho}\ ,$$

$$|SP|=2\rho\cdot\sin\left(90°-\frac{\beta}{2}\right)=2\rho\cdot\cos\frac{\beta}{2}\ .$$

Protože je $\cos\frac{\beta}{2}>0$, užijeme vztah

$$\cos\frac{\beta}{2}=+\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\ .$$

Úhel β spočítáme jako úhel $\varphi-(\varphi-\beta)$, takže je

$$\cos\beta=\cos\left(\varphi-(\varphi-\beta)\right)=\cos\varphi\cdot\cos(\varphi-\beta)+\sin\varphi\cdot\sin(\varphi-\beta)\ .$$

Abychom do uvedeného vztahu mohli dosadit, potřebujeme vypočítat hodnotu $\cos(\varphi-\beta)$, přičemž známe hodnotu $\sin(\varphi-\beta)$. Protože je $\cos(\varphi-\beta)>0$, můžeme psát [5]

$$\cos(\varphi-\beta)=+\sqrt{1-\sin^2(\varphi-\beta)}=\sqrt{1-\frac{5-2\sqrt{2}}{34}}=\sqrt{\frac{29+2\sqrt{2}}{34}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{34}}\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right).$$

[5] Ve výpočtu užijeme úpravu

$$\sqrt{29+2\sqrt{2}}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right).$$

Po dosazení

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{34}}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{34}}\cdot\left(2\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{34}}\cdot\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{34}} =$$
$$= \frac{\sqrt{17}}{34}\cdot 7+\frac{\sqrt{17}}{34} = \frac{4\sqrt{17}}{17} \ .$$

Dále

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{4\sqrt{17}}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}} \ .$$

Pak je

$$|SP| = \frac{r\sqrt{34}}{2}\cdot\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}} = r\cdot\frac{\sqrt{17+4\sqrt{17}}}{2} \ .$$

Dalším trojúhelníkem, který nás zajímá, je rovnoramenný $\Delta S°OP$, v němž je $|S°O| = |OP| = \rho$. Abychom určili velikost $\sphericalangle S°OP$, nejprve stanovíme, že $|\sphericalangle S°OQ| = \varphi + (\varphi - \beta)$. Pak $|\sphericalangle S°OP| = = 180° - |\sphericalangle S°OQ| = 180° - 2\varphi + \beta$.

Stejným postupem, jaký jsme užili u ΔSOP, vyjádříme délku strany $S°P$ jako

$$|S°P| = 2\rho\cdot\sin\left(90°-\varphi+\frac{\beta}{2}\right) = 2\rho\cdot\cos\left(\varphi-\frac{\beta}{2}\right) \ .$$

Protože

$$\cos\left(\varphi-\frac{\beta}{2}\right) = \cos\varphi\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\varphi\cdot\sin\frac{\beta}{2} \ ,$$

vyjádříme kladnou hodnotu $\sin\frac{\beta}{2}$ jako[6]

$$\sin\frac{\beta}{2} = +\sqrt{1-\cos^2\frac{\beta}{2}} = \sqrt{1-\frac{17+4\sqrt{17}}{34}} = \sqrt{\frac{17-4\sqrt{17}}{34}} = \sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}\cdot\left(\sqrt{17}-4\right) \ .$$

Potom je

$$\cos\left(\varphi-\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{34}}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}} +$$
$$+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{34}}\cdot\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}\cdot\left(\sqrt{17}-4\right) = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{17+4\sqrt{17}}}{34}\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{17}-5\right) \ .$$

[6] Ve výpočtu užijeme úpravu

$$\sqrt{17-4\sqrt{17}} = \sqrt{17+4\sqrt{17}}\cdot\sqrt{33-8\sqrt{17}} = \sqrt{17+4\sqrt{17}}\cdot\overbrace{\left(\sqrt{17}-4\right)}^{>0} \ .$$

$$|S°P| = r \cdot \frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{17+4\sqrt{17}}}{2\sqrt{34}} \cdot \left(2\sqrt{2}+\sqrt{17}-5\right).$$

Při promítání ve směru $\vec{s}$ se úsečka $S°P$ zobrazí do úsečky SP, stanovíme poměr $p = \dfrac{|SP|}{|S°P|}$.

$$p = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{17}-5} \overset{*}{=} \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{8}} \approx 1{,}067889603,$$

přičemž úpravu (∗) jsme získali výpočtem v programu Maple.
Délka hlavní osy elipsy $\mathcal{E}$, do níž se promítne průměr kružnice k, je tedy po zaokrouhlení na dvě desetinná místa rovna jeho 1,07-násobku, což je také 1,07-násobek délky s hrany krychle.

Abychom stanovili, v jakém poměru se zkrátí průměr kružnice k, který se promítne do vedlejší osy elipsy $\mathcal{E}$, vezmeme v úvahu dva pravoúhlé trojúhelníky $P'SP$ a $P'S°P$, kde body P a P' jsou průsečíky Thaletovy kružnice l s osou x, takže je $|PP'| = 2\rho$.

Určíme velikost úhlu $\alpha = \sphericalangle SPP'$ v $\Delta P'SP$. Protože je v ΔSOP úhel při vrcholu O roven hodnotě $180° - \beta$, má $\sphericalangle SPO$ velikost $\dfrac{180° - (180° - \beta)}{2} = \dfrac{\beta}{2}$, neboť se jedná o rovnoramenný trojúhelník.

Úhly SPP' a SPO jsou ale totožné, je tedy $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.

$$\sin\alpha = \frac{|SP'|}{|PP'|} = \frac{|SP'|}{2\rho} \quad \Rightarrow \quad |SP'| = 2\rho\cdot\sin\alpha = 2\rho\cdot\sin\frac{\beta}{2}.$$

Dosazením

$$|SP'| = \frac{r\sqrt{34}}{2} \cdot \sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}} \cdot \left(\sqrt{17}-4\right) = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{17+4\sqrt{17}} \cdot \left(\sqrt{17}-4\right).$$

Analogický výpočet provedeme v $\Delta P'S°P$, v němž nejprve stanovíme velikost $\sphericalangle S°PP'$. V rovnoramenném $\Delta S°OP$ má úhel při vrcholu O velikost $180° - 2\varphi + \beta$, takže je $|\sphericalangle S°PP'| =$ $= |\sphericalangle S°PO| = \dfrac{180° - (180° - 2\varphi + \beta)}{2} = \varphi - \dfrac{\beta}{2}$,

$$\sin\left(\varphi - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{|S°P'|}{|PP'|} = \frac{|S°P'|}{2\rho} \quad \Rightarrow \quad |S°P'| = 2\rho\cdot\sin\left(\varphi - \frac{\beta}{2}\right).$$

Protože je

$$\sin\left(\varphi - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\varphi\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \cos\varphi\cdot\sin\frac{\beta}{2},$$

po dosazení vyjde

$$\sin\left(\varphi-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{34}}\cdot\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{34}}\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}\cdot\left(\sqrt{17}-4\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{17+4\sqrt{17}}}{34}\cdot\left(8\sqrt{2}+\sqrt{17}-2\sqrt{34}-3\right)\ .$$

$$\left|S^{\circ}P'\right|=r\cdot\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{17+4\sqrt{17}}}{2\sqrt{34}}\cdot\left(8\sqrt{2}+\sqrt{17}-2\sqrt{34}-3\right)\ .$$

Při promítání se úsečka $S^{\circ}P'$ zobrazí do úsečky SP', stanovíme poměr $q=\dfrac{|SP'|}{|S^{\circ}P'|}$.

$$q=\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{17}-4}{8\sqrt{2}+\sqrt{17}-2\sqrt{34}-3}\overset{*}{=}\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{8}}\approx 0{,}331076723\ .$$

Poslední úprava $(*)$ byla realizována v programu Maple.

Délka vedlejší osy elipsy $\mathcal{E}$, do níž se promítne průměr kružnice k, je přibližně rovna jeho 0,33-násobku, což je také 0,33-násobek délky s hrany krychle.

Poslední údaj, který určíme, je odchylka hlavní osy elipsy $\mathcal{E}$ od osy x, což je současně odchylka hlavní osy elipsy od hrany krychle, jejíž velikost je rovna úhlu α.

Protože $\alpha=\dfrac{\beta}{2}$, je velikost úhlu α dána vztahem

$$\alpha=\arccos\sqrt{\frac{17+4\sqrt{17}}{34}}\approx 7{,}01812^{\circ}\ .$$

Literatura

[1] ŠVERCL, J. *Technické kreslení a deskriptivní geometrie pro školu a praxi*. Praha: Scientia, spol s. r.o., 2003. 341 s. ISBN 80-7183-297-9.

[2] KLETEČKA, J., FOŘT, P. *Technické kreslení,* Brno: Computer Press, 2012. 252 s. ISBN 978-80-251-1887-0.

[3] ČSN EN ISO 5456-3: 2000, *Technické výkresy – Metody promítání – Část 3: Axonometrické promítání.*

Mgr. Alice Králová
Ústav matematiky Lesnické a dřevařské fakulty
Mendelovy univerzity v Brně
Zemědělská 3, 613 00 Brno, ČR
e-mail: alice.kralova@mendelu.cz

Ako sa písala kniha profesora RNDr. Jána čižmára, PhD. Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť

Zita Sklenáriková

Abstrakt
Výnimočná knižná publikácia, ktorá sa objavila na knižnom trhu koncom roka 2017, dielo „Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť“, vznikala počas niekoľkých rokov náročnej tvorivej práce autora prof. RNDr. Jána Čižmára, PhD. za výdatnej nezištnej pomoci kolegyne RNDr. Zity Sklenárikovej, PhD. pri prepisovaní rukopisu do elektronickej podoby.
Jedinečnosť tejto nezvyčajnej knihy z edície vydavateľstva Perfekt v slovenskej knižnej produkcii dokumentuje aj ohlas, s akým ju privítala celá matematická komunita nielen na Slovensku, ale aj v okolitých krajinách. Zaujímavý pohľad na zrod diela prináša aj tento článok. Okrem nezvyčajných postrehov z autorskej dielne prináša aj osobnú výpoveď jednej z prvých čitateľov knihy, vyslovuje zaslúžený obdiv a hlbokú úctu k jej autorovi. Pocity, ktoré zdieľa a rovnako považuje za potrebné nahlas vysloviť aj redakčná rada časopisu G.

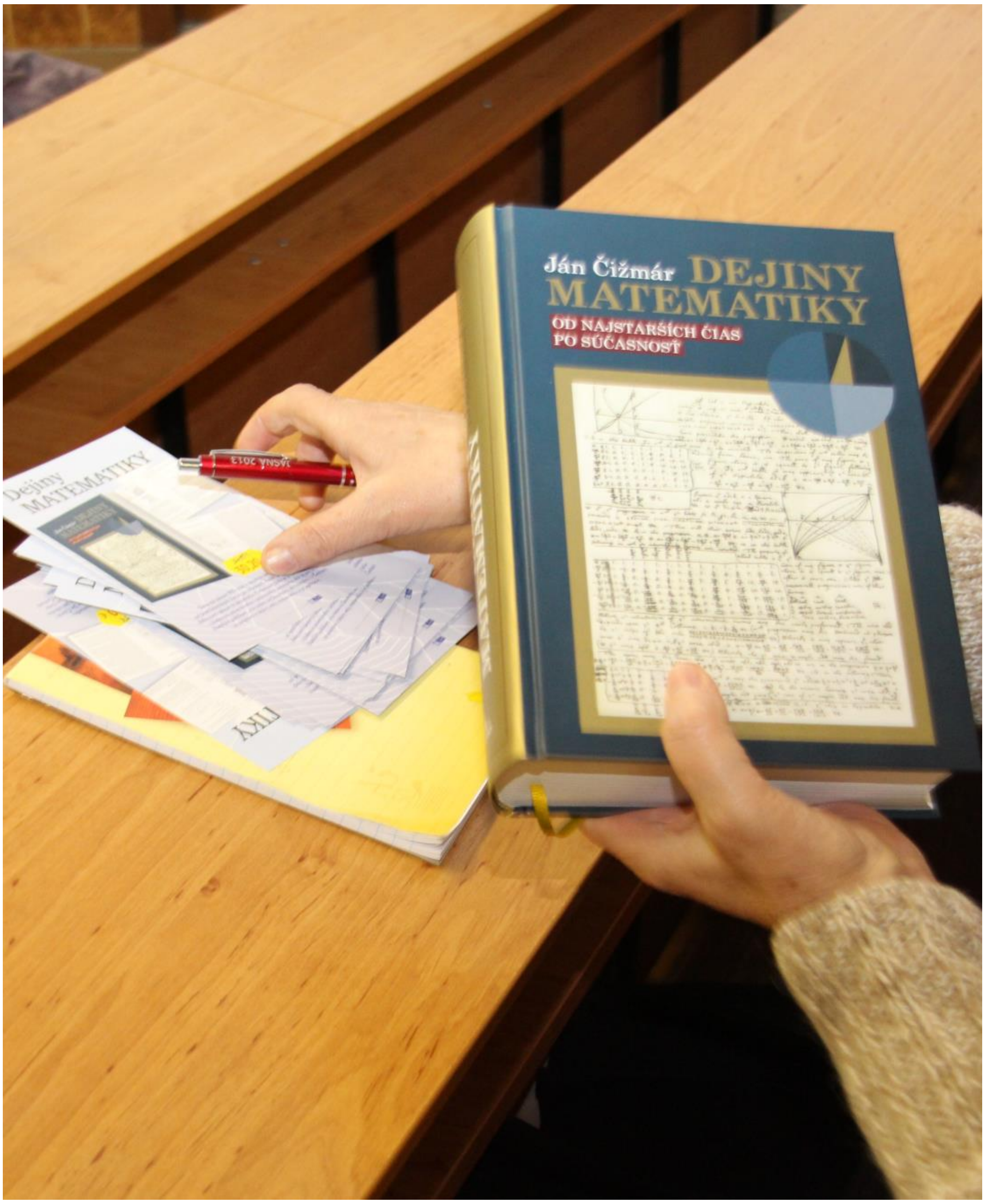
Kľúčové slová: dejiny matematiky

Abstract
Outstanding book publication appearing at the book market at the end of 2017, „The History of Mathematics from Ancient Times to Present“, was formed as a result of several years of challenging creative work of its author, prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD. Transcription of the manuscript into electronic version was possible with relentless help of his colleague RNDr. Zita Sklenáriková, PhD. The uniqueness of this special volume, published in an edition by printing house Perfekt, among Slovak book publications was also documented in the response not only of the whole community of mathematicians in Slovakia, but also in the neighbouring countries. This paper brings interesting comments on the origin of the book. In addition to the remarkable remarks and notes about the authorship period, one can also find a personal confession of the book's first reader, who articulates her admiration and deep respect for the author. The journal G editorial board shares the same sentiments, and considers it necessary to articulate these strongly.

Key words: history of mathematics

Prelúdium

V úvode treba pripomenúť, že o písaní takéhoto diela, teda na prvom mieste o jeho koncepcii, má výsostné právo hovoriť len autor samotný. Je ním profesor Ján Čižmár, vzácny človek, skvelý vysokoškolský učiteľ, človek s vedomosťami priam encyklopedickými (a to nielen z vlastného odboru), človek, ktorý nikdy nikomu neodmietol pomoc, či radu, a pritom človek veľmi, veľmi skromný. Ja sa môžem *pokúsiť* vyjadriť *len vlastné* dojmy, pocity, či myšlienky, ktoré sa mi vynárali v hlave pri prepisovaní rukopisu do počítača, keď bolo už dávno rozhodnuté o tom, *čo a ako písať* (s rešpektovaním širokého okruhu potenciálnych čitateľov).



Rukopisu v pôvodnom význame slova, t. j. *písaného rukou*; tvorilo ho 28 školských zošitov formátu A5 (každý zošit mal do štyridsať listov). Písalo sa na každú nepárnu stranu, pričom voľné strany boli určené na moje otázky – pripomienky, a súčasne na doplňujúce poznámky autora po jeho prečítaní si prvého výtlačku relevantnej kapitoly; zapracované poznámky boli jej prvou korektúrou. A propos, *rukopis*... Myslím, že nie je potrebné opisovať autorov rukopis. Písmo krásne, ale *extrémne* drobné! (Dnes, pozerajúc do prvého zošita (neriadkovaného), neverím svojim očiam: už text temer nedokážem prečítať; linajkový zošit rovnakého formátu má 22 riadkov na strane – autorovi sa na čistú stranu vošlo 60 – 65 riadkov!!!) O týždeň som dostala dve lupy, ani tie však nevyriešili situáciu podľa mojich predstáv; bolo treba písať čo najrýchlejšie, ak sme to mali stihnúť v únosnom čase. Druhým zošitom ma autor veľmi potešil; písal tlačené typy čitateľné už bez problémov (do zošitov s riadkami).

Ako som sa k písaniu a kresleniu obrázkov vôbec dostala (?). Pravdu povediac, ponúkla som túto pomoc môjmu učiteľovi, dlhoročnému kolegovi a priateľovi. A Ján ponuku prijal. Vedeli sme, že má v úmysle napísať knižku o histórii matematiky, chodievala som v čase môjho pôsobenia na fakulte na „letné školy“ z dejín matematiky, neskôr medzinárodné konferencie. Z jeho vystúpení bolo zrejmé, že si už niečo pripravuje. Teraz mi je veľmi ľúto, že som si nezapísala čo len dátumy začiatkov písania kapitol. Autor to nerobil a ani sa na to – pochopiteľne – nemôže pamätať; z hľadiska *tvorby koncepcie diela* ide totiž o fakt naskrze nedôležitý. Spomínam si na *jediný* časový údaj – v roku 2004 som priateľovi profesorovi Spagnolovi z Palerma na otázku ako ďaleko sme s dejinami odpovedala s úsmevom „*výborne Filippo*, *končíme stredovek!*“ Filippo sa zatváril ustarostene (stredovek je siedma kapitola knihy, str. 313 – 373). „*No čo, už máme len štyri kapitoly!*“ „Počítali sme“ s cca 600 – 700 stranami, ale mám veľké podozrenie, že Ján už vedel, že toho bude oveľa viac. Je mi ľúto, že profesor Filippo Spagnolo, človek milý, starostlivý a veľmi žičlivý (osobitne k svojim študentom a doktorandom), si už v knižke nemôže zalistovať.

O tom, čo všetko treba vziať do úvahy ešte pred napísaním prvých riadkov takéhoto diela koncízne informuje jeho *Úvod*. Len málo čitateľov si však už na tomto mieste uvedomí koľko práce a koľko vzácneho času si výber koncepcie vyžaduje. Závoj sa pred čitateľom bude pomaly odhaľovať priamo úmerne s počtom prečítaných kapitol. Jedna vec je ale zrejmá po prvých troch-štyroch kapitolách, osobitne v kapitole o matematike v starovekom Grécku a helenistickom svete. Je ňou fakt, že matematika sa nediala, nerozvíjala vo vzduchoprázdne, ale na istom území, v určitých spoločensko-politických podmienkach, ktoré vždy záviseli od ekonomickej bázy spoločnosti vo všetkých spoločenských formáciách, bez výnimky. Rovnako dôležité je oboznámenie sa s úrovňou matematického poznania tej-ktorej spoločnosti, ako aj s prameňmi, na základe ktorých táto k novým výsledkom dospela. A na mnoho ďalších otázok, ktoré sa môžu vynoriť pred čitateľom diela, dáva odpoveď autorov Doslov.

Adagio ma inquaieto

Pri opisovaní rukopisu som temer nevnímala obsah napísaného; znie to možno paradoxne, ale opisovala som „slová“, i keď som spravidla napísala celú prečítanú vetu. Bzučanie počítača ma veľmi vyrušuje; aby som si text zmysluplne prečítala, potrebujem ho v knižnej podobe. A prečo spravidla? Veru nie som taký génius, aby som si vedela zapamätať šesťriadkovú vetu na prečítanie (n-riadkových viet, $n > 3$ je v texte nadostač)☺. Po napísaní kapitoly (či jej časti) a vytlačení, som sa konečne mohla venovať čítaniu. Až *vtedy* som začala rozumieť tomu, čo sú to dejiny matematiky, i ako majú vyzerať. Každý výber je subjektívny, ale nemala som o čom pochybovať, predsa *profesor Čižmár vie všetko*, ako vravievali jeho študenti. V tejto fáze, keď som už zažívala pôžitok z prečítaného, som v duchu ďakovala autorovi, že uveril, že zvládnem tak písanie, ako aj kreslenie obrázkov. Už ani neviem, koľkokrát som každú kapitolu prečítala, ale boli to krásne a vzácne chvíle naplnené pohodou a pokojom.

Obrázky autor načrtával na párnu stranu zošita; nebolo treba rysovať ich, text bol dostatočne informačný. Snažila som sa, aby boli čo možno najpresnejšie a *úhľadné* (lepšie to vyjadriť neviem). Autor ma privádzal do zúfalstva, keď sa na ne sotva pozrel a komentoval „áno, sú dobré“ – zatiaľ čo ja som očakávala radu, ako ich vylepšiť. Nuž, isteže najdôležitejším bol text, aj pre mňa. Ale nechcela som nič pokaziť, želala som si, aby výsledný dojem bol estetický – musela som sa spoľahnúť na vlastnú intuíciu. Kreslené obrázky sú zreteľne odlíšiteľné od vkladaných skenov, ktoré majú tiež označenie „obrázky“; skeny mapiek číslované nie sú. Materiál na skenovanie som mala už dávno; poskytol mi ho autor z najrôznejších zdrojov (odborné časopisy, tlačoviny, knižky, internet), ešte pred písaním textu. O úpravách skenovaného materiálu som nemala najmenšiu predstavu – nemohla som byť s výsledkom spokojná. Bolo však pred nami ešte veľa rokov práce, tak som to odložila. Do textu vložené boli a dúfala som, že sa do konečných úprav niečo naučím. Pri záverečnej revízii textu som veľmi ľútovala, že som sa nedržala príslovia „Čo môžeš urobiť dnes, neodkladaj na zajtra!“ Človek sa vskutku učí celý život!

Presto

V posledných mesiacoch roku 2016 bol rukopis pripravený pre vydavateľstvo, stále bez finálnych technických úprav. Portréty matematikov do kapitol sme ešte nemali pripravené; plánovali sme zaradiť portrét pri prvom výskyte mena. Nakoniec sa začala stále nástojčivejšie ponúkať druhá možnosť, a to chronologické usporiadanie významných matematikov určitého obdobia na koniec príslušnej kapitoly. Úprava 259 portrétov nemala konca: keď sa mi konečne nejaký pozdával, už som hľadala chybu na ďalšom. Som rada, že to mám za sebou. Keď dnes na portréty pozerám, cítim sa tak dobre, ako môj sotva dva a pol ročný prasynovec Dávidko, keď si spolu prezeráme album jeho starej mamy, či prastarých rodičov. (Dávidko už má knižku aj s venovaním autora; ďalšie dve sú v najbližšej rodine a čítajú ich hlavne babičky.) Veľmi sa teším z vložených portrétov; je to úžasné vidieť za menom matematika osobnosť s osudom prevažne nie najšťastnejším, niekedy až krutým, ktorá matematické poznanie posunula čo len o malý krôčik ďalej – pretože len máloktorým bolo dopriate hranicu poznania prekročiť výrazným skokom. Okrem portrétov mal Ján šťastný nápad vložiť za doslov zoznam medzinárodných kongresov matematikov v chronologickom poradí od roku 1897 do roku 2018, laureátov Fieldsovej medaily od roku 1936 do roku 2014, ako aj fotografie najvýznamnejších centier výskumu a pokročilých štúdií, a významných svetových univerzít.

V tom čase pani Mgr. Magdaléna Gocníková, riaditeľka vydavateľstva PERFEKT, a.s., prijala rozhodnutie knihu vydať na odporúčanie nášho veľmi ústretového kolegu a priateľa prof. doc. RNDr. Andreja Ferka, CSc., ktorý už mal s vydavateľstvom pracovné kontakty. A mašinéria sa mohla rozbehnúť. Začiatkom decembra roku 2016 boli poslané rukopisy trom recenzentom na vypracovanie posudkov s termínom odovzdania do konca januára roku 2017. Posudky boli priaznivé; jeden z recenzentov sa vyjadril, že čítanie rukopisu bolo preňho najkrajším vianočným darčekom.

Ďalej sa podstatnými ukázali dve veci: 1. – zohnať sponzorov na vydanie diela; 2. – upraviť text do podoby vhodnej pre tlačiareň. Pretože sme nemali dosah na žiadnych sponzorov, sústredili sme sa na úpravu rukopisu. Bolo treba čakať na pokyny z vydavateľstva ohľadom formátu, okrajov, typu písma, veľkosti, atď. Medzitým n-té čítanie textu... Do vydavateľstva sme boli pozvaní niekedy na prelome februára a marca. Keď mi technický redaktor ukázal, čo sa mu podarilo pretransformovať z nášho rukopisu, bola som šokovaná. Namiesto matematických výrazov tam boli akési čudné hieroglyfy, ale nielen vo výrazoch, ktoré boli samostatne umiestnené, ale aj v texte; matematický text totiž nejde striktne oddeliť od textu, v ktorom nie je matematický výraz. Ja som písala v editore rovníc temer všetko, pretože inak vyzerá index pri písmene napísaný v editore v porovnaní so zdvihnutým či zníženým indexom vo Worde, o ďalšom ani nehovoriac. A potom sa stalo niečo, s čím som nepočítala. Bolo to po 11. marci, keď som vinou „nehody (?)“ bola vyradená temer na dva mesiace z akejkoľvek práce.

Prestissimo

Medzitým si vydavateľstvo našlo človeka, ktorý mal matematický text prepísať. Na naše milé prekvapenie a šťastie ním bola naša exkolegyňa a priateľka, pani RNDr. Mária Benešová, CSc., výkonná redaktorka časopisu Acta Mathematics na FMFI UK. Ona prepísala matematiku do formátu LaTeX. Nebolo treba prepisovať celý text, ale bolo v ňom veľa miest, kde sa slová pri matematickom výraze nedali rozlúštiť, čím vznikali nové chyby. Na záver sme si vymieňali jej texty po oprave chýb a veľmi-veľmi pomaly sa všetko „čistilo". Myslím, že sme už boli všetci traja na pokraji psychických síl. A trvalo to celé prázdniny.

Milá Marica, rada by som sa Ti na tomto mieste poďakovala za Tvoju obetavú prácu, ktorú som sčasti mala urobiť ja – ide o úpravu niektorých skenovaných materiálov a prevedenie fotografií významných centier výskumu a významných svetových univerzít do čierno-bieleho variantu. Navyše, aj za Tvoju celkovú profesionálnu úpravu textu do tlače. Knižka je vskutku prekrásna.

Finale

Tento príspevok nie je vedeckým ani odborným článkom (ktorý by sa mi písal oveľa ľahšie). Je odpoveďou na požiadanie vedúcej redaktorky, doc. RNDr. Daniely Velichovej, CSc. Má prezradiť niečo z tvorivej dielne profesora Jána Čižmára v súvislosti s objavením sa knižky *Dejiny matematiky* na knižnom trhu. Príprava diela trvala veľmi dlho, ani neverím, že prešli toľké roky... Ale je to pochopiteľné, pri plnom pracovnom úväzku nebolo možné písaniu venovať primeraný čas. Pre profesora Čižmára boli vždy jeho študenti a doktorandi na prvom mieste – vychoval viaceré generácie stredoškolských i úspešných vysokoškolských učiteľov. A výchova žiakov v matematike od základného školstva po maturitu mu ležala na srdci najviac (dosvedčujú to jeho kontakty s učiteľmi, písanie učebníc a mnoho prác o tematike vzdelávania, i prezentácie na rozmanitých fórach). Často som sa ho pýtavala „*máš už niečo pre mňa napísané*? Na to si spomína najčastejšie, dúfam, že som ho príliš neznervózňovala. Na nerušené písanie sa tešieval vždy, keď odchádzal na liečenie... Moje každoročné vianočné želanie pre autora bývalo, okrem obvyklých želaní dobrého zdravia „a *hlavne veľa potešenia z písania krásneho diela“*. Už od samého začiatku písania som cítila z riadkov závan výnimočnosti. A mojim neskromným želaním bolo, aby som sa dožila chvíle, keď budem mať knižku v rukách a *nerušene si z nej budem môcť čítať*. To sa mi splnilo, až prebohato. Aj teraz ju čítam, i keď nemám toľko času, koľko by si sústredené čítanie spojené s pôžitkom vyžadovalo... Hlavu mám už plnú Euklida! Ale to je už ďalšia kapitola spolupráce, ktorej sa sčasti obávam, no súčasne sa na ňu veľmi teším. Záverom by som rada vyjadrila v mene celej matematickej obce želanie dobrého zdravia a mnohých tvorivých síl profesorovi Jánovi Čižmárovi pri realizácii jeho ďalšieho veľkého sna – preloženie nesmrteľných Základov Euklida a hlavne vypracovanie komentárov k tomuto dielu.

Ak sa to podarí, bude inaugurácia novej knižky pre nás všetkých veľkým sviatkom!

RNDr. Zita Sklenáriková, PhD.
Bakošova 22
841 03 Bratislava, SR

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ

SG

PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective
to stimulate scientific research and teaching methodology
in the fields of geometry and computer graphics
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

SSGG
Institute of Mathematics and Physics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Abstracts

I. Abrhan, D. Velichová: On maximal and minimal ideals of semigroups with respect to their subsets, I

In the first part of this paper we relate a left ideal $\mathscr{H}_L$ of semigroup S to any independent system of left principle ideals $H(\mathscr{H}_L)$ of semigroup S with respect to subset B of semigroup S. We define maximal (minimal) left ideal in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$ and prove basic proposition about structure of these ideals in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, see Theorem 1.3.

In the second part of this paper we define maximal left ideal L^* in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$. Next, we describe structure of left ideal $H(\mathscr{H}_L)$ of semigroup S, if $H(\mathscr{H}_L)$ contains maximal left ideal L^* in $H(\mathscr{H}_L)$ with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, see Theorem 2.1.

In case that e.g. $H(\mathscr{H}_L)$ contains maximal left ideal L^* with respect to $B \subseteq H(\mathscr{H}_L)$, we study for instance structure of set $\overline{L}^* = H(\mathscr{H}_L) \backslash L^*$, see Theorem 2.5 or Theorem 2.6.

M. Kočandrlová, J. Radová: Horopter - from physiology of human vision to computer vision

Properties of space quartic horopter are derived in the paper. Horopter is described in physiology of human vision as a curve that is mapped to identical points on both retinas. In geometry it is determined as intersection curve of cylindrical surface of revolution and hyperbolic paraboloid. Views of horopter in parallel projections to plane parallel to axis of cylindrical surface are cubics. Horopter views in central projections from its points to plane perpendicular to axis of cylindrical surface are circles. Definition and properties of horopter can be applied in the computer vision.

A. Králová: Cabinet axonometry – derivation of ellipse parameters in projection of circles inscribed into the cube facets

The subject of this article is calculation of proportions of an ellipse inscribed in parallelogram which is projected horizontal face of a cube in cabinet projection. Two independent methods of calculation are introduced based on two different geometric constructions. Thus exact results are obtained which are more accurate than approximate figures stated in technical standard ISO 5456-3.

Z. Sklenáriková: Writing of book „The history of mathematics from antient times to present" by professor RNDr. Ján Čižmár, PhD.

Outstanding book publication appearing at the book market at the end of 2017, „The History of Mathematics from Ancient Times to Present", was formed as a result of several years of challenging creative work of its author, prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD. Transcription of the manuscript into electronic version was possible with relentless help of his colleague RNDr. Zita Sklenáriková, PhD. The uniqueness of this special volume, published in an edition by printing house Perfekt, among Slovak book publications was also documented in the response not only of the whole community of mathematicians in Slovakia, but also in the neighbouring countries. This paper brings interesting comments on the origin of the book. In addition to the remarkable remarks and notes about the authorship period, one can also find a personal confession of the book's first reader, who articulates her admiration and deep respect for the author. The journal G editorial board shares the same sentiments, and considers it necessary to articulate these strongly.

G
Slovak Journal for Geometry and Graphics

Volume 15 (2018), No. 29
ISSN 1336-524X

Edited by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, brief reports, state-of-the-art reviews, analyses, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, analytic, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social and technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics
IČO: 31 816 304
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17
812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:
Redakcia G - SSGG
SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia
ssgg@ssgg.sk

Frequency: One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.
Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

G is cited in: Zentralblatt für Mathematik

www.ssgg.sk