



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 16, číslo 31, 2019
ISSN 1336-524X

G

Slovenský časopis pre geometriu a grafiku

Ročník 16 (2019), číslo 31

ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG

Vedúca redaktorka:

Daniela Velichová

Výkonné redaktorky:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Redakčná rada:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Štefan Solčan

Margita Vajsábllová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

IČO: 31 816 304

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:

Redakcia G - SSGG

ÚMF SJF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

sogg@sogg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.

Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adrese: www.sogg.sk

Tlači: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

Časopis G je citovaný v: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG júl 2019, Bratislava

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkoľvek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.



Obsah – Contents

Hexagons and squares as bidimensional representations of a cube Šesťuholníky a štvorce ako dvojrozmerné reprezentácie kocky Cristina Cândito, Alessandro Meloni	5
Prof. Ján Čížmár ocenený Veľkou medailou sv. Gorazda Prof. Ján Čížmár awarded Big Medal of St. Gorazd Andrej Ferko	17
Geometrická a matematická analýza mapy Bohemiae Rosa, Blaeuových historických máp zo 17. storočia a Augustovo zobrazenie Geometric and mathematical analysis of map Bohemiae Rosa, Blaeu's historical maps from the 17 th century and August's projection Margita Vajsáblová	19
Pocta Maryam Mirzakhani A tribute to Maryam Mirzakhani Daniela Velichová	39

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG

Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Hexagons and squares as bidimensional representations of a cube

Cristina Cándito, Alessandro Meloni

Abstrakt

V príspevku skúmame príklady rovinnej reprezentácie skupiny kociek a stratégie, ktoré niektorí autori používajú pri zobrazovaní útvarov v rovine a v priestore. Analyzujeme fenomén opakovania vzoru v grafickom jazyku niektorých konfigurácií, ktoré majú dvojrozmerný a trojrozmerný význam, akými sú aj šesťuholníkové tesalácie pripomínajúce izometrické zobrazenie v ortogónálnej axonometrii. Ich sugestívne účinky, známe už zo staroveku, sa používali v sérii umeleckých prejavov v dvadsiatom storočí, ako aj v grafickom jazyku súčasných hudobných videí.

Kľúčové slová: tesalácie, izometria, axonometria, symetria, optické ilúzie

Abstract

This contribution examines examples of the plane representation of a series of cubes and the strategies used by some artists to work between the plane and the space. We analyse the recurrence in graphic language of some configurations, which have a two-dimensional and three-dimensional meaning, such as the hexagonal tessellation that can be assimilated to isometric orthogonal axonometry. Known since ancient times, its suggestive effects were used in a series of artistic expressions in the twentieth century as well as in the graphic language of today's music videos.

Keywords: tessellation, isometry, axonometry, symmetry, optical illusions

1 Elements involved in three-dimensional representation on a plane and tessellation

In this paper we investigate artistic images that can be interpreted as a series of cubes, so it is necessary to introduce some notions concerning methods of representation of three-dimensional space on the plane and flat tessellation.

As is well known, the different methods of representation of three-dimensional space on the plane can be distinguished in conical projections (perspective) and cylindrical projections (orthogonal or Mongean projections, axonometry and level curves). A cube can be transformed into a square through a Mongean projection, if the same cube has a couple of its faces parallel to the projection plane. If we have a series of aligned and spaced cubes, we obtain a tartan configuration, with a series of squares arranged in lines and intercut with ribbons in both planar directions.

We can observe that the cube can be represented by a square also in a one-point perspective in which the cube has always a pair of its faces parallel to the picture plane. In that way a series of cubes or squares aligned to the principal direction, perpendicular to the picture plane, appears as a series of concentric squares the measures of which decrease in depth, in a shape that we call a frames configuration.

A cube can assume a different, but regular, shape with isometric axonometry. Isometric representation is an orthogonal projection on a plane equally inclined in respect to the reference planes. The result is a projection that shows the same reduction along the three axonometric axes (which are equally inclined with one another) (Fig. 1): for this reason, the cube became a regular hexagon and it is possible to approximate side length to the unit, making the image easier to draw and interpret. Mongean and isometric representation share the same direction of projection - orthogonal to the projection plane – and this is the reason why we prefer to call the first a Mongean projection, from the name of Gaspard Monge (1746-1818). Monge, professor at the École Normale and the École Polytechnique, systematized the method (*Géométrie descriptive*, Paris 1798) which provides a pair of orthogonal planes, each of them having its own orthogonal direction projection centre¹.

A few years later, in the field of representation a less well known episode took place, namely the description of isometric axonometry by William Farish (1759-1837), professor of Natural and Experimental Philosophy in Cambridge since 1813. Farish openly claimed, in a sort of declaration of independence, his readiness to oppose his method to Mongean projections, too far from the represented subject and decipherable only by experts. He called his method *isometrical perspective* (the term axonometry will come only in 1863)² because it is able to provide a three-dimensional image and thus substitute the costly and laborious wooden models of industrial machinery. Farish presented his theory in 1820,³ and it was published two years later in the first volume of “Transactions of the Cambridge Philosophical Society” [Farish, 1822]. Farish was pivotal in spreading the use of isometric drawing and in explicitly describing its geometrical properties. In the cube projection, he observed how its external perimeter forms a regular hexagon and the remaining three edges are obtained starting from the centre of the cube and they connect three alternated edges of the hexagon. This representation of a cube - which shows all the edges of the cube with equal lengths - had already been noted by Kepler in 1619⁴.

The architect Joseph Jopling (around 1789-1867)⁵ was the first author to publish a monography on isometric orthogonal axonometry [Jopling, 1833]. His book explored the geometrical properties of the isometric cube, which Jopling used to inscribe any shape to be represented. He observed a precise relationship on linear and angular entities of the cube and, as an artist and draughtsman, Jopling was deeply interested in the perceptive aspects of the isometric cube. Besides providing a scientific representation of a three-dimensional object on a plane, the isometric cube can, in fact, also be interpreted from its top or bottom view (*upper/under*) and additionally not as a solid but as an empty dihedron (*internal/external*). It can also be observed that by simply rotating the drawing, the hypothesised horizontal face of the cube appears vertical (*sideway view*; Jopling 1833, p. 7).

The added value of isometric cube representation in fact lies in its being a scientific shape offering many expressive possibilities. For a better understanding of the represented shape and its position, one can integrate shading into the representation (Fig. 2), not only with form shadows, which are still susceptible to interpretation (Fig. 2 (b), 2 (e)), but also with cast shadows (Fig. 2(c), 2 (f)), because these create another projection of the represented subject.

¹ For the role of Monge, see Taton, 1986.

² The term axonometry (from the Greek words *axôn*, axis, and *metron*, measurement) was coined by M.H. Meyer (*Lehrbuch der axonometrischen Projektionslehre*, Leipzig, 1863).

³ The lectures took place between the 21st February and the 6th March 1820; Loria, 1921, p. 411.

⁴ J. Kepler, *Harmonices mundi*, Lincii 1619, book V, fig. 20 e 36; see Loria, 1921, p. 412.

⁵ For a biography of Joseph Jopling, see Colvin, 1995, p. 565.

These are just pieces of the history of the methods of representation, but these kinds of drawings were not new. Plan and elevation of architectures had been drawn since ancient times in a way that progressively come nearly to the current technical use. In the Renaissance, architects like Antonio da Sangallo or Raffaello Sanzio showed their architectural design in orthogonal projections, although they used perspective to point out the relationship between the space and the observer, as Filippo Brunelleschi (1377-1446) showed in the early fifteenth century⁶. Isometric axonometry had been used in Asian art for centuries, e.g. in the Moghul era in the sixteenth century, as well as in representations of contemporary fortification in treatises of military engineering, as demonstrated by the treatise by Pietro Cataneo (*L'Architettura*, Venice 1567)⁷.

After having identified some instances of plane representations of a cube, we also need to observe their possible connection to tessellation. Tessellation of a plane, without any overlaps or gaps when covering the whole surface, can be achieved with one or more shapes, regular or irregular. Tessellations with only one regular polygon can be obtained using only equilateral triangles, squares or hexagons. This contribution does not examine the topic of spatial extension in tessellation, i.e. covering a surface with adjacent polyhedrons along their faces without leaving any gaps – the only regular polyhedron able to serve this function is the cube. On a plane, however, there are more possibilities resulting from combining regular flat shapes or irregular shapes. This study focuses on tessellation of a plane using the above described tartan configuration (assimilated to a Mongean projection), the frames configuration (assimilated to a perspective projection) and regular hexagons (assimilated to an isometric projection) that we define isometric configuration.

We can find these configurations in many artistic examples, such as ancient Roman mosaics: the tartan configuration is used in Trajan's Villa (Arcinazzo, Rome, II century) and the frames configuration in the Agora forum in Kos (Greece, II century BC). There are many example of isometric configuration, called *opus scutulatum*, as in the Grifi House (Palatine, Rome, II-I century BC) (Fig. 1).

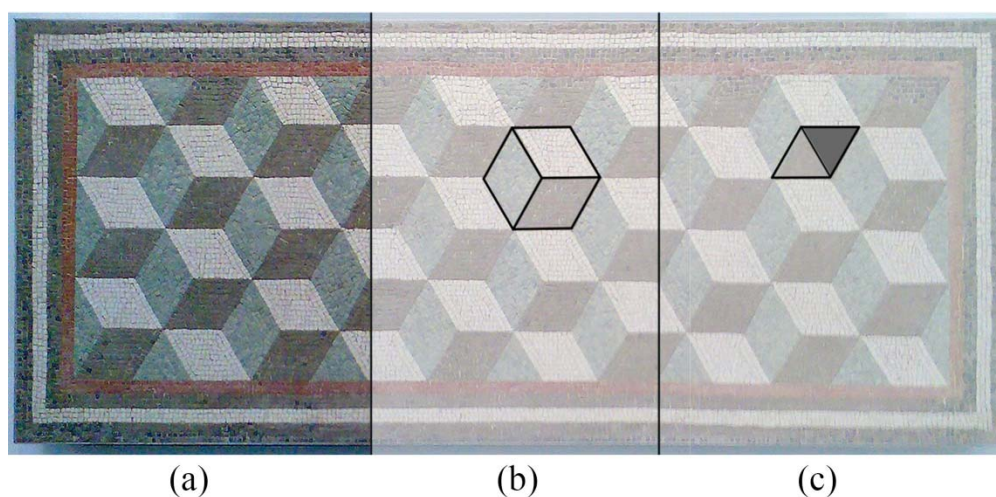


Fig. 1. The isometric configuration in the Grifi house (Rome, Palatin, Casa dei Grifi II-I century BC): the hexagonal tessellation and the rhombic one composed by two equilateral triangles.

⁶ For the meaning of architectural drawing, see Ackermann, 2002; for the history of perspective, see Andersen, 2007.

⁷ For the history of axonometry, see Scolari, 1984.

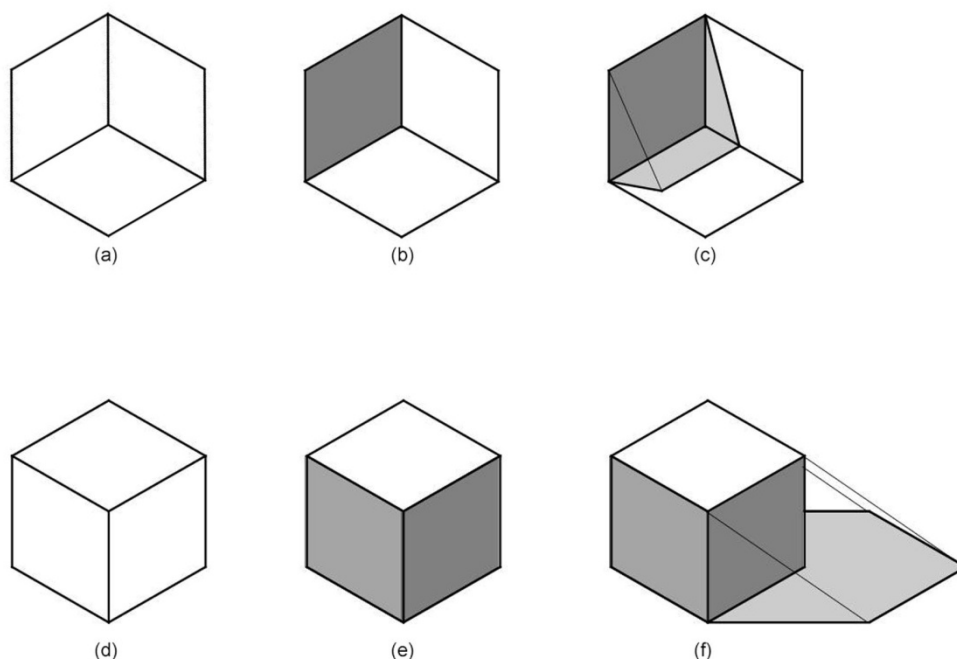


Fig. 2. The ambiguity of isometric axonometry: its persistence with form shadows (b) (e) and its overcoming with cast shadows (c) (f), because they are further projections of a dihedral angle (a) and cube (b).

2 The frames configuration in the work by Albers and Vasarely

A series of specific works by Josef Albers (1866-1976) can help clarify the concept of frames configuration. The German artist started showing an interest in spatial suggestion at the Bauhaus School of Architecture in Weimar (1920). He began his teaching career in Dessau, the main location of the School, (1925), but was abruptly interrupted when Nazi repression forced the School to close down (1933). Albers continued to paint and teach in the United States, where he taught in several Art Schools and universities, until 1949 when he became the Head of the Department of Design at the University of Yale [Fiedler, Feierabend, 2000, pp. 304-318].

As we said, one point-perspective, in particular conditions, transforms a cube into a square and one can imagine them aligned in depth in order to be projected as a series of squares of a different size. Pictures of the series *Homage to the square* (Fig. 3) by Albers can be interpreted in that way. Made from 1949 up to his death, here Albers repeated square shapes of different measurements that, being placed one inside the other, create a perspective illusion in the arrangement of the geometrical shapes.

We interpreted the spatial meaning of the representation with the help of a perspective inverse construction that provided us, in this order, the position of the principal point (P), the height of the horizon line ($H.L.$) and the distance (D) of the point of view (V) (Fig. 3(b)). With these elements, we could hypothesise the represented space as a cube divided into portions of different sizes and colours and reconstruct it in a side view (Fig. 3 (c)).

One can recognise a more complicated interpretation of a similar subject in a series of pictures by the Hungarian artist Victor Vasarely (1906-1997). In *Zsinor* (1974) (Fig. 4) Vasarely suggested a space that is not a cube but is represented in the same way with a series of concentric squares although disposed along curves. The space has two parallel squared faces, with the farthest one smaller than the nearest one and filleted by curved lines. We could not reconstruct the space with the help of a perspective inverse construction, because the picture shows no recognisable form, so we can only suggest that the form is inscribed in a cube.

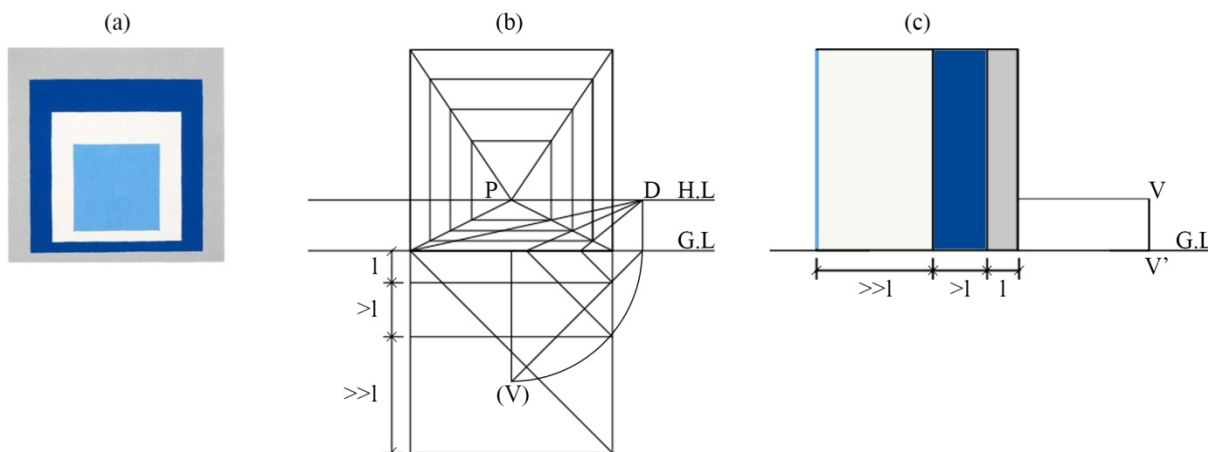


Fig. 3. Geometric illusory composition by J. Albers: (a) *Homage to the square*, 1965; (b) its hypothetical perspective inverse construction; (c) side view of the space represented.

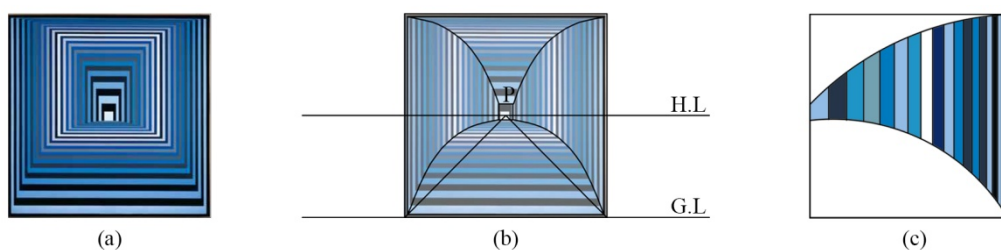


Fig. 4. Geometric illusory composition by V. Vasarely: (a) *Zsinor*, 1974; (b) its hypothetical perspective inverse construction; (c) side view of the space inscribed in a cube.

3 Tartan configuration and its spatial interpretation in Albers and Vasarely

Vasarely clearly drew inspiration from the work by Albers and a comparison between the two can also be used to illustrate the tartan configuration.

Victor Vasarely initially studied medicine in his hometown Pecs. He subsequently changed to literature, but his artistic inclination would then lead him to enter the artistic academy Podolini-Wolkman. In 1929 he started the Műhely School in Budapest, which he himself referred to as “the Hungarian Bauhaus”. The Műhely School covered all disciplines with the

aim of integrating the arts with everyday life. Here Vasarely had the possibility to express himself without being rigidly tied to reality – he discovered the use of primary colours with flat brushstrokes as well as compositions solely made up of elementary geometric shapes [Busto, Isnardi, 2007; Orosz, Imre, 2018].

In 1930, Vasarely moved to Paris and even though he became famous, he carried on his research in geometry and visual perception, which are two basic aspects of his work and the Optical Art. Vasarely was the leading artist of the Optical Art movement, started in 1955 in Paris with the exhibition “Le mouvement”, in which Vasarely participated. This exhibition showed an intentional desire to look for dynamism in each artwork through ambiguous configurations.

If we compare the reticular composition by Albers (1922) and the *Lux-novae* by Vasarely (1962), we can observe two different interpretations of the tartan configuration. Albers' work is a composition of pieces of different kind of coloured glasses and iron wires that belong to the glass collection that the artist composed, also on commission, inside the Bauhaus glass decoration workshop. Albers started with freeform compositions to specialize in geometric forms characterized by strong symmetries. Although squares appear with sides which are not regular, we can observe that they are of the same size in Albers' composition (Fig. 5 (a)), as opposed to what appears in Vasarely's one (Fig. 5 (b)), in which the gradual modification of the relationship between squares and intermediate strips creates an optical effect of curved surfaces. This effect is emphasised by the crossed symmetry of the composition and its black and white realization, which assimilates the intervals to a bright background and the squares to a projection of solid shapes (cubic?) that stand out on it. We cannot recognize the intentionality of such a three-dimensional purpose in Albers' works mentioned here, although the reticulate potentially could represent series of cubes or parallelepipeds in Mongean projection.

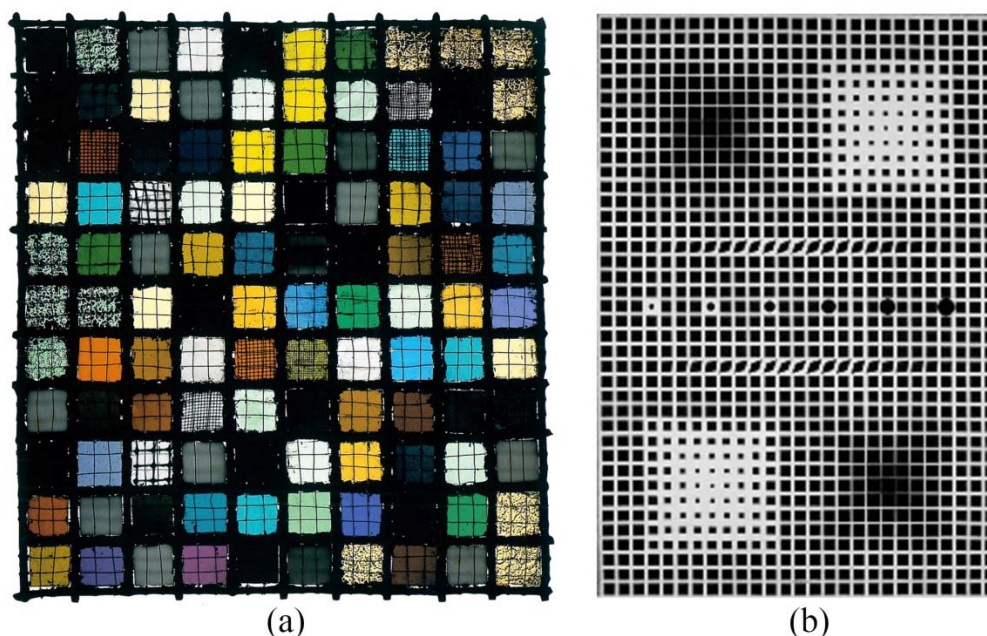


Fig. 5. (a) J. Albers, *Reticule* (Albers Foundation), 1922; (b) V. Vasarely, *Lux-novae* 1962.

4 The isometric configuration

The geometric propriety of tessellation could at first sight appear only able to generate repetitive effects. Instead, it offers various figurative possibilities, as widely demonstrated in the famous artworks by Maurits Cornelis Escher (1898-1972) [Rossi, 2014, p. 33], which will not be taken into account in this contribution, as we prefer to thoroughly discuss the works by Albers and Vasarely, as well as an example of visual language diffusion in music videos.

Drawing on the previously mentioned premises, isometric configuration can be defined as a mode of tessellation of regular shapes on a plane (the equilateral triangle or the regular hexagon), and it assumes spatial complexity, because the observer through visual perception is able to identify recognisable three-dimensional objects in it.

4.1 Isometric composition and colours in the work by Albers

A series of specific works by Josef Albers (1866-1976) can also help clarify the role of isometric axonometry in representation. Albers is overtly interested in colour, as shown in his book *Interaction of colours* [Albers, 1963] and it is through geometrical simplification that in his artwork series he created a number of variants susceptible to different interpretations.

In his series *Repetition* we can recognise the meaning of geometry and colours: the shape remains the same, or with little variation, but the colour combination, additionally using the effect of modulated transparency, is always changing (Fig. 6). The spatial interpretation of the version *Repetition: Grey Steps, Grey Scales, Grey Ladders* (1943) (Fig. 6 (a)) may contemplate a compromise related to the ambiguity of the front panel (Fig. 6 (b)). In his version, from the same year, *Repetition against blue* (Fig. 6 (c)), the contrast between the transparency effect of the vertical white nearest planes suggest a different interpretation, where the vertical front panels are not rectangular, but cut by an AB line, aligned with the isometric projection of a horizontal direction (Fig. 6 (d)). This second solution is coherent with all the elements in the composition; however, the observer must force his immediate perception into accepting the presence of a non-regular shape within an otherwise rigidly regulated system.

Albers himself said “the Gestalt psychology proved that three-dimensionality is perceived earlier and more easily than two-dimensionality” [Albers, 1963; 1991 edition, p. 124], thus the observer, in this effort to bring what he sees back into three-dimensions, is willing to overlook inconsistencies. Albers showed how identical isometric configurations could acquire different spatial meanings thanks to chromatic influence: as he observed, colour is the most relative element in arts [Albers, 1963; 1991 edition, p. 124].

His observations influenced his teaching activity, which centred on students in the fields of art, design and architecture, and who would go on to study and work on spatial configurations.

4.2 Isometric configuration and curves in the work by Victor Vasarely

The aim of Vasarely's work was to stimulate the observer visually with geometric compositions and colour, placing strongly contrasting tones side by side. This contemporary use of colour and geometry enables drawings to suggest movement, also thanks to the ambiguity of the shapes, which the observer can interpret in different ways. This underlines how the observer's eyes and brain are both involved, becoming integral parts of the artwork.

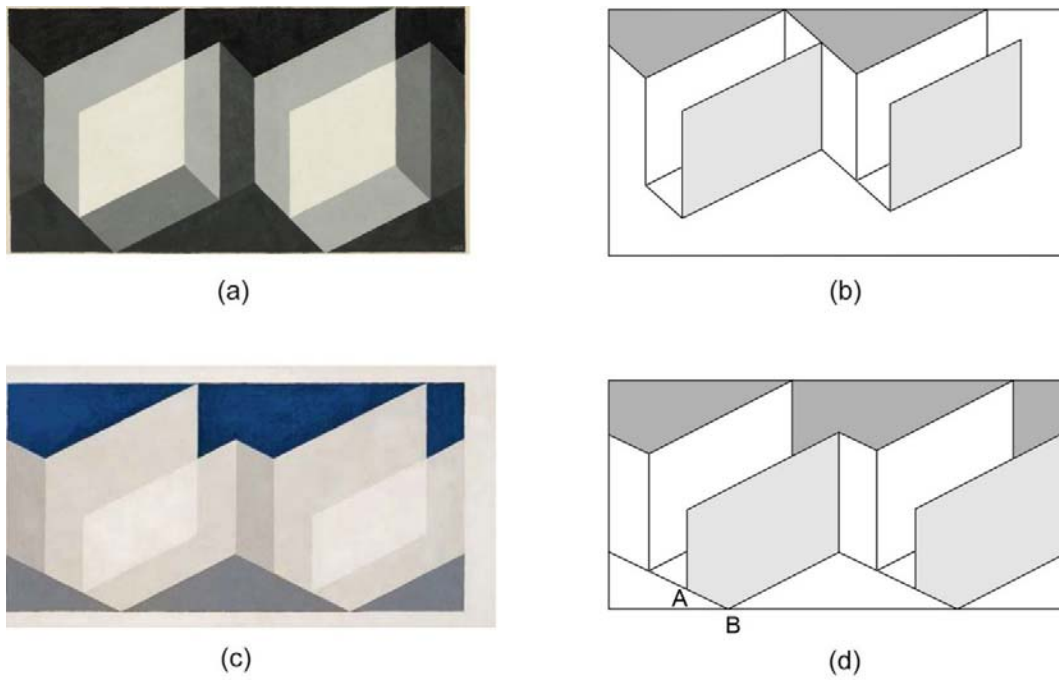


Fig. 6. Geometric illusory composition by J. Albers:
(a) *Repetition: Grey Steps, Grey Scales, Grey Ladders*;
(c) *Repetition against blue*, 1943;
(b) and (d): two different isometric interpretations.

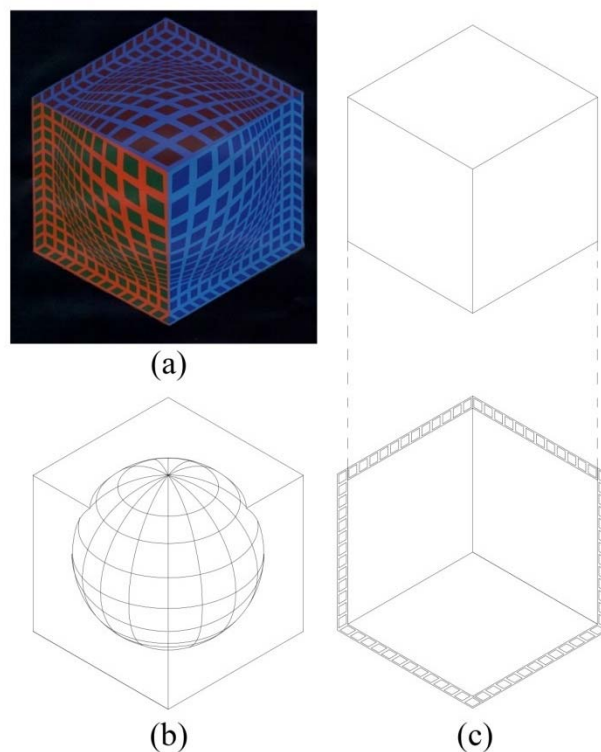


Fig. 7. Isometric cube: (a) Vasarely, *Hat-Tupa*, 1971;
(b) Interpretation of a Boolean composition of a cube and a sphere;
(c) Interpretation of the isometric dihedron and the inside cube.

To express these principles, Vasarely made great use of axonometry as a method of representation alongside the use of contrasting colours (often primary) or black and white. In *Hat-tupa* (1971) (Fig. 7 (a)) we can see an isometric cube, with its regular hexagonal outline, that shows a tartan texture on each of its faces. The tartan configuration is distorted not only by the isometric directions but we can imagine something like a sphere that comes out from the cube as the two solids were put together in a Boolean addition (Fig. 7 (b)). In a more detailed observation we can see that the edges of the cube show the tartan configuration as it is disposed along the surfaces of a dihedron where a smaller cube is stuck inside (Fig. 7 (c)).



Fig. 8. Fondation Vasarely, Aix-en-Provence, 1976: tessellation of the sixteen hexagonal prisms.

All the characteristics analysed up to this moment can be found not only in paintings, but in architecture as well, as one can see in the *Fondation* built in 1976 in Aix-en-Provence in France (Fig. 8). The *Fondation* was designed by Vasarely based on his studies on geometry, which play a part in each component of the building. The building is made up of 16 aligned hexagonal prisms, which in plan could be interpreted as a hexagonal tessellation, while on each vertical face there are alternating black and white circles. This work transfers onto architecture the skills Vasarely developed in his graphic studies – he proved himself as a complete artist able to influence the art of the second half of the twentieth century.

4.3 Contemporary language: a *repetitive* music video

Isometric tessellation is still used today, especially in its two-dimensional and three-dimensional duality to express conceptual content through figurative means. An interesting example is provided by the music video of the singer songwriter Stromae (Paul Van Haver, born in 1985). His song *Tous les mêmes*, taken from his 2013 album *Racine carrée* is presented in a music video (directed by Henry Scholdfield; cinematography by Marc Gómez del Moral), with a great value in terms of visual effects. Reference to geometric elements of tessellation and the scientific representation of space on a plane is indeed articulated, but at the same time it fulfils an explanatory function of the content of the song.

The video begins inside an apartment and together with the lyrics it tells the story of a relationship between a man and a woman, whose roles are associated respectively to domination and submission; rhythmic music accompanies the melancholic and ironic tone of the song's content. Besides the theme of the stereotyped role of the sexes, it is interesting that in the video the singer is represented with two different halves: woman and man. The woman

complains how men are “*tous les mêmes*” and her rebellion takes shape in the second part of the video with her transformation into man/woman and the change of scene, which leads us into an external space. A crowd becomes involved in a dance, in which a woman/man *alter ego* joins, and a dance/duel ensues between the two.

In the final scene, the two characters move apart from each other: the man/woman walks towards a series of green-coloured cubic spaces, while the woman/man walks to the right, towards analogous spaces in pink (Fig. 9). The scene as a whole allows one to see a regular spatial division of cubic scenes represented using isometric orthogonal axonometry. Again, colour is used with varying degrees of transparency to enrich the image and enable the viewer to perceive two superimposed planes, due to the symmetry of the grid.

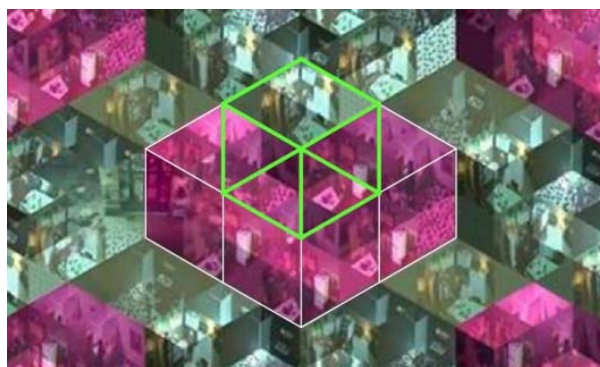


Fig. 9. Stromae, *Tous Les Mêmes* (videoclip, 2013): isometric spaces.

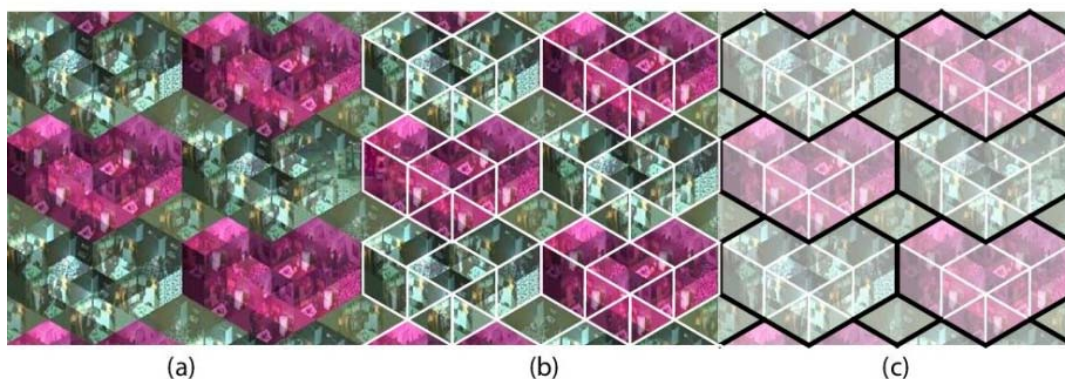


Fig. 10. Graphic scheme of the isometric configuration (b) and a complex tessellation (c).

As the camera pulls away from the scene, it is possible to visualise the spatial groups as flat tessellations (Fig. 10). In particular, one can observe a rhombic module formed by two equilateral triangles and oriented according to the isometric face (Fig. 10 (b)). It is possible to identify an irregular tessellation on the next level, which places the eight-sided pink polygon (made up of 7 rhombi) next to an identical green polygon, connected by a green rhombus (Fig. 10 (c)). The characters viewed from outside lose their individual characteristics and take on evident repetitive features: using a visual language codified, as we have seen, in the last century, this video expresses how the characters appear exactly like one another in the way they approach or endure life.

5 Conclusions: is it all the same?

This study has shown some examples in which the repetition of a single geometric element can lead to three-dimensional illusions. We illustrated the presence of the tartan configuration as a Mongean projection of a series of aligned and spaced cubes and the frames configuration as a one-point perspective projection of a series of squares aligned along the principal direction. We investigated how a series of regular hexagons acquires the features of isometric orthogonal axonometry: an interesting characteristic of isometric configuration is that it allows the observer to interpret the image either as a representation of three-dimensional spaces or as the tessellation of a plane.

The recurrence in graphic language of the isometric configuration was increased thanks to the work of Josef Albers, who combined it with a masterful use of colour and transparency effects. Victor Vasarely in turn integrated it with his interest in the modulation of measures and disposition, able to give the impression of curved surfaces. The echoes of this figurative research can be found in the visual culture of today, as demonstrated by Stromae's music video, which used isometric configuration in its three-dimensional meaning as well as its two-dimensional transformation, where repetitiveness symbolised the levelling out of the details into the whole.

Acknowledgements

This study has been conducted thanks to the P. R. A. 2017 funding - Athenaeum Research Project, entitled "Representations and simulation in architecture"; scientific coordinator: C. Cándito.

The paper was conceived and developed as a team work, but paragraphs 1, 2, 4.1 and 4.3 were written by Cristina Cándito and paragraphs 3 and 4.2 were written by Alessandro Meloni.

References

- [1] ACKERMANN, J. *Architettura e disegno. La rappresentazione da Vitruvio a Gehry*, Milano: Mondadori Electa, 2003. ISBN 9788837020583.
- [2] ANDERSEN, K. *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer, 2007. ISBN 9780387489469.
- [3] ALBERS, J. *Interaction of Color*, New Haven: Yale University Press, 1963; Italian edition: *Interazione del colore*, Parma: Pratiche editrice, 1991. ISBN 9788873801188.
- [4] BUSTO, A., ISNARDI, C. *Victor Vasarely*. Milano, Triennale Bovisa, 4th October 2007-27th January 2008, Milan: Hoepli, 2007, ISBN 9788888482712.
- [5] CÀNDITO, C. *Le proiezioni assonometriche. Dalla prospettiva isometrica all'individuazione dei fondamenti del disegno assonometrico*, Florence: Alinea, 2003, ISBN 9789991256860.
- [6] COLVIN, H. *A biographical Dictionary of British Architects. 1600-1840*. 3rd ed., New Haven- London: Yale University Press, 1995. ISBN 9780719533280.
- [7] FARISH, W. *On isometrical perspective*. Transactions of Philosophical Society. I, 1822, pp. 4-19.

- [8] FIEDLER, J., FEIERABEND, P. *Bauhaus*. Köln: Könemann, 2000, ISBN 9783829025942.
- [9] JOPLING, J. *The practice of Isometrical Perspective*, London, M. Salmon, 1833.
- [10] LORIA, G. *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai nostri giorni*, Milano: Hoepli, 1921.
- [11] OROSZ, M., IMRE, G. *Victor Vasarely. The Birth of Op Art*, Madrid: Thyssen-Bornemisza Museum, 2018, ISBN 9788417173166.
- [12] ROSSI, M. *La rivoluzione del disegno. Modelli organici e pattern digitali*, in ROSSI, M., CASALE, A. (eds.), *Uno (nessuno) centomila prototipi in movimento*, Milan: Maggioli, 2014, pp. 35–52. ISBN 9788891604491.
- [13] SCOLARI, M. *Elementi per una storia dell'axonometria*, Casabella, n. 500, 1984, pp. 42-49; Eng. trans.: *Elements for a history of Axonometry*, Architectural Design, LV, n. 5-6, 1985, pp. 73-78.
- [14] STEPHEN, L., LEE, S. (edited by), *Dictionary of National Biography*, London, 1908-1910.
- [15] TATON, R. *Les grandes étapes de la mathématisation des techniques graphiques: des origines à Dürer, à Desargues et à Monge*, XY. Dimensioni del Disegno, 1, 1986.
- [16] WEYL, H. *Symmetry*, Princeton University Press, 1952. ISBN 0691023743.

Cristina Cándito, PhD.

Department Architecture and Design
University of Genoa (Italy)
Stradone Sant'Agostino, 37 – 16123 Genova, Italy
e-mail: candito@arch.unige.it

Alessandro Meloni, Arch.

Department Architecture and Design
University of Genoa (Italy)
Stradone Sant'Agostino, 37 – 16123 Genova, Italy
e-mail: arch.melonialejandro@gmail.com

Prof. Ján Čižmár ocenený Veľkou medailou sv. Gorazda za celoživotný jedinečný prínos v oblasti teórie vyučovania matematiky a histórie matematiky

Andrej Ferko

Abstrakt

Ocenenie prof. RNDr. Jána Čižmára, CSc.
za celoživotnú prácu a prínos v matematike.

Kľúčové slová: Veľká medaila sv. Gorazda

Abstract

Award to prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc.
for his lifelong work in mathematics.

Key words: Big medal of st. Gorazd

Slávnostné výročné podujatie sa konalo pri príležitosti Dňa učiteľov 2019. Veľkú medailu sv. Gorazda, najvyššie školské vyznamenanie, udeľuje ministerstvo školstva za celoživotnú prácu a mimoriadne výsledky celoštátneho i medzinárodného významu, ktoré robia dobré meno školstvu Slovenskej republiky.

„Každý rok takto oceňujeme zaslúžilých pedagógov, ktorým patrí náš obdiv a uznanie za všetko vynaložené úsilie, s akým svojim žiakom a zverencom vstúpili a naďalej vstúpia poznatky a hodnoty,“ uviedla pani ministerka Martina Lubyová.

Veľkú medailu sv. Gorazda prevzal aj prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. za celoživotný jedinečný prínos v oblasti teórie vyučovania matematiky a histórie matematiky.

V liste dekana fakulty k udeleniu Zlatej medaily [1] sa oi. uvádza, že jeho vedeckovýskumná činnosť zasahuje do algebrickej geometrie, histórie a filozofie matematiky a základov matematiky a teórie jej vyučovania. Treba spomenúť objaviteľskú sériu prác o biracionálnych transformáciách, založenie a vedenie seminára aj mnohých kvalifikačných prác. Koordinoval projekty, medzinárodnú spoluprácu a vyškolil dvanásť doktorandov. Práve v jeho seminári vyrástli dnešné vedúce osobnosti na Slovensku – doc. Boďa a doc. Solčan.

Má za sebou vyše 40-ročnú prax najmä vo vyučovaní matematiky, deskriptívnej, analytickej, projektívnej a algebrickej geometrie, pričom jeho pôsobenie v predmetoch algebrická geometria a dejiny matematiky bolo nepochybne priekopnícke. Odviedol desiatky diplomoviek a sumárne okolo stovky kvalifikačných prác všetkých stupňov.

Pán profesor nezastupiteľne rozvíjal aj vedecký život, napr. ako predseda Terminologickej komisie JSMF, hosťujúci profesor na technických univerzitách vo Viedni, Grazi a Drážďanoch, prekladateľ početných učebníc, predseda rigorózneho komisie a zástupca vedúceho katedry.

V oblasti dejín a filozofie matematiky práve prof. Čižmár započal so systematickou výskumnou prácou a vytvoril monumentálne knižné dielo, ocenené výročnou cenou Literárneho fondu. V teórii vyučovania matematiky kladie dôraz na principiálne otázky učiteľovho didaktického a odborného vzdelania, čo vyjadruje predovšetkým monografia o grupách geometrických transformácií. Významná je jeho medzinárodná prednášková a domáca autorská práca, recenzná oponentská a expertízna činnosť na projektoch ako Beliana či takmer tridsaťročné recenzovania pre *Mathematical Reviews*. Málokto má na konte 6 monografií, okolo 200 publikácií a také ambiciózne plány, ako pripravovaný preklad Euklidových Základov do slovenčiny. Pán profesor je členom Redakčnej rady nášho časopisu. Jeho takmer celoživotná prítomnosť v školstve i vedeckom živote vysoko presahuje prínos jediného človeka aj rozsahom aj významom.

Srdečne gratulujeme!



Prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. pri preberaní Veľkej medaile sv. Gorazda
zdroj: Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky

Literatúra

- [1] SOLČAN, Š. *50 rokov založenia Katedry geometrie*. Bratislava: Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2012. ISBN 978-80-8147-000-4.

doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, SR
e-mail: Andrej.Ferko@fmph.uniba.sk

Geometrická a matematická analýza mapy Bohemiae Rosa, Blaeuových historických máp zo 17. storočia a Augustovo zobrazenie

Margita Vajsáblová

Abstrakt

Historické mapy majú okrem faktografickej aj umeleckú hodnotu, ich matematické a geometrické základy sú veľmi rozmanité. V tomto článku sa zameriavame na geometrickú analýzu kartografického zobrazenia na troch mapách zo 17. storočia, a to mapy sveta, Európy a mapy Bohémie, ktorých autormi sú Willem Blaeu so synom Joanom. Analýzou mapovej kuriozity Bohemiae Rosa od Kristiána Vettera sme ukázali geometrické objekty (päťuholníky, epicykloidy) a vlastnosti kompozície mapy, čím sme sa snažili vniknúť do myslenia autora pri jej tvorbe. V závere článku je uvedená matematická a geometrická charakteristika Augustovho zobrazenia, ktoré tiež používa epicykloidy.

Kľúčové slová: historické mapy, kartometrická analýza, kartografické zobrazenie, epicykloida

Abstract

Historical maps present not only factual but also artistic value. Their mathematical and geometric fundamentals show a great diversity. The paper deals with geometric analysis of the cartographic projection on three maps from the 17th century mapping the world, Europe and Bohemia, whose authors are Willem Blaeu with his son Joan. Analyzing the map curiosity of Bohemiae Rosa by Christoph Vetter we have showed the geometrical objects (pentagons, epicycloids) and properties of the map composition in conjunction with the author's message. The final chapter presents mathematical and geometric characteristics of August's cartographic projection, where epicycloids are also used.

Key words: historical map, cartometric analysis, cartographic projection, epicycloid

1 Filozofické, matematické, geometrické a umelecké aspekty historických máp

Historický rozvoj kartografie bol podmienený viacerými disciplínami a ako je uvedené v [10], o dôležitý prínos v kartografii sa zaslúžili aj viacerí významní matematici. Historické mapy môžeme považovať za umelecké diela, avšak mnohé z nich sú vytvorené na exaktne matematických a geometrických princípoch. Ako uviedol Brotton v knihe [1], historické mapy vypovedajú o mnohých faktoch doby, v ktorej boli vytvorené. Príkladom je Atlas Maior o Geographia, ktorý bol publikovaný v rokoch 1662 až 1672 v Amsterdame. Atlas obsahuje 594 rukou nakreslených a vyfarbených máp, ktoré na tie časy verne znázorňujú svet. Dnes je táto vzácna relikvia niekdajších objaviteľov drahšia ako napríklad Rembrandtov obraz [14]. Tvorbu Atlasu Maior začal v roku 1629 holandský kartograf Willem Janszoon Blaeu, skompletizoval a publikoval ho jeho syn Joan Blaeu (1596 - 1673) [13].

Tento vyžiadaný článok je prekladom a rozšírenou verziou príspevku [11], publikovaného v zborníku konferencie APLIMAT 2019.

Hodnota historických máp z obdobia 13. až 19. storočia nezahŕňa iba ich geografické znázornenie vtedy známeho sveta, ale tiež ukazujú charakteristiku doby z hľadiska filozofického a umeleckého, a to aj na základe ilustrácií, ktoré obsahujú, napr.:

- figurálnu tvorbu danej doby, ako panovníkov, historické udalosti, národy, obyvateľov miest a pod.
- významné architektonické diela v mestách danej krajiny
- schémy a veduty miest
- heraldické a iné symboly
- astronomické prvky, napr. planéty
- živly
- znamenia zverokruhu
- mytologické a náboženské postavy.

Kartografia 16. a 17. storočia bola veľmi mnohotvárna aj v používaní kartografických zobrazení, ktoré sú postavené na geometrických základoch, a teda mapy majú matematický základ. Práve kartografické zobrazenia formulované v 16. a 17. storočí presne definujú tvar obrazu zemepisnej siete rovnobežiek a poludníkov, avšak v tomto článku ukážeme aj geometrickú analýzu mapy Bohemiae Rosa, ktorá je považovaná za kartografickú kuriozitu. Napriek tomu, že rozvoj Európskej kartografie smeroval k presnosti, práve tu od 13. storočia vznikali aj kartografické kuriozity, ktoré sú filozofickou a názorovou výpoveďou doby, a tiež satiricko-humoristickou charakteristikou zobrazovaných krajín. Tieto mapy odrážajú odvahu a emócie tvorcov, ich zmysel pre humor, ale tiež politickú a sociálnu satiru tej doby [2].

V tomto článku budú ukázané charakteristiky a kartometrické analýzy príkladov máp zo 17. storočia, ktorých tvorcami sú spomínaní Willem Janszoon Blaeu a jeho syn Joan, a to mapu sveta, mapu Európy a mapu Bohémie. Veľkú pozornosť budeme venovať geometrickej analýze Vetterovej mapy Bohemiae Rosa, ktorá je považovaná za mapovú kuriozitu, avšak pokúsime sa ukázať, že za jej umeleckou stránkou je geometrická schéma. V záverečnej kapitole uvedieme charakteristiku Augustovho epicykloidálneho zobrazenia, ktorého vlastnosti ho spájajú s geometriou mapy Bohemiae Rosa a uvedieme tiež jeho konštrukciu pomocou stereografického zobrazenia použitého na Blaeuovej mape Europa Recens Descripta analyzovanej v tomto článku.

2 Mapa sveta a mapa Európy od Willema Janszoona Blaeua

Kartografické zobrazenie a jeho parametre na mapách tejto doby nebývajú uvedené v legende, a preto je potrebné pristúpiť ku kartometrickej analýze. Táto analýza pozostáva z určenia geometrického tvaru obrazu zemepisných rovnobežiek a poludníkov, a tiež ich vzájomnej polohy. Z uvedeného je možné určiť typ zobrazenia. Pre určenie parametrov kartografického zobrazenia je nutná analýza skreslenia prvkov zemepisnej siete. Na mape sveta je táto úloha oveľa jednoduchšia ako na mapách kontinentov alebo na mapách štátov.

2.1 Nova Totius Terrarum Orbis Geografica ac Hydrografica Tabula

Ilustrovaná mapa sveta Nova Totius Terrarum Orbis Geografica ac Hydrografica Tabula (obr. 2) bola vytvorená holandským kartografom, tvorcom a vydavateľom máp a atlasov Willemom Janszoonom Blaeuom (1571-1638) [12]. Bol synom bohatého predavača sled'ov, ale mal veľký záujem o matematiku a astronómiu. V rokoch 1594 – 1596 študoval s dánskym

astronómom Tycho de Brahe a bol vyškolený v tvorbe glóbusov. Po návrate do Holandska tvoril mapy a glóbusy, a keďže mal vlastnú tlačiareň, bol schopný publikovať mapy štátov v atlasovom formáte. Tieto mapy sa objavili aj v jeho Atlas Novum publikovanom prvý krát v roku 1635. Titulná strana tohto atlasu je na obr. 1 [14]. Mapa Nova Totius Terrarum Orbis Geografica ac Hydrografica Tabula bola prvý krát publikovaná v Amsterdame v roku 1617 a neskôr bola publikovaná aj v Atlase Maior o Geographia Blaviana spomenutom v úvode článku [13]. V tejto kapitole uvedieme charakteristiku a základnú kartometrickú analýzu tejto mapy sveta.

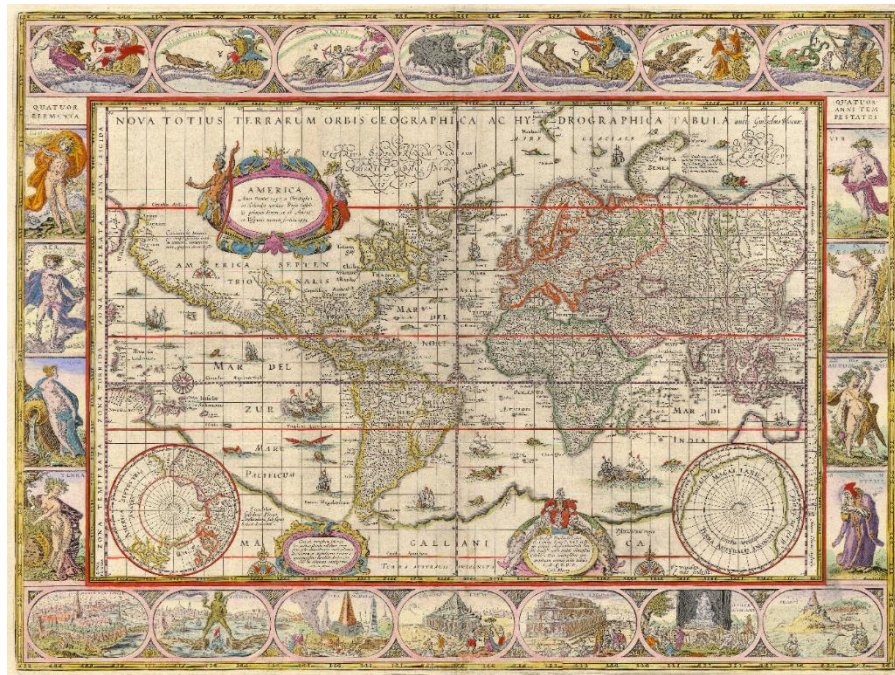


Obr. 1. Titulná strana Blaeuovho diela Atlas Novus z roku 1645 [14].

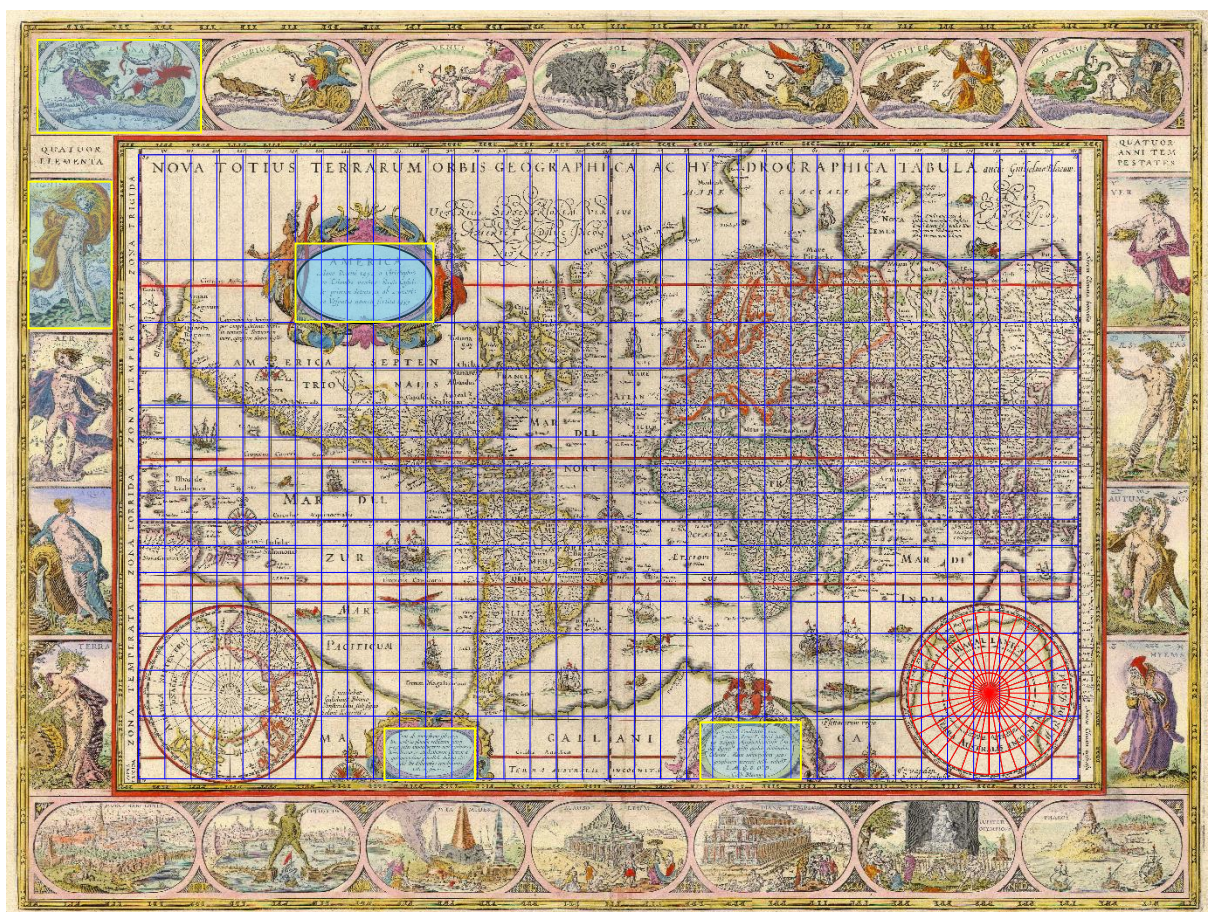
Mapa Nova Totius Terrarum Orbis Geografica ac Hydrografica Tabula je bohato zdobená:

- Na ľavom ráme sú figurálne obrazy 4 elementov (zhora): Oheň, Vzduch, Voda a Zem.
- Na pravom ráme sú 4 ročné obdobia (zhora): jar, leto, jeseň a zima.
- Na hornom ráme sú bohovia planét (zľava): Mesiac, Merkúr, Venuša, Slnko, Mars, Jupiter a Saturn.
- Na dolnom ráme je znázornených 7 antických divov sveta (zľava): Semiramidine visuté záhrady v Babylone, Rodský kolos, Pyramídy v Gíze, Mauzóleum v Halikarnasse, Artemidin chrám v Efeze, Diova socha v Olympii a Alexandrijský maják.

Uvedené prvky rámovej dekorácie majú tiež geometrické zákonitosti zobrazené na obr. 3. Ilustrácie na ľavom a pravom okraji mapy sú ohraničené obdĺžnikmi, ktoré majú rovnaký pomer strán, ako je pomer strán obdĺžnikov, ktoré sú konvexným obalom oválov na hornom a dolnom okraji mapy. Rovnaký pomer majú tiež dĺžky osí eliptickej kartuše s textom v oblasti severnej Ameriky, a tiež strany obdĺžnikov, do ktorých sú vpísané kartuše v dolnej časti mapy.



Obr. 2. Mapa Nova Totius Terrarum Orbis Geografica ac Hydrografica Tabula publikovaná v roku 1617 v Amsterdame [17].



Obr. 3. Geometrické prvky a verifikácia geografickej siete na mape Nova Totius Terrarum Orbis Geografica ac Hydrografica Tabula.

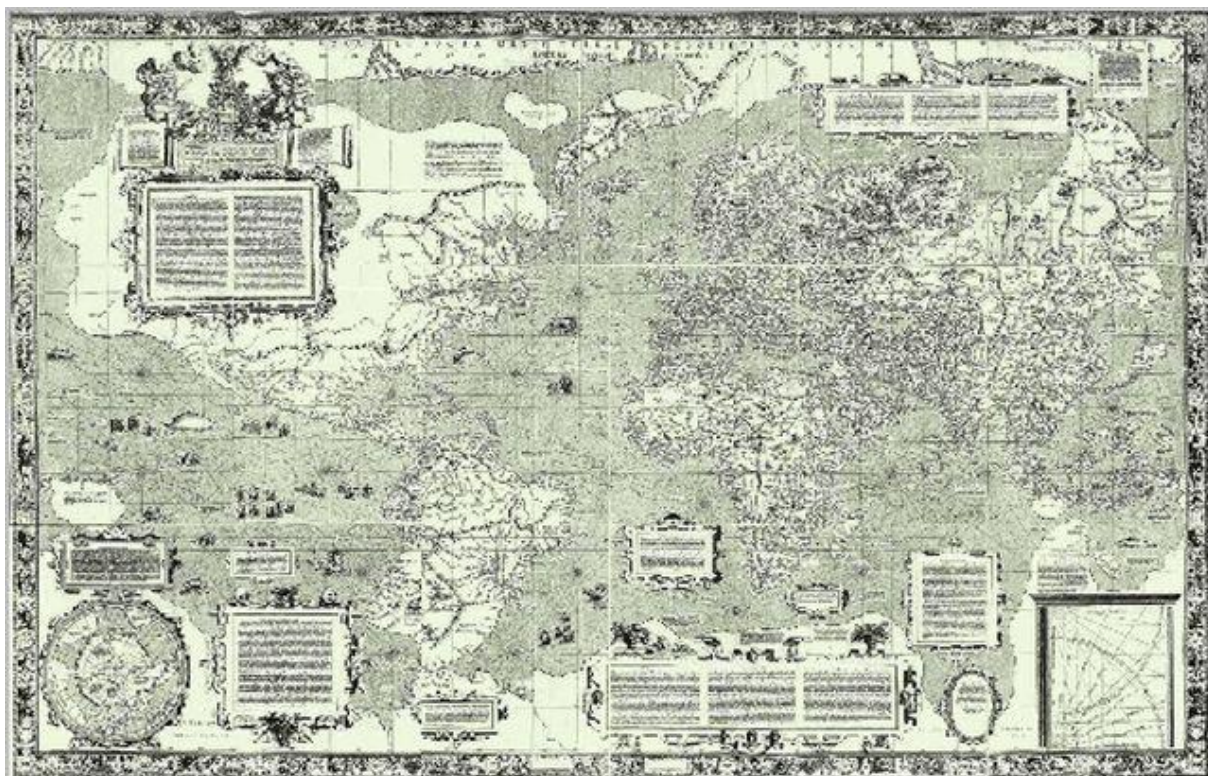
Kartometrická analýza na mape sveta nie je veľmi náročná, nakoľko triedu použitého kartografického zobrazenia je možné dedukovať z tvaru obrazu zemepisnej siete. Na mape Nova Totius Terrarum Orbis Geografica ac Hydrografica Tabula sa zemepisné poludníky zobrazujú ako vertikálne rovnobežné priamky v pravidelných intervaloch a rovnobežky ako horizontálne priamky. Tieto vlastnosti spĺňajú valcové zobrazenia v normálnej polohe. Na vnútorných mapových rámoch sú označené klimatické pásma a hodnoty zemepisnej šírky a dĺžky. Vzďialenosti medzi obrazmi zemepisných rovnobežiek sa zväčšujú smerom k pólom, čo je typická vlastnosť konformného valcového zobrazenia, ktorého autorom je významná osobnosť v histórii kartografie Gerhard Kraemer nazývaný Mercator. Mercatorova mapa sveta (1569) na obr. 4 bola používaná hlavne v navigácii, pretože zobrazenie je konformné, čiže zachováva aj azimuty, teda obrazom každej loxodrómy (krivky, ktorá pretína poludníky pod konštantným azimutom) je priamka.

V každom bode je dĺžkové skreslenie v smere rovnobežky a v smere poludníka rovnaké a jeho hodnota rastie so vzdialenosťou od rovníka. Zobrazovacie rovnice Mercatorovho valcového zobrazenia referenčnej sféry s polomerom R na valcovú plochu sečnú v rovnobežke so sférickou zemepisnou šírkou U_0 sú [9]:

$$x = n \ln \operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right),$$

$$y = nV, \text{ kde } n = R \cos U_0. \quad (1)$$

Z detailnejšej analýzy mapy vyplýva, že $U_0 = 0^\circ$, teda zobrazenie je na valcovú plochu dotykovú na rovníku a parameter $n = R$. Na obr. 3 je znázornená verifikácia obrazu zemepisnej siete v uvedenom Mercatorovom zobrazení na dotykovú valcovú plochu.



Obr. 4. Mercatorova mapa sveta (1569) [8].

Pólové kružnice sa v Mercatorovom konformnom valcovom zobrazení zobrazujú do nekonečna, preto sú pólové oblasti zobrazené v dolných rohoch mapy. Kartometrická analýza ukázala, že oblasti severného a južného pólu Willem Janszoon Blaeu zobrazil v azimutálnom zobrazení ekvidistančnom na poludníkoch, a to na dotykovú rovinu v póle. Na obr. 3 sme ukázali verifikáciu obrazu zemepisnej siete v oblasti južného pólu. Dĺžkové skreslenie na rovnobežkách v tomto zobrazení narastá so vzdialenosťou od pólu.

2.2 Europa Recens Descripta

Figurálna výzdoba mapy bola u Willema Janszooona Blaeua veľmi prepracovaná, ako vidieť aj na jeho mape Europa Recens Descripta (obr. 5), ktorá reprezentuje tvorbu vrcholného obdobia holandskej kartografie. Mapa bola prvýkrát vydaná v roku 1617 a neskôr bola tiež publikovaná v Atlase Maior o Geographia Blaviana. Horný mapový rám je dekorovaný vedutami významných európskych miest: Praha, Istanbul, Benátky, Rím, Paríž, Londýn, Toledo, Lisabon. Veduta Prahy je prevzatá z atlasu miest sveta nemeckých autorov Georgesa Brauna a Franza Hogenberga. Na bočných rámoch mapy je figurálna tvorba znázorňujúca dvojice Európanov, medzi ktorými sú aj obyvatelia Bohémie. Táto mapa bola vydaná v Amsterdame v roku 1661 [12].



Obr. 5. Mapa Europa Recens Descripta [17].

Kartografické zobrazenie použité na mape Europa Recens Descripta nie je uvedené v legende, a preto je potrebné vykonať jej kartometrickú analýzu. Tvar obrazu zemepisnej siete rovnobežiek a poludníkov bolo nutné podrobne analyzovať, pričom sa ukázalo, že obrazom rovnobežiek sú nesústredné kružnice so stredmi na centrálnom poludníku a obrazom poludníkov sú tiež nesústredné kružnice. Tieto vlastnosti spĺňajú viaceré typy kartografických zobrazení, hlavne:

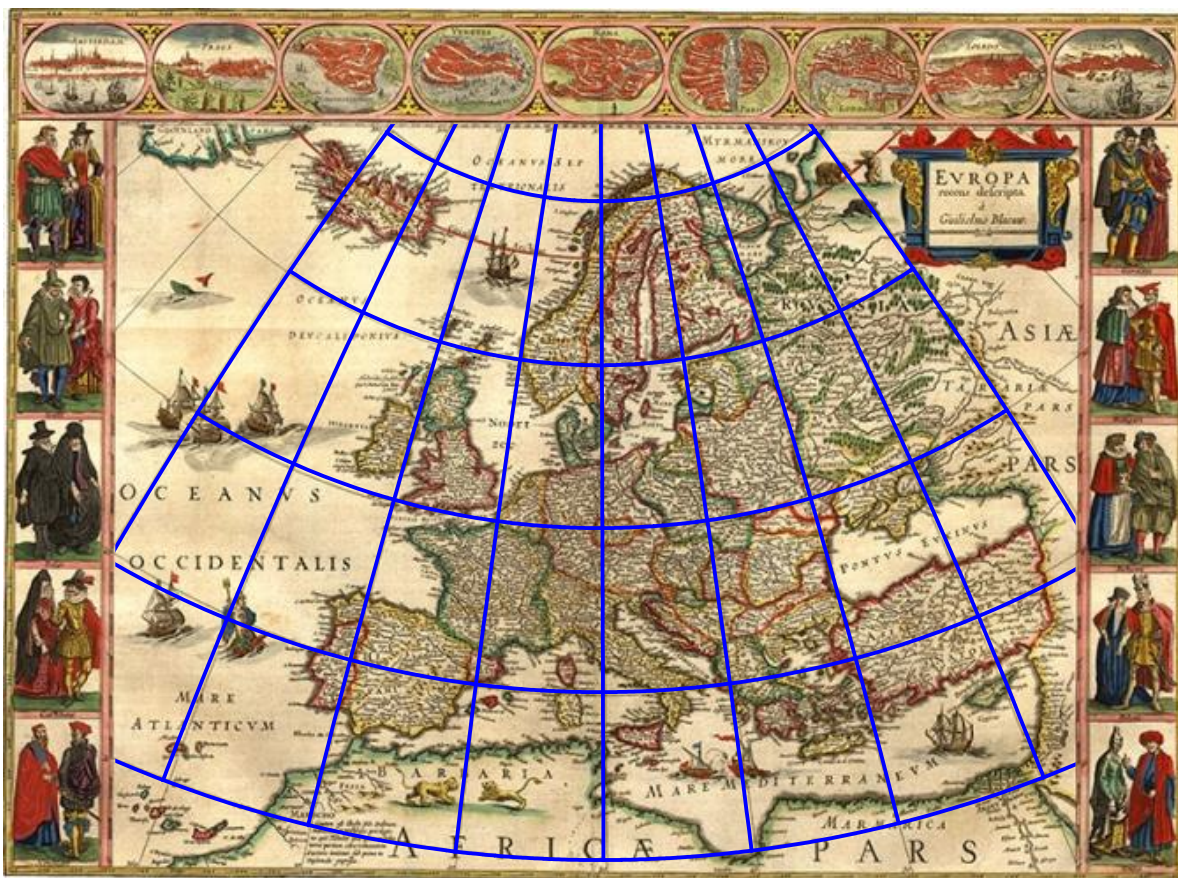
- globulárne zobrazenie, ktoré je špeciálnym prípadom polykónického zobrazenia
- stereografické azimutálne zobrazenie vo všeobecnej polohe.

Detailnou a náročnou kartometrickou analýzou sme ukázali, že Willem Janszoon Blaeu na mape *Europa Recens Descripta* aplikoval stereografické azimutálne zobrazenie vo všeobecnej polohe. Toto zobrazenie je definované ako stredový priemet bodov guľovej plochy, pričom stred premietania leží na guľovej ploche a priemetňa je rovnobežná s dotykovou rovinou guľovej plochy v tomto strede premietania. Stereografické azimutálne zobrazenie je konformné, teda zachováva uhly a obrazom ľubovoľnej kružnice referenčnej sféry je kružnica alebo priamka (priamka, iba ak prechádza stredom premietania). Zobrazovacie rovnice stereografického azimutálneho zobrazenia sú [9]:

$$x = \frac{2R[\sin U \cos U_K - \cos U \sin U_K \cos(V - V_K)]}{1 + \sin U \sin U_K + \cos U \cos U_K \cos(V - V_K)},$$

$$y = \frac{2R \cos U \sin(V - V_K)}{1 + \sin U \sin U_K + \cos U \cos U_K \cos(V - V_K)}, \quad (2)$$

kde U_K a V_K sú sférické zemepisné súradnice kartografického pólu, teda sférické zemepisné súradnice bodu, ktorý je na rovnakom priemere referenčnej sféry ako stred premietania. Na určenie sférických zemepisných súradníc U_K a V_K kartografického pólu bolo potrebné vykonať veľmi detailnú analýzu, v ktorej sme určili, že: $U_K = 55^\circ$, $V_K = 40^\circ$. Výpočty verifikuje obraz zemepisnej siete, ktorá je znázornená na obr. 6.



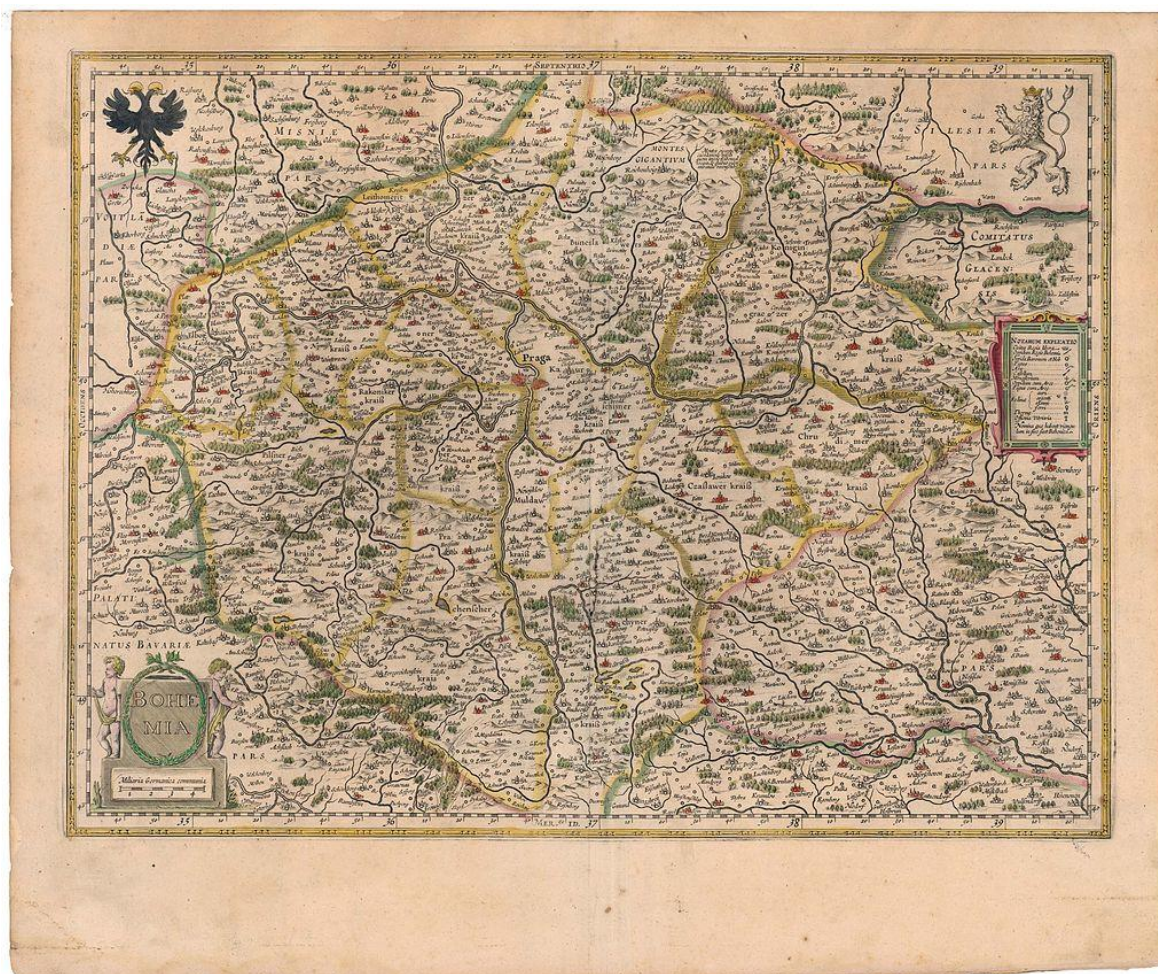
Obr. 6. Verifikovanie obrazu zemepisnej siete na mape *Europa Recens Descripta*.

3 Mapa Bohemia a mapová kuriozita Bohemiae Rosa

V tejto kapitole ukážeme dva rôzne prístupy k tvorbe máp územia Bohémie v rovnakom časovom období. Na Blaeuovej mape Bohemia (obr. 7) sme analyzovali jej matematický základ, teda použitie kartografického zobrazenia a jeho parametre. Vetterova mapa Bohemiae Rosa (obr. 10a) je považovaná za mapovú kuriozitu, teda historici a kartografi charakterizujú a vysvetľujú iba jej umeleckú hodnotu a jej obsah, preto našim cieľom je analyzovať geometrické vlastnosti a prvky v jej kompozícii.

3.1 Mapa Bohemia od Joana Blaeua

Mapa Bohemia na obr. 7 bola publikovaná v atlase Theater of the World (alebo New Atlas of Maps and Representations of All Regions). Editormi tohto diela sú Willem Janszoon Blaeu a jeho syn Joan, ktorých sme spomínali v predchádzajúcich kapitolách. Mapa Bohemia bola vytvorená v roku 1645, a jej autorom je Joan Blaeu [15], ktorý je tiež autorom máp Moravy a Sliezska. Joan Blaeu študoval právo, avšak vydavateľstvu máp jeho otca Willema Blaeua dal prednosť pred právnickou praxou. Po otcovej smrti bratia Joan a Cornelis pokračovali v otcovej firme a Joan tiež prevzal prácu hydrografa v holandskej spoločnosti East India. Neskôr však Joan modifikoval a rozšíril otcov Atlas Novus, nakoniec ho publikuje ako majstrovské dielo, a to ako spomínaný Atlas Maior o Geographia Blaviana [13].

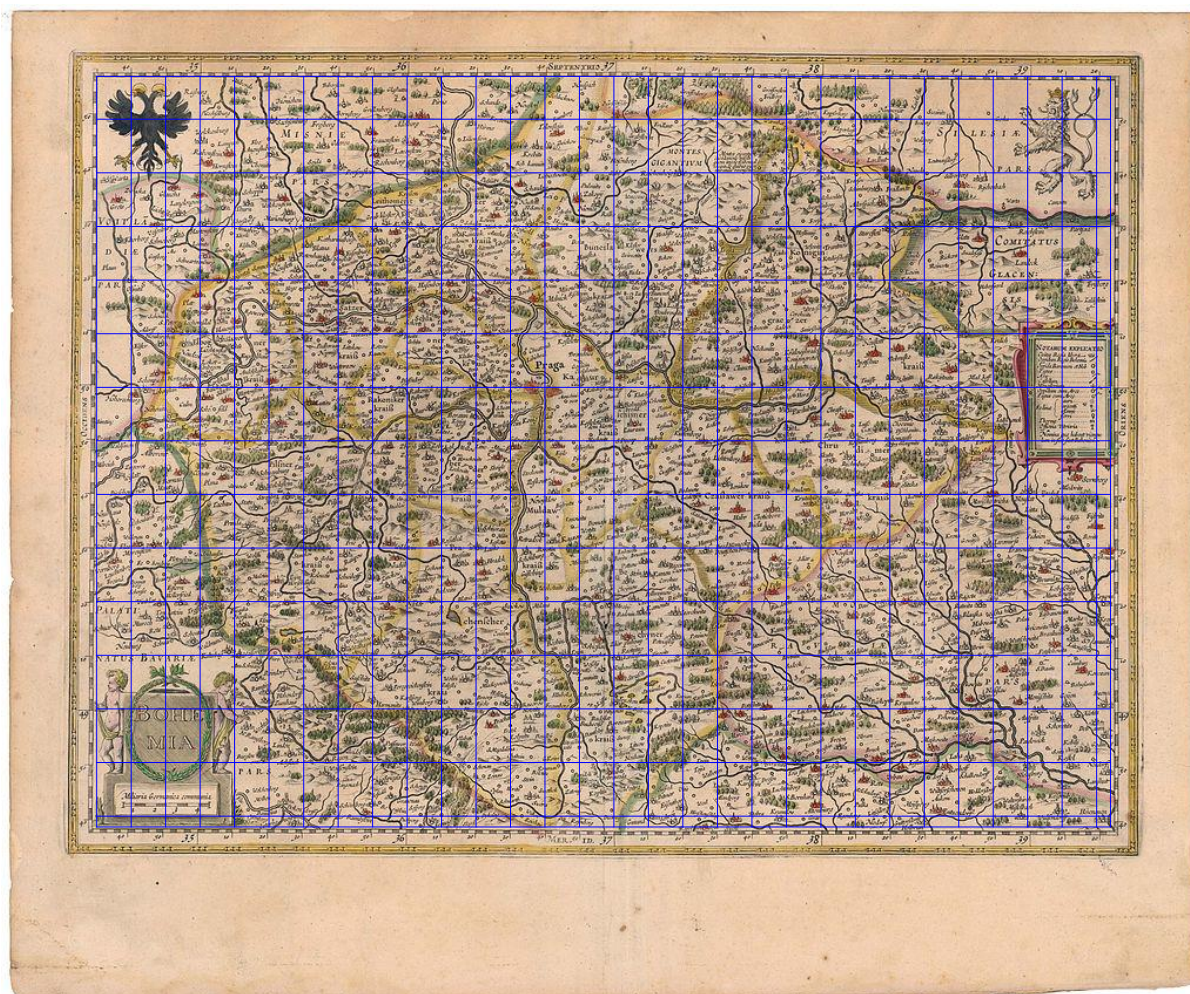


Obr. 7. Mapa Bohemia od Joana Blaeua [17].

Dekorácia Blaeuovej mapy Bohemia je jednoduchá, vkusná, avšak symbolická. V horných rohoch sa nachádzajú symboly – dvojhlavý orol a český lev, v ľavom rohu je kartuša s názvom mapy a s dvoma anjelmi. Obraz zemepisnej siete nie je vykreslený, avšak na mapovom ráme sú vyznačené zemepisné súradnice, z ktorých vidíme, že územie Bohémie je v rozsahu zemepisnej šírky od $48^{\circ} 38'$ do $50^{\circ} 58'$ a zemepisnej dĺžky od $34^{\circ} 30'$ do $39^{\circ} 24'$. Kartometrickou analýzou týchto zemepisných súradníc sme určili, že obrazy poludníkov sú zvislé priamky a obrazy rovnobežiek sú vodorovné priamky, ktoré sú od seba v pravidelných intervaloch. Z toho sme dedukovali, že na Blaeuovej mape Bohemia je použité valcové zobrazenie v normálnej polohe ekvidistančné na poludníkoch, ktorého zobrazovacie rovnice sú:

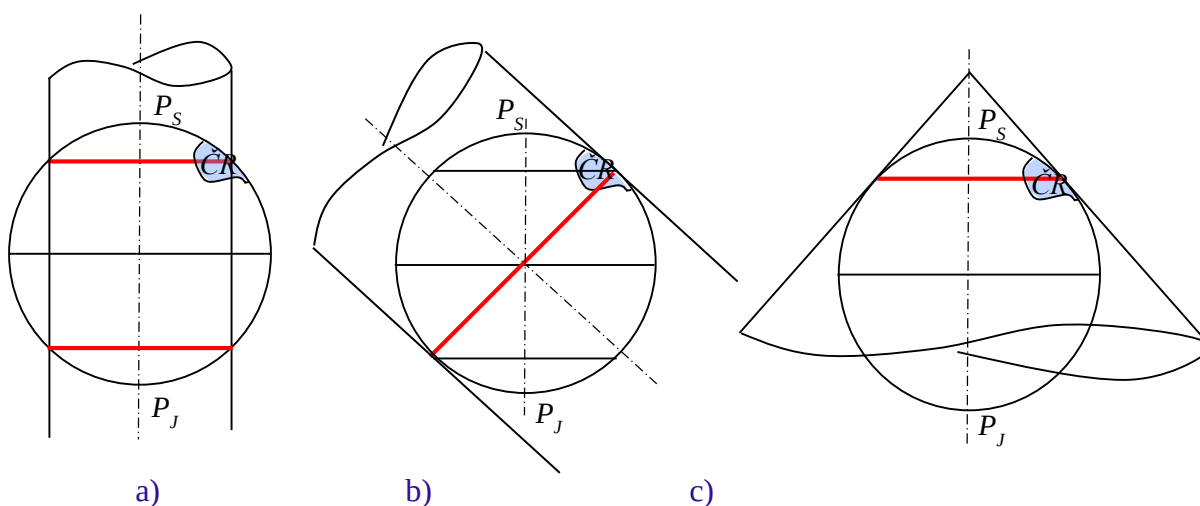
$$\begin{aligned} x &= RU, \\ y &= nV, \text{ pre } n = R \cos U_0, \end{aligned} \quad (3)$$

kde U_0 je zemepisná šírka základnej neskreslenej rovnobežky, ktorá je tiež sečnou rovnobežkou valcovej plochy s referenčnou sférou [9]. Kartometrickou analýzou a výpočtom kontrolného obrazu zemepisnej siete (obr. 8) sme určili, že sférická šírka základnej neskreslenej rovnobežky je $U_0 = 50^{\circ}$.



Obr. 8. Verifikovanie obrazu zemepisnej siete na Blaeuovej mape Bohemia

Hlavné smery dĺžkového skreslenia sú v smere rovnobežiek a poludníkov, pričom poludníky sa neskresľujú. Dĺžkové skreslenie rovnobežiek na tejto mape je v rozsahu od -27 do $+20$ m/km, čo je v súčasnosti na štátnych mapách prakticky nepoužiteľné. Veľké dĺžkové skreslenie je dôsledkom nevhodného výberu kartografického zobrazenia, kedy valcové zobrazenie v normálnej polohe nie je vhodné pre zobrazenie územia ležiaceho pozdĺž zemepisnej rovnobežky (obr. 9a). Efektívnejšie riešenie je použitie kartografického zobrazenia na valcovú plochu vo všeobecnej polohe (obr. 9b) a najvhodnejšie je použitie kužeľového zobrazenia v normálnej (obr. 9c) príp. všeobecnej polohe.



Obr. 9. Princípy alternatív kartografického zobrazenia Česka.

3.2. Vetterova mapa Bohemiae Rosa

Bohemiae Rosa (obr. 10a) je mapa v mierke $1 : 1\,268\,450$ s veľkosťou 390×260 mm a patrí ku kartografickým kuriozitám. Z kartografického hľadiska je jej hodnota viac umelecká ako geografická. Obsah mapy Bohemiae Rosa je významným odkazom doby, avšak našim cieľom je uskutočnenie jej geometrickej analýzy.

Autorom mapy vtedajšej Českej zeme v tvare ruže je sliezsky kartograf Krištof Vetter (1575 – 1650) a medirytinu vyhotovil Wolfgang Kilian (1581 – 1662), ktorý bol v tej dobe známy aj tvorbou portrétov. Kedy bola mapa vyhotovená sa nevie, uverejnená bola až po smrti tvorcov v roku 1668 v diele *Epitome Historica Rerum Bohemicarum*, ktoré vydal historik, literát, zemepisec, jezuita a vlastenec Bohuslav Balbín [3].

Mapa Bohemiae Rosa je krásnou ukážkou barokového ryteckého umenia, kedy bola ruža často používaným symbolom. Tvar rozvíjajúcej sa ruže je známy ako rožmberská ruža (obr. 10b). Vetterova ruža má niekoľko okruhov okvetných lístkov a kvet ruže reprezentuje rozkvet Bohémie. Ruža je osvetlená lúčmi slnka, pred ktorým je symbol kráľovskej koruny. Detailné mraky vyvolávajú zdanie, že slnečné lúče sa pred niekoľkými okamihmi vynorili z búrky. Stonka ruže vyrastá z Viedne, čo symbolizuje prirodzené spojenie českých zemí s habsburskou monarchiou. Na čele listu mapy toto spojenie vyjadruje aj slogan vtedajšieho cisára Svätej ríše rímskej Leopolda I. „*Iustitia et Pietate*“, čo znamená „*Spravodlivosťou a úctou*“. Vpravo hore sa nachádza barokovo dekorovaný český lev chrániaci vzácnu ružu [5].

V ľavom dolnom rohu sa nachádza latinský text, ktorý má symbolickú a vlasteneckú hodnotu, jeho český preklad je [19]:

*„Vyrostla v hercynském hvozdu tam velespanilá Růže,
 stojí tu vedle ní blíž ve zbroji na stráži lev.
 Růže ta, z Martovy krve, ne z krve Venuše vzrostla.
 Zde Rhod, zde je i skok a hned je stvořena zem.
 Krásná, neboj se, Růže! V hercynské sady jde Auster.
 Pod zmlklou Růží ať zbraň utichne strašlivých střel!“*

Z filozofického hľadiska je text tejto básne veľmi zaujímavý. Vetter vyjadruje fakt, že ruža bola vždy považovaná za symbol Venuše, no jeho ružu pripisuje Marsovi, ktorý je symbolom vojen, v ktorých bolo potrebné územie Bohémie ubrániť. V strede mapy je kráľovský erb a vpravo dole je latinský text, ktorý v češtine znamená [4]:

*„Růže Čechie po všechna staletí zkrvavená, v níž více než 80 bitev bylo svedeno.
 Nyní poprvé v této podobě vyhotovená.“*

Pod týmto textom sú mená autorov „Chr. Vetter“ a rytec „Wolfg. Kilian“.



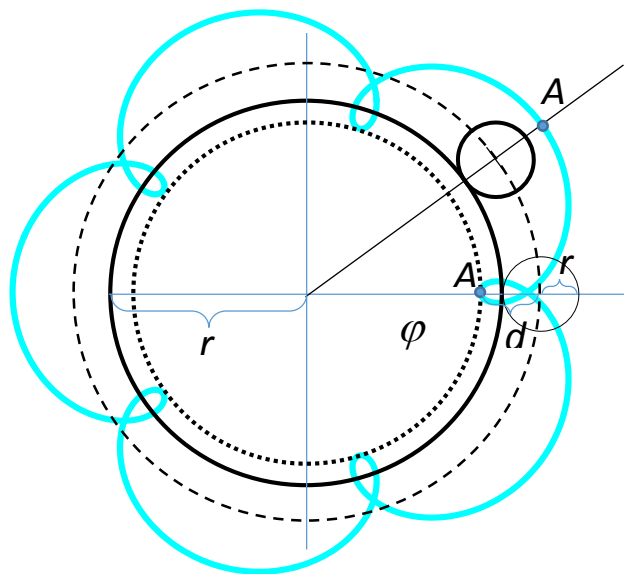
a)



b)

Obr. 10. Mapa Bohemiae Rosa (a) [16] a kresba rožmberskej ruže (b) [6].

Na mape nájdeme aj prvky typické pre modernú kartografiu, a to v ľavom hornom rohu dĺžkové merítka vo vtedajších nemeckých míľach a orientačnú ružicu, pod obrazom ruže v ľavej a pravej časti mapy nájdeme zoznam správnych celkov Bohémie, 14 krajov a 4 mestské oblasti: Praha, Locket, Cheb a Kladsko. V práci [5] je uvedené, že geografické umiestnenie jednotlivých častí Čiech nie je v súlade s realitou, teda nie je možné vykonávať na mape Bohemiae Rosa kartometrické analýzy.



Obr. 11. Geometrický princíp tvorby epicykloidy.

Obsah mapy je opísaný vo viacerých prácach, ale v žiadnej nie je venovaná pozornosť jej geometrickým princípom. Mapa pôsobí len ako výtvarné dielo, avšak po hlbšej geometrickej analýze znázornenej na obr. 12 nájdeme viaceré geometrické prvky a zákonitosti:

- Praha a jej okolie sa nachádzajú v kruhu, z ktorého sa začínajú rozvíjať lístky ruže, pričom pohybom po špirále sa lístky postupne zväčšujú. Špirála však nie je exaktne matematická, jej úloha je symbolizovať rozvoj krajiny zo stredu Bohémie.
- Tieto okvetné lístky sú vrstvené po piatich kusoch okolo, a spojením bodov, v ktorých sa stretávajú, dostaneme nie úplne pravidelné päťuholníky. Od najväčšieho po najmenší ich budeme označovať číslami od 1 do 4.
- Každá priamka, ktorá spája vrchol 1. päťuholníka s vrcholom 3. päťuholníka v smere do stredu mapy, potom prechádza aj cez jeden z vrcholov 4. päťuholníka, a tiež 2. päťuholníka, a to v uvedenom poradí. Všetky tieto priamky sa pretínajú v jednom bode a zvierajú navzájom uhly od 71° do 73° . Z tejto charakteristiky sa nám ponúka hypotéza, že vzájomná poloha päťuholníkov nie je náhodná, dá sa predpokladať, že uvedené priamky v autorovej kompozícii obrazu ruže na mape tvorili zväzok piatich priamok v pravidelných uhlových intervaloch, a teda vzájomne zvierali uhol 72° .
- Okvetné lístky sa zväčšujú v smere od stredu mapy a ich obrysy približne kopírujú tvar epicykloid, ktorých parametrické rovnice sú:

$$\begin{aligned}
 x &= (r' + r) \cos \varphi - d \cos \frac{r' + r}{r} \varphi, \\
 y &= (r' + r) \sin \varphi - d \sin \frac{r' + r}{r} \varphi,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

kde r je polomer tvoriacej (pohybujúcej sa) kružnice, r' je polomer pevnej (základnej) kružnice, d je vzdialenosť tvoriaceho bodu A od stredu tvoriacej kružnice [18]. Princíp tvorby epicykloidy ako kinetickej krivky uvádzame na obr. 11.

Epicyklody ukázané na mape Bohemiae Rosa sú normálne ($d = r$) alebo predĺžené ($d > r$). Bod A na obr. 11 generuje predĺženú epicykloidu. Epicyklody okvetných lístkov na Bohemiae Rosa sú rôzne, preto ich parametre uvádzame v Tabuľkách 1 až 4, a to vo forme ich vzájomných pomerov. Číselné označenie okruhov je od okraja do stredu mapy a označenie epicykloid začína hore a pokračuje v smere pohybu hodinových ručičiek.

	1. epicykloida	2. epicykloida	3. epicykloida	4. epicykloida	5. epicykloida
$\frac{r}{r'}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{73}{360}$	$\frac{61}{360}$	$\frac{19}{90}$	$\frac{59}{360}$
$\frac{d}{r}$	1.5	1	1	1	1

Tab. 1. Parametre 1. okruhu epicycloid.

	1. epicykloida	2. epicykloida	3. epicykloida	4. epicykloida	5. epicykloida
$\frac{r}{r'}$	$\frac{19}{90}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{19}{72}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{d}{r}$	1.5	1	1.25	1.5	1

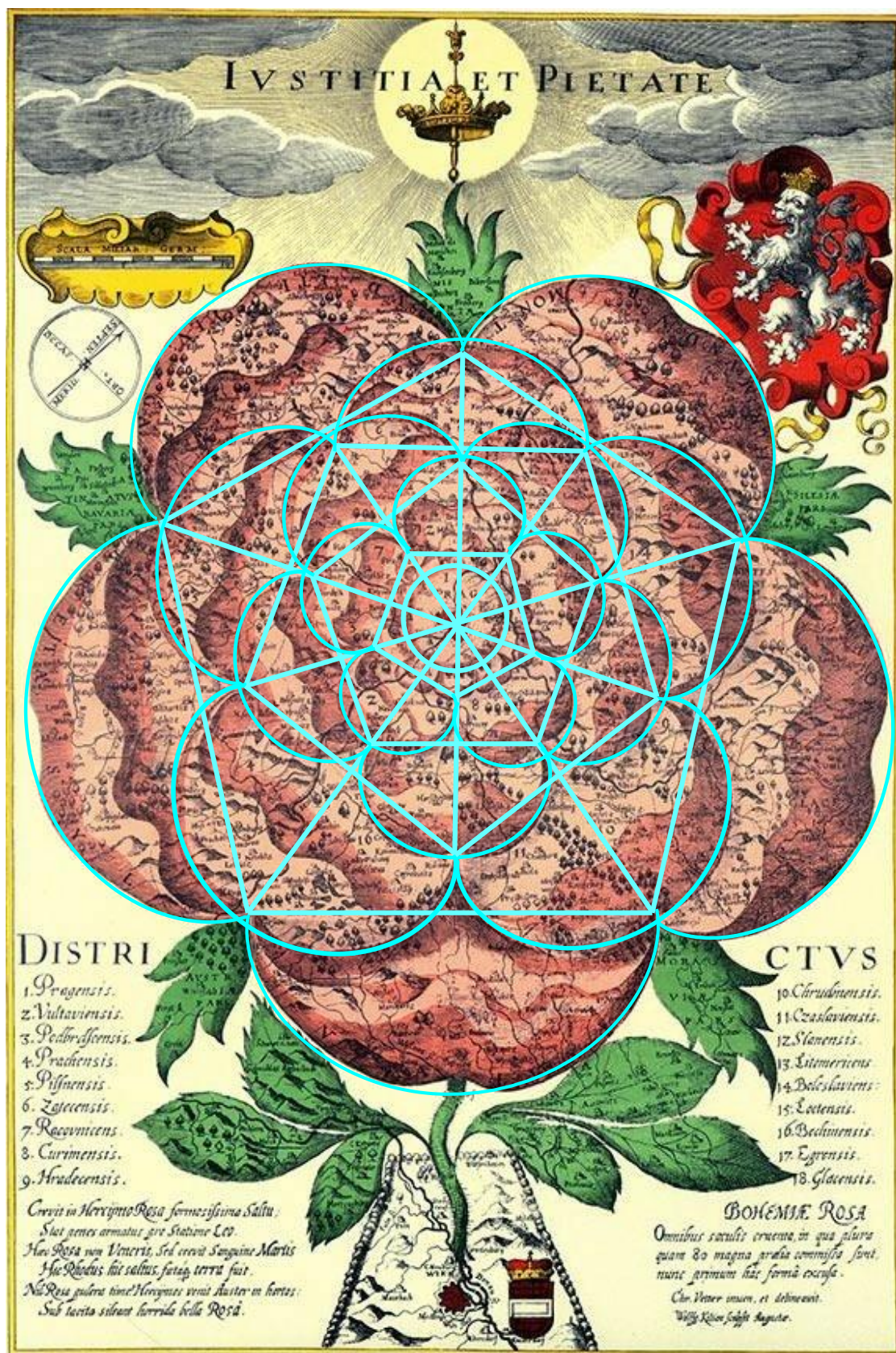
Tab. 2. Parametre 2. okruhu epicycloid.

	1. epicykloida	2. epicykloida	3. epicykloida	4. epicykloida	5. epicykloida
$\frac{r}{r'}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{d}{r}$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5

Tab. 3. Parametre 3. okruhu epicycloid.

	1. epicykloida	2. epicykloida	3. epicykloida	4. epicykloida	5. epicykloida
$\frac{r}{r'}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{d}{r}$	1	1.5	1	1	1

Tab. 4. Parametre 4. okruhu epicycloid.



Obr. 12. Geometrická analýza mapy Bohemiae Rosa.

Veľkosti uvedených parametrov epicykloid sa nemenia pravidelne, avšak pomer polomerov tvoriacej a základnej kružnice narastá smerom do stredu ruže. Použitie epicykloid na mapách nebýva obvyklé, preto nemôžeme potvrdiť, že Vetter ich zjavne nepoužil zámerne, avšak napriek tomu jeho okvetné lístky svojim tvarom skutočne epicykloidy kopírujú. Cielené použitie epicykloid na mapách 19. storočia ukážeme v nasledujúcej kapitole.

4 Použitie epicykloidy a evolventy kružnice v Augustovom zobrazení

S použitím epicykloid v kartografii sa stretávame neskôr, a to napr. v konformnom zobrazení Friedricha W. O. Augusta (1874), ktoré sa zaraďuje medzi neklasifikované zobrazenia. Friedrich W. O. August bol nemecký profesor matematiky rovnako ako jeho otec. Friedrich W. O. August publikoval v oblasti geometrie a konformných zobrazení. Augustovo epicykloidálne zobrazenie (obr. 12) je konformné zobrazenie, v ktorom sa zemepisná sieť zobrazuje do epicykloid a evolvent. Obraz referenčnej plochy je ohraničený epicykloidou, ktorá sa nazýva nefroida, nakoľko jej tvar pripomína obličku. Geometrický princíp obrysovej epicykloidy je rovnaký ako epicykloidy na obr. 11, pričom polomer r' pevnej kružnice sa rovná dvojnásobku polomeru r tvoriacej kružnice a tvoriaci bod A na nej leží. Analyticky je možné obraz obrysového poludníka vyjadriť z rovníc epicykloidy (nefroidy):

$$\begin{aligned}x &= \frac{3}{2}r \cos U - \frac{1}{2}r \cos 3U, \\y &= \frac{3}{2}r \sin U - \frac{1}{2}r \sin 3U, \text{ kde } r = \frac{\pi}{2}R,\end{aligned}\quad (5)$$

kde $U \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$ je zemepisná šírka na referenčnej sfére s polomerom R . Zobrazovacie rovnice Augustovho zobrazenia sú [7]:

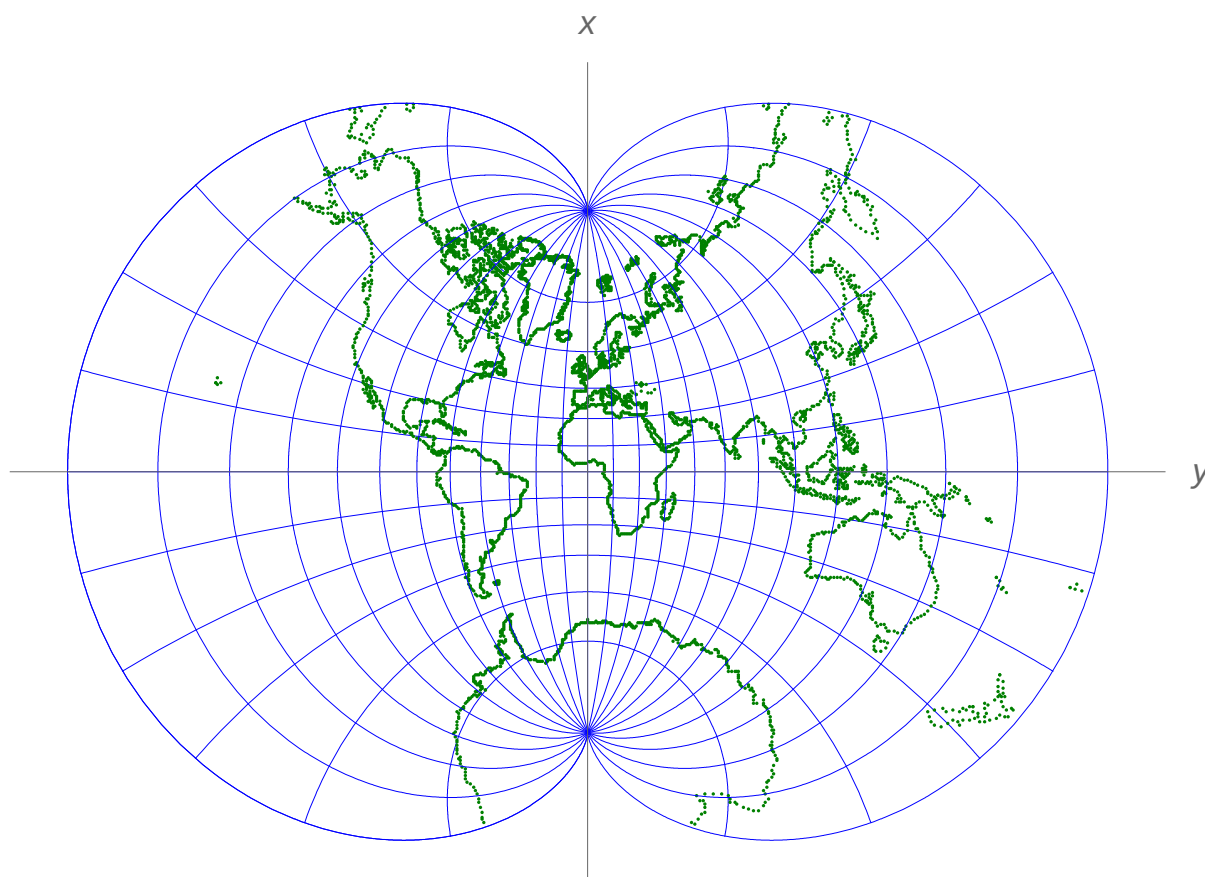
$$\begin{aligned}x &= \frac{\pi R}{4} f(U, V) (3 + f(U, V)^2 - 3g(U, V)^2), \\y &= \frac{\pi R}{4} g(U, V) (3 + 3f(U, V)^2 - g(U, V)^2),\end{aligned}\quad (6)$$

$f(U, V)$ a $g(U, V)$ sú nasledujúce funkcie zemepisnej šírky U a zemepisnej dĺžky V bodov referenčnej sféry:

$$f(U, V) = \frac{\sin \frac{V}{2}}{\cosh \left(\frac{\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{U}{2} \right)}{2} \right) + \cos \frac{V}{2}},$$

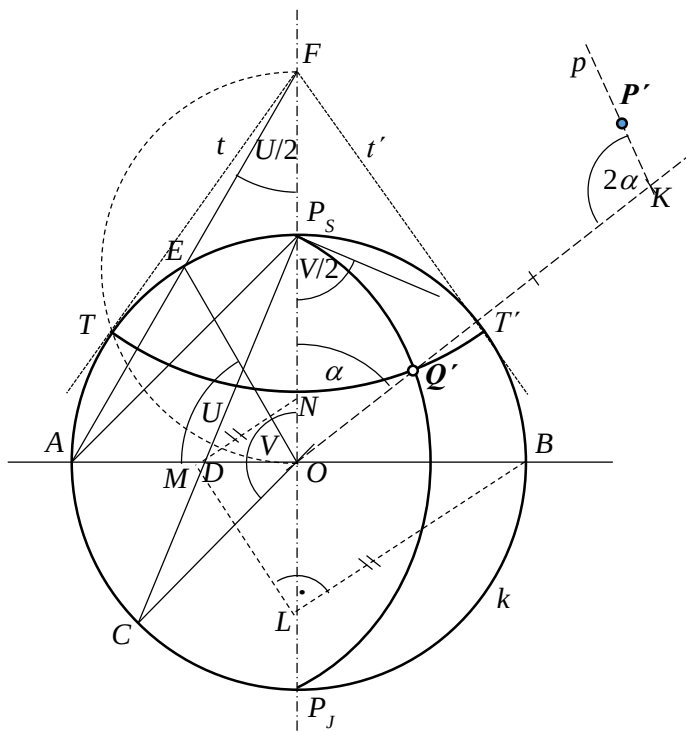
$$g(U,V) = \frac{\sinh \left(\frac{\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{U}{2} \right)}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{U}{2} \right)}{2} \right) + \cos \frac{V}{2}}. \quad (7)$$

Obraz zemepisnej siete v Augustovom zobrazení je na obr. 13.



Obr. 13. Obraz zemepisnej siete v Augustovom konformnom epicykloidálnom zobrazení.

Ako je uvedené v [7], Augustovo zobrazenie patrí medzi konformné zobrazenia rovnako ako stereografické zobrazenie, ktoré bolo charakterizované v kapitole 2.2 a použité na Blaeuovej mape Európy. Uvedieme konštrukciu obrazu ľubovoľného bodu P v Augustovom epicykloidálnom zobrazení, a to z obrazu pomocného bodu Q v stereografickej azimutálnej projekcii v rovníkovej polohe. Nech jeho zemepisná šírka je U a zemepisná dĺžka V , potom postup konštrukcie jeho obrazu je (obr. 14):



- $$\sin U^* = \operatorname{tg} \frac{U}{2}.$$

$$\sin U^* = \operatorname{tg} \frac{U}{2} .$$

10. Bodom K zostrojíme priamku p , ktorá zvierá s priamkou OQ' uhol $\alpha = 2\angle NOQ'$.
11. Na priamke $P_S P_J$ zostrojíme bod L tak, že $|OL| = |OQ'|$.
12. Na priamke AB zostrojíme bod M tak, že $ML \perp BL$.
13. Na priamke $P_S P_J$ zostrojíme bod N tak, že $MN \perp ML$.
14. Na priamke p zostrojíme bod P' , ktorý je obrazom bodu P v Augustovom epicykloidálnom zobrazení tak, že $|KP'| = |ON|$.

Augustovo zobrazenie ukazuje charakteristiku jedného z prístupov k tvorbe máp 19. storočia. Augustovo kartografické zobrazenie je len jedno z mnohých konformných kartografických zobrazení tej doby, ktoré je postavené na exaktných matematických základoch, avšak nie je možné určiť, aká zobrazovacia plocha je použitá, a preto hovoríme o neklasifikovanom zobrazení. Napriek tomu autori neklasifikovaných zobrazení veľmi rozmanite používajú na mapách geometrické prvky.

5 Záver

Uskutočnená geometrická analýza historických máp nám umožnila nahliadnuť do atmosféry kreativity danej doby. Na analyzovaných mapách sú bohato zastúpené geografia, umenie, matematika a geometria. Každá z máp Willema a Joana Blaeu si vyžaduje špeciálny prístup k analýze, avšak na každej z nich je možné určiť ich matematický základ, teda kartografické zobrazenie, jeho parametre a skreslenie zobrazovaných prvkov. Matematická a geometrická analýza bola vykonaná v prostredí softvérov AutoCAD 2019 a Wolfram Mathematica 11.

Výsledky geometrickej analýzy Vetterovej mapy Bohemiae Rosa považujeme za zvlášť dôležité, nakoľko táto analýza nám pomohla vniknúť do geometrického myslenia autora v procese tvorby kompozície tejto unikátnej mapovej kuriozity. Ako sme ukázali v záverečnej kapitole, tvorba máp neskôr v 19. storočí bola postavená na deduktívnom matematickom základe. Príklad formulácie kartografického zobrazenia Friedrichom Augustom sa striktne odlišovala od obdobia holandských vydavateľov máp v 16. a 17. storočí, a hlavne od tvorby Vetterovej kartografickej kuriozity Bohemiae Rosa, a to aj napriek tomu, že na oboch mapách sú použité podobné geometrické prvky.

Podakovanie

Článok bol publikovaný s podporou projektu VEGA 1/0682/16.

Použitá literatúra

- [1] BROTTON, J. *A History of the World in Twelve Maps*. London: Allen Lane, 2012, p.262.
- [2] BURDA, V. *Mapa Čech v podobě růže z roku 1668*. Národní technické muzeum v Praze, mapová sbírka. 2000. Dostupné online [cit. 2018-08-11].
- [3] JELÍNKOVÁ, K. *Vývoj kartografie z pohledu českých kartografů*. České Budějovice, duben 2015. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Zemědělská fakulta. Dostupné online [cit. 2018-10-15].
- [4] ODVÁRKOVÁ, V. *Využití Moravského kartografického centra ve výuce zeměpisu na základní škole*. Brno, 2011 [cit. 2017-02-15]. 73 s. Bakalářská práce. Masarykova Univerzita. s. 24-26. Dostupné online [cit. 2018-09-10].
- [5] PIVONKA, F. Bohemiae Rosa: Mapa českých zemí v podobě růže. *Živá historie Poklady Speciál* 7. 2016.
- [6] RYTÍŘ, V. *Rostliny v heraldice I*. Grafický závod J. Čížek v Pardubicích, 1941.
- [7] SCHMID E. *World maps on the August epicycloidal conformal projection*. National Ocean Survey, Rockville, Md. 1974. Dostupné online [cit. 2019-05-13].
- [8] DE MEER, SJOERD. *Atlas of the World: Gerard Mercator's map of the world (1569)*, Zutphen: Walburgers, ISBN 9789057308543 Dostupné online [cit. 2019-05-15]
- [9] VAJSÁBLOVÁ, M. *Matematická kartografia*. 1. vyd. Bratislava: STU, 2013. 315 s. ISBN 978-80-227-4027-2.
- [10] VAJSÁBLOVÁ, M. Velké osobnosti v historii matematiky a matematickej kartografie. In: *Historie matematiky: 35. mezinárodní konference*. Velké Meziříčí, ČR, 22.-26.8.2014. - Praha: Matfyzpress, 2014. - ISBN 978-80-7378-265-8. - S. 47-66.
- [11] Vajsáblová, M. Geometry and Art on the Bohemiae Rosa and on Bleau's historical maps in 17th century. In: 18th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2019 Proceedings. SPEKTRUM STU, Bratislava, Slovak Republic. 2019. S. 1251-1264.
- [12] Withers, Ch. W. J., Lorimer, H. *Geographers: Bibliographical Studies*. Volume 27. (2008). Continuum International Publishing Group. p. 14. ISBN 1-84706-156-7.
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Atlas_Maior [cit. 2018-11-06]
- [14] <https://zivot.pluska.sk/clanok/31894/hotove-umelecke-dielo-atlas-s-rucne-kreslenymi-mapami-je-drahsi-ako-rembrandtov-obraz> [cit. 2018-10-22]
- [15] https://en.wikipedia.org/wiki/Joan_Blaeu#/media/File:Blaeu_1645_Theatrum_Orbis_Terrarum.jpg) [cit. 2018-11-13]
- [16] <http://www.bohemiaerosa.org/brosa/rosa.htm> [cit. 2018-11-02]
- [17] <http://www.historicke-mapy.cz> [cit. 2018-08-22]
- [18] <http://mathworld.wolfram.com/Epicycloid.html> [cit. 2018-09-20]
- [19] <http://www.stmapy.cz/ruze.html> [cit. 2019-05-22]
- [20] Autodesk AutoCAD 2019
- [21] Wolfram Mathematica 11.3.0.0 © Copyright 1988-2018 Wolfram Research

Doc. RNDr. Margita Vajsáblová, PhD.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Stavebná fakulta, Slovenská technická univerzita v Bratislave

Radlinského 11, 811 05 Bratislava, SR

e-mail: margita.vajsablova@stuba.sk

Pocta Maryam Mirzakhani

Daniela Velichová

Abstrakt

Článok približuje život a prácu Maryam Mirzakhani (1977 - 2017) – prvej a zatiaľ jedinej ženy, ktorá sa stala nositeľkou Fieldsovej medaile od jej uvedenia v roku 1936. Mirzakhani je inšpiráciou pre všetky mladé ženy na svete, aby verili svojim vlastným schopnostiam a neváhali premeniť svoje sny o vedeckej kariére na skutočnosť.

Kľúčové slová: topológia, hyperbolická geometria, krivky, geodetiky, moduli spaces

Abstract

The paper outlines the life and work of Maryam Mirzakhani (1977 - 2017) – the first and the only female winner of the Fields Medal since its inception in 1936. Mirzakhani is an inspiration to young women around the world, to believe in their own abilities and to pursue their academic dreams changing them to reality.

Key words : topology, hyperbolic geometry, curves, geodesics, moduli spaces

1 Životopis

Maryam Mirzakhani, mladá iránska matematicička, sa narodila 12. mája 1977 v Teheráne; matka Zahra Haghighi bola v domácnosti a otec Ahmad Mirzakhani pracoval ako elektrotechnický inžinier. V interview pre *Clay Mathematics Institute Report* (2008) o svojom detstve uviedla: „Vyrastala som v rodine s tromi súrodencami. Moji rodičia ma vždy veľmi podporovali a povzbudzovali. Považovali za dôležité, aby sme mali zmysluplné a uspokojujúce povolania, ale nezáležalo im veľmi na úspechu. Bolo to pre mňa vynikajúce prostredie z mnohých dôvodov, i keď sme prežívali ťažké časy v dôsledku iránsko-irackej vojny (1980 - 1988). Záujem o vedu vo mne vzbudil starší brat. Rád mi rozprával, o čom sa učili v škole.“



Obr. 1. Maryam Mirzakhani

Záujem o matematiku u Maryam vyvolal príbeh o mladom Gaussovi, ako spočítal prvých 100 čísel použitím jednoduchkej myšlienky, na ktorú prišiel vďaka svojmu geniálnemu matematickému mysleniu. Po ukončení základnej školy bola po absolvovaní prijímacej skúšky prijatá na dievčenskú strednú školu Farzanegan v Teheráne. Škola bola zameraná na výchovu mimoriadne talentovaných a nadaných dievčat. Maryam v prvom roku štúdia neprospevala dobre z matematiky, a jej učiteľka sa vyjadrila, že nemá matematický talent.

V tom čase chcela byť spisovateľkou, čítala mnoho kníh. Po zmene učiteľky v druhom ročníku začala Maryam mimoriadne excelovať v matematike. Spriatelila sa so spolužiačkou Royou Beheshti, tiež veľmi matematicky nadanou. Spolu sa im podarilo preniknúť do sveta považovaného za výlučne chlapčenskú doménu, keď boli vybrané reprezentovať Irán na Medzinárodnej Matematickej Olympiáde. Maryam získala zlatú medailu hneď počas svojej prvej účasti v Hong Kongu roku 1994 (41 bodov z 42) a opäť v roku 1995 v Kanade, kde zvíťazila už bez straty jediného bodu.

V roku 1995 Maryam začala študovať na Sharif University of Technology v Teheráne, kde v roku 1999 ukončila štúdium ako Bachelor of Science (BS). Už v tom čase publikovala tri články, z ktorých dva boli z teórie grafov: v zborníku konferencie Combinatorics advances, ktorá sa konala v Teheráne v roku 1995, publikovali spolu s E. S. Mahmoodianom prácu *Decomposition of complete tripartite graphs into 5-cycles*, ďalšiu prácu v roku 1996 s názvom *A small non-4-choosable planar graph* a prácu *A simple proof of a theorem of Schur* v roku 1998. Vo februári 1998 sa najlepši študenti z matematiky na Sharif University of Technology zúčastnili súťaže v iránskom meste Ahwaz. Mirzakhani bola jednou z nich. Autobus, ktorý ich viezol späť z Ahwazu do Teheránu, havaroval, šmykol sa a zrútil do rokliny. Sedem študentov a dvaja vodiči autobusu zahynuli, ale Mirzakhani sa zachránila.

Po ukončení štúdia v roku 1999 pokračovala v ďalšom štúdiu na Harvardskej univerzite, kde sa v tom čase stal profesorom Curtis McMullen, nositeľ Fieldsovej medaile z roku 1998. Maryam navštevovala jeho seminár. Jej vtedajšie matematické vedomosti boli prevažne z oblasti kombinatoriky a algebry, a poznala tiež komplexnú analýzu. Obdivovala spôsob, akým prof. McMullen prednášal na svojom seminári, a ako dokázal predstaviť jednoduchosť a eleganciu prednášaných tém, ktorým však veľmi nerozumela. Podľa jej vlastných slov: "Tak som sa ho začala pravidelne pýtať mnohé otázky a rozmýšľala som o problémoch, ktoré sa objavovali počas týchto inštruktívnych diskusií. Jeho povzbudzovanie bolo neoceniteľné. Práca s Curtom mala na mňa veľký vplyv, aj keď teraz si prajem, aby som sa bola od neho naučila viac! Keď som končila štúdium, mala som dlhý zoznam nápadov a tém, ktoré som chcela skúmať." McMullen sa stal školiteľom Maryam počas jej doktorandského štúdia. Curtis McMullen sa zasa o Maryam vyjadril takto [2]: "Mala neobyčajne brilantnú predstavivosť. Vedela vo svojej mysli formulovať imaginárny obraz riešeného problému a ako by jeho riešenie mohlo vyzerieť, a potom prišla ku mne do pracovne a opisovala mi to. Na záver sa ku mne otočila a povedala "Je to správne?" Vždy mi veľmi lichotilo, keď si myslela, že to budem vedieť."

Maryam sa venovala štúdiu vlastností hyperbolických plôch a doktorát získala za 130-stránkovú dizertačnú prácu s názvom *Simple Geodesics on Hyperbolic Surfaces and Volume of the Moduli Space of Curves*. Za túto mimoriadne cennú prácu jej bola udelená cena Leonarda M. a Eleanor B. Blumenthalovcov. V roku 2004 získala doktorát na Harvardskej univerzite, nepokračovala tu však v ponúkanej práci asistentky, ale rozhodla sa prijať miesto odbornej asistentky na univerzite v meste Princetone s finančnou podporou Clayovho matematického inštitútu. Maryam považovala príležitosti, ktoré jej Clayov inštitút poskytoval počas študijného pobytu, za vynikajúce, umožňovali jej pracovať na problémoch jej vlastným tempom, ktoré sama považovala za pomalé. Za tri roky, ktoré tu strávila, napísala niekoľko zásadných prác o zakrivených plochách, ktoré boli publikované v prestížnych matematických časopisoch *Annals of Mathematics*, *Inventiones Mathematicae*, a *The Journal of the American Mathematical Society*: *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves* (2007); *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered*

Riemann surfaces (2007); *Random hyperbolic surfaces and measured laminations* (2007); *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces* (2008); *Ergodic theory of the earthquake flow* (2008); a so spoluautorom Elonom Lindenstraussom *Ergodic theory of the space of measured laminations* (2008).

Po ukončení pobytu v roku 2008 prijala miesto profesorky matematiky na Stanfordskej univerzite. V Princetone Maryam stretla Jana Vondráka, vedca z Českej republiky, ktorý získal doktorát z informatiky a PhD. z aplikovanej matematiky na MIT – Massachusettský technologický inštitút. Jan pôsobil ako post-doktorand na univerzite v Princetone. V roku 2005 uzavreli manželstvo a v roku 2011 sa narodila ich dcérka Anahita. Maryam bola v roku 2010 pozvanou prednášajúcou na medzinárodnom kongrese Matematikov (ICM) v Indii, Hyderabad. Na prvej medzinárodnej konferencii žien matematičiek - The First International Conference of Women Mathematicians (ICWM), ktorá sa konala pred týmto kongresom, bola jednou z ôsmich pozvaných prednášateľiek. Jej prednášky boli pôžitkom, vizuálnym aj matematickým, a zanechali na publiku trvalý dojem. Počas pobytu na Clayovom matematickom inštitúte začala tiež spolupracovať s univerzitou v Chicagu, matematikom Alexom Eskinom, s ktorým sa autorsky podieľali na viacerých prácach, vrátane vedeckého článku *Counting closed geodesics in moduli space* [4] publikovaného v roku 2011.

Na mnohých fotografiách je Maryam zachytená s veľkým hárkom papiera rozprestretým na dlážke, ako na ňom načrtáva svoju matematiku zakrivených plôch. Jej dcéra vravela, že mama si kreslí obrázky [5]. Maryam Mirzakhani dostala mnoho rôznych cien a ocenení za svoje výsledky v matematike, ale na medzinárodnom kongrese matematikov, the International Congress of Mathematicians 2014 v Soule, jej bolo udelené najprestížnejšie ocenenie, Fieldsova Medaila. 52 predchádzajúcich dodnes ocenených medailistov boli muži, Maryam bola prvá žena v histórii, ktorej bolo udelené toto najvyššie ocenenie vedeckej práce v matematike. Medailu získala za “mimoriadny prínos v oblasti dynamiky a geometrie Riemannových plôch a ich moduli priestorov“. Zvykom je, že ocenení medailisti prednesú na kongrese prednášky, na ktorých prezentujú svoju prácu. Za Maryam však prednášku prezentoval Curtis McMullen. Dôvodom bol jej zlý zdravotný stav spôsobený pokračujúcou zákernou chorobou, rakovinou, s ktorou bojovala už pred udelením tejto prestížnej ceny završujúcej jej úspešnú vedeckú kariéru.

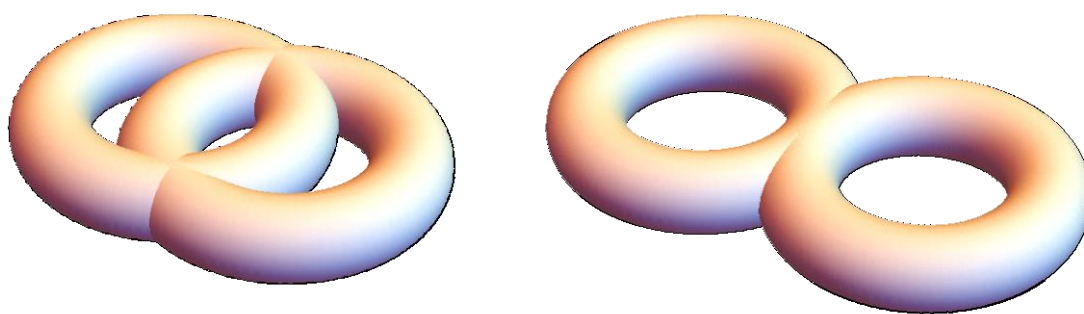
Napriek urputnému boju s touto strašnou nemocou a neznesiteľne bolestivým lekárskeým ošetrovaním, ktoré Maryam musela podstúpiť, sa naďalej neprestala zúčastňovať na konferenciách, workshopoch, seminároch, prednáškach a neúnavne pokračovala vo svojej vedeckej matematickej práci s plným nasadením, veľkým nadšením a záujmom. V roku 2015 bola Maryam Mirzakhani v Oxforde udelená ďalšia významná cena, Clay Research Award.

Maryam prehrala svoj boj s rakovinou 14. júla 2017. Terence Tao, nositeľ Fieldsovej medaile z roku 2006, vtedy napísal vo svojom blogu [7] o rade, ktorú dal Maryam po tom, ako jej bola udelená Fieldsova medaila: “Ako prvá žena, ktorej bola udelená medaila, a tiež prvá z Iránu, Maryam zažívala všetky emócie a stresy v oveľa väčšej miere ako predchádzajúci medailisti, pretože súčasne vychovávala malú dcérku a bojovala s rakovinou. Snažil som sa jej poradiť v tomto smere najlepšie, ako som vedel (najmä to, že je akceptovateľné – a v podstate nevyhnutné – povedať „nie“ na väčšinu ponúk a žiadostí o prednesenie prednášok, ktoré dostávala).” Maryam citovala Taovu webovú stránku ako zdroj informácií a užitočných rád o budovaní kariéry v matematike (pozri [1]).

Maryam zanechala po sebe svoju malú dcérku Anahitu, manžela Jana, a celú komunitu matematickej vedeckej obce, ktorá s úctou prijala obrovské matematické dedičstvo, ktoré je inšpiráciou pre všetkých matematikov na celom svete, pre ženy v matematike predovšetkým.

2 Vedecká práca Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani prispela svojimi vedeckými výsledkami do mnohých oblastí matematiky, vrátane algebrickej topológie, geometrie, a ergodickej teórie. Hlavným cieľom jej výskumu bolo porozumieť geometrii a dynamike hyperbolických plôch s konštantnou zápornou krivosťou. Najjednoduchším modelom takýchto plôch je jednodielny rotačný hyperboloid, ktorý vznikne otáčaním hyperboly okolo jej vedľajšej – imaginárnej osi. Rod (génus) anuloidu sa rovná 1, a plochu rodu 2 možno geometricky reprezentovať ako dva spojené, pretínajúce sa anuloidy – zdvojený anuloid, obr. 2. Každá plocha, ktorej rod sa rovná aspoň dvom, je hyperbolická plocha. Geodetika (geodetická krivka) na ploche je najkratšou spojnicou dvoch bodov plochy (priamka v rovine, hlavná kružnica na guľovej ploche), jednoduchá geodetika neobsahuje viacnásobné body (samoprieniky). Súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka tvoreného oblúkmi geodetík na hyperbolickej ploche je menší ako 180 stupňov (v rovine sa rovná 180 stupňov, na guľovej ploche je väčší ako 180 stupňov).

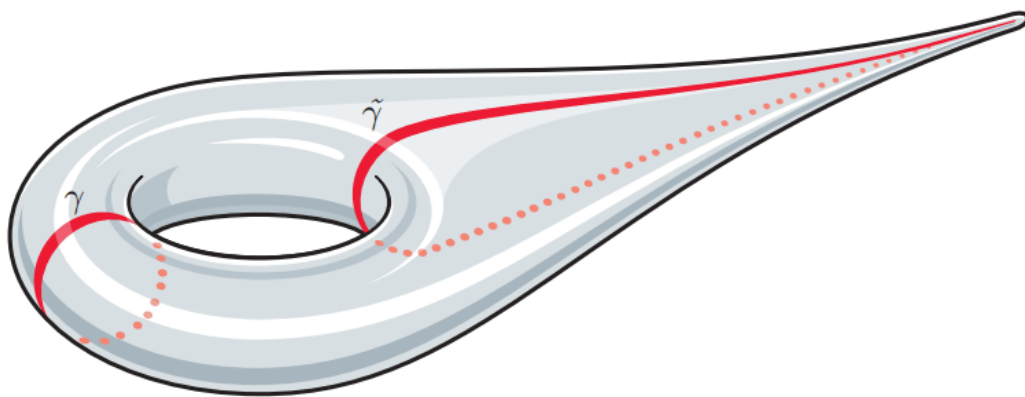


Obr. 2. Zdvojené anuloidy

Maryam Mirzakhani sa zaoberala štúdiom geometrie Riemannových plôch. Predstavme si plochu s niekoľkými dierami, ako napr. dva zlepené anuloidy, a pokúsme sa obtočiť okolo tejto plochy gumičku tak, aby nikde nepretínala samu seba. Mirzakhani chcela zistiť, koľkými možnými spôsobmi sa to dá urobiť s gumičkou danej dĺžky predstavujúcou geodetickú krivku navinutú na ploche. Uvedomila si, že môže postupovať obrátene a namiesto toho, aby uvažovala o istej pevnej ploche a počítala počet možných kriviek, by mohla zistiť priemer všetkých takýchto čísel priradených bodom v „modulovom priestore (moduli space)“ Riemannových plôch, čo je „priestor“, alebo množina bodov, z ktorých každý reprezentuje jeden z tvarov, ktoré môže plocha nadobúdať. Výpočet takéhoto priemeru si však vyžadoval vypočítať „veľkosť - objem“ priestoru všetkých tých Riemannových plôch, ktoré obsahujú krivku danej dĺžky. Potom už stačilo iba zostaviť šikovný rekurzívny vzorec pre výpočet objemov rôznych „modulových priestorov“ a problém bol vyriešený. Riešenie napokon viedlo k niekoľkým ohromujúcim dôsledkom v zdánlivo vzdialených oblastiach matematiky aj fyziky. Umožnilo napr. zostaviť nový dôkaz slávnej vety Kontsevicha, ktorá významne ovplyvnila napríklad aj rozvoj teórie kvantového poľa vo fyzike.

V roku 2004 Mirzakhani predložila svoju dizertačnú prácu, v ktorej dokázala niekoľko spomínaných významných tvrdení [3]. Práca bola publikovaná v špičkových matematických časopisoch [8, 9, 10]. Jeden z výsledkov sa zaoberá hľadaním počtu jednoduchých geodetík na úplnej hyperbolickej ploche konečného obsahu. V prácach autorov Delsarte, Huber, Selberg, a Margulis sa uvádza, že počet uzavretých geodetík dĺžky najviac L na hyperbolickej ploche exponenciálne rastie, podľa vzťahu e^L/L pre $L \rightarrow \infty$, a tento výsledok je známy ako prvočíselná veta pre hyperbolické plochy – „Prime number theorem for hyperbolic surfaces“. Mirzakhani dokázala [10], že počet jednoduchých geodetík dĺžky najviac L na hyperbolickej ploche X rodu g rastie iba polynomiálne pre $L \rightarrow \infty$, podľa vzťahu $c(X)L^{6g-6}$, kde konštanta $c(X)$ závisí od priestoru X . Dôsledkom tohto vzťahu je skutočnosť, že väčšina uzavretých geodetík obsahuje samopriesečky.

V dizertačnej práci Mirzakhani uviedla tiež nový dôkaz Wittenovej domnienky. Jej prvý dôkaz publikoval rusko-francúzsky matematik Maxim Kontsevich v roku 1992 [11], a v roku 1998 mu za tento významný výdledok udelili Fieldsovu medailu. Mirzakhani založila svoj dôkaz na vzorci, ktorý objavil Greg McShane a zverejnil v roku 1991 vo svojej dizertačnej práci na Univerzite vo Warwicku. Z tohto vzorca sa jej podarilo odvodiť úžasne originálnu a krásnu teóriu kulminujúcu kompletne novým dôkazom Wittenovho tvrdenia, pomocou vzťahov medzi integrovateľným Hamiltonovským systémom parciálnych diferenciálnych rovníc a geometrickou teóriou istých tried dvojrozmerných topologických polí. McShaneova identita je zložitá formula o jednoduchých uzavretých geodetických krivkách na hyperbolickom anuloide s jedným hrotom $\Sigma_{1,1}$, čo je plocha rodu 1 s jedným hrotom, lokálne reprezentovaná hyperbolickou rovinou. Keďže geodetiky môžu byť nekonečné krivky, hrot musí byť v nekonečnej vzdialenosti od stredu anuloidu. Geodetické krivky ubiehajú do nekonečna po exponenciálne sa zužujúcom hrote (obr. 3). Uvažujme o anuloide bez hrotu $\Sigma_{1,0}$, ktorý vznikne zlepením protíahlych strán rovnobežníka. V jeho modeli v euklidovskej rovine existuje v každom racionálnom smere na $\Sigma_{1,0}$ pokrytie nekonečnou triedou „rovnobežných“ jednoduchých uzavretých geodetík. Na anuloide $\Sigma_{1,1}$ je situácia úplne iná: každý racionálny smer síce určuje homotopickú triedu γ jednoduchých cyklov, ale v každej triede existuje jediná hladká uzavretá geodetika minimálnej dĺžky $l(\gamma)$. McShaneova identita udáva, že $2\sum_{\gamma}(1+e^{-l(\gamma)})^{-1}=1$.



Obr. 3. Hyperbolický anuloid s jedným hrotom $\Sigma_{1,1}$, jednoduchá uzavretá geodetika γ , homotopická ubiehajúca krivka (zdroj [18]).

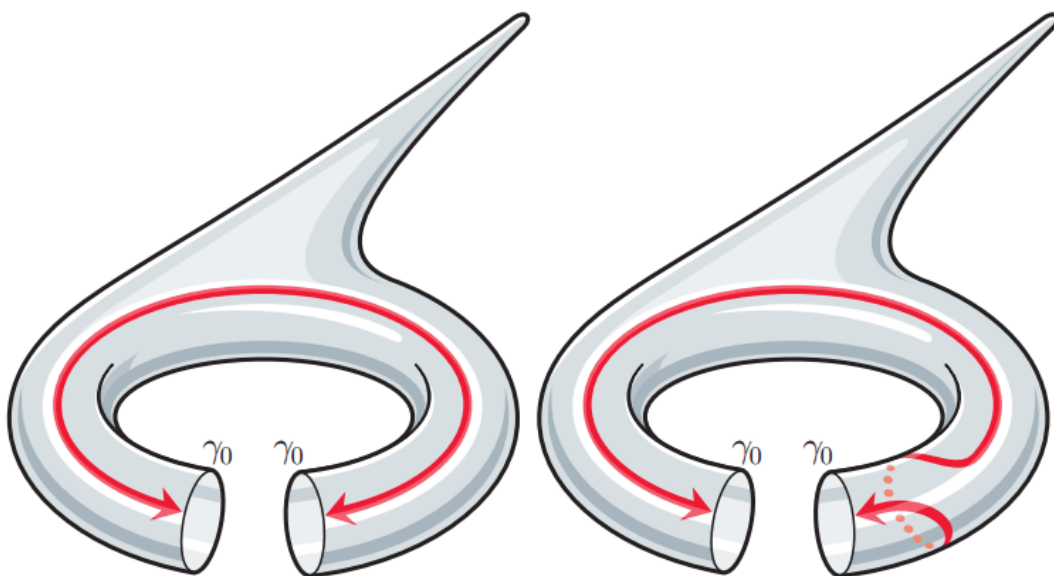
Priestor všetkých možných hyperbolických štruktúr na $\Sigma_{1,1}$ sa nazýva Teichmüllerov priestor, a označuje sa $T(\Sigma_{1,1})$. Má jeden komplexný stupeň voľnosti – tak ako priestor všetkých komplexných štruktúr na euklidovskom anuloide. Pre ilustráciu tejto skutočnosti si stačí

uvedomiť, že rovnobežnosť sa dá umiestniť pomocou posunutia a rovnôľahlosti tak, že jeho tri priľahlé vrcholy budú umiestnené do bodov $0, 1, \tau$, kde τ je komplexné číslo s kladnou imaginárnou zložkou. Umiestnením dier do vrcholov, čo je dôsledkom klasickej vety o existencii jedinej hyperbolickej metriky na $\Sigma_{1,1}$ kompatibilnej s prirodzenou komplexnou štruktúrou indukovanou rovnobežníkom, takto možno $T(\Sigma_{1,1})$ identifikovať s hornou polrovinou $\mathbb{H}$. Priestor modulov $M(\Sigma_{1,1})$ sa dá získať zanedbaním možnosti voľby pri označovaní, čo znamená, že krivky na anuloide budeme označovať vzhľadom k pevnej báze. Pre $\Sigma_{1,1}$ je označovanie špecifikované výberom báзовých vektorov $e_1 = (1, 0)$ a $e_2 = (0, \tau)$. Zmena sa dá zabezpečiť transformáciou (e_1, e_2) do $(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$, pre ľubovoľné lineárne zobrazenie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

Potom $M(\Sigma_{1,1})$ je podielom z $T(\Sigma_{1,1})$ pre akciu $\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ z grupy $SL(2, \mathbb{Z})$ na $\mathbb{H}$. Táto grupa zmien označení sa nazýva grupa $\text{Mod}(\Sigma_{1,1})$ tried zobrazení na $\Sigma_{1,1}$.

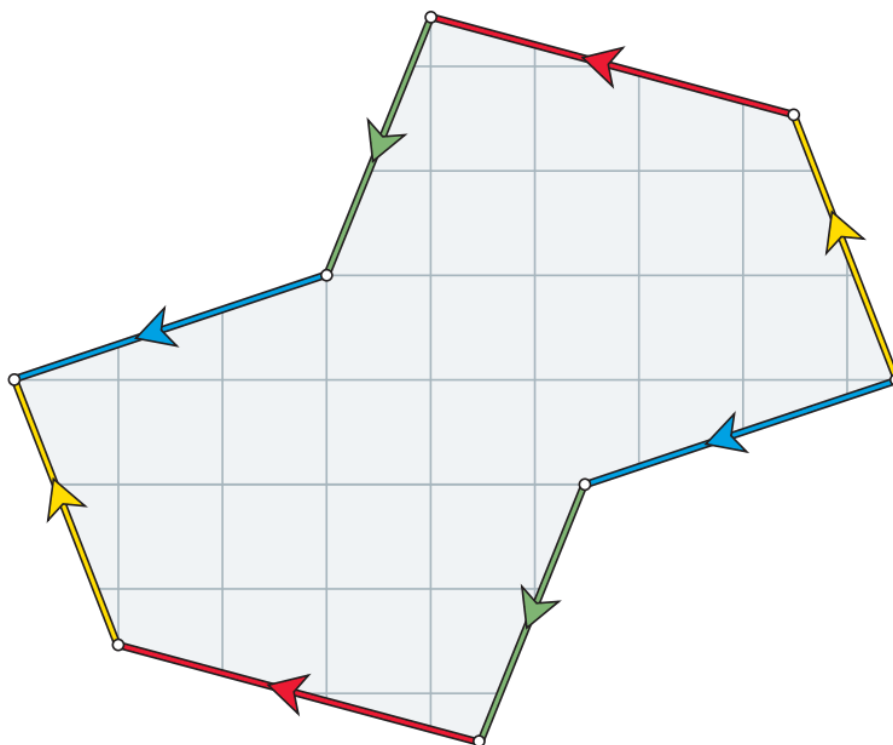
McShaneova identita platí pre každú štruktúru v $T(\Sigma_{1,1})$. Maryam si všimla, že i keď označovanie je potrebné pre určovanie dĺžky $l(\gamma)$, suma v identite je invariantná vzhľadom na zmeny označení. Integrovaním oboch strán McShaneovej identity dostaneme vzorec pre výpočet objemu $V_{1,1}$ priestoru $M(\Sigma_{1,1})$ – hodnotu, ktorá je pre priestory vyšších rodov dôležitá v algebrickej geometrii a matematickej fyzike. Ako však možno integrovať výrazy v sume bez toho, aby sme poznali ich označenia? V tom práve tkvie podstata dôkazu. Každá jednoduchá krivka je obrazom pevnej krivky γ_0 v niektorom prvku z grupy $\text{Mod}(\Sigma_{1,1})$. Stabilizér γ_0 priestoru $\text{Mod}(\Sigma_{1,1})$ je množina nazývaná Dehnov skrut okolo γ_0 . (Dehnov skrut (obr. 4) je zmena označenia, ktorá je výsledkom operácie, v ktorej rozrežeme anuloid v krivke γ_0 , jeden koniec rezu otočíme o uhol 2π a oba konce opäť spojíme.) Potom platí, že integrácia $\Sigma_\gamma(1 + e^{l(\gamma)}) - 1$ na $M(\Sigma_{1,1})$ je ekvivalentná s integráciou $(1 + e^{l(\gamma_0)}) - 1$ na $T(\Sigma_{1,1})$ podľa Dehnovho skrutu okolo γ_0 . Z výpočtu vyplýva, že $V_{1,1} = \pi^2/6$.



Obr. 4. Dehnov skrut: anuloid s hrotom rozrežeme pozdĺž γ_0 a jeden otvorený koniec skrútime predtým, ako ho opäťovne zlepieme (zdroj [18]).

I keď bol tento konštrukt geniálnym nápadom, dala sa podľa neho dokázať iba správnosť známej formulky. Ďalšie úvahy Maryam však boli skutočne výnimočné. McShaneova identita je závislá od dôslednej analýzy podmienok, za ktorých môžu geodetiky uniknúť cez hrot. Týmto pomerne zložitým induktívnym procesom, v ktorom je potrebné použiť rezy plôch a ich opätovné zliepanie, Maryam rozšírila platnosť identity a pokračovala v jej zovšeobecňovaní na ľubovoľnú plochu v snahe nájsť rekurzívny vzťah pre výpočet (Weil-Peterssonovho) objemu $V_{g,n}(L_1, \dots, L_n)$ priestoru modulov - priestoru plôch génu g s počtom n geodetických okrajových kriviek pevnej dĺžky $L_1, \dots, L_n$. Bol to impulz k zavedeniu pojmu, ktorý označuje proces nazývaný symplektická redukcia - umožňujúca orezávanie, krútenie a opätovné zliepanie tak, ako je opísané vyššie.

Jej vyjadrenia ukázali, že $V_{g,n}(L_1, \dots, L_n)$ je polynóm v neurčitých $L_1^2, \dots, L_n^2$ s racionálnymi koeficientami vzhľadom na známe mocniny π [8]. Pozoruhodné je, že koeficienty uchovávajú informáciu o počte priesečníkov istého typu Chernových tried v priestore modulov. Redukciou relácie rekurencie uvádzanej vo Wittenovej domnienke Mirzakhani dospela k úplne novému dôkazu tejto domnienky [9]. Aplikovaním metód dynamiky a ergodickej teórie na akciu triedy zobrazení na $T(\Sigma_{g,n})$, a použitím tiež svojich vlastných metód dokázala, že počet jednoduchých geodetík dĺžky najviac L na $\Sigma_{g,n}$ rastie podľa vzťahu $L^{6g-6+2n}$ a odvodila vzorec pre výpočet frekvencií geodetík rôznych topologických typov [10]. Napríklad pravdepodobnosť, že plocha rodu 2 sa rozpadne po rozrezaní pozdĺž jednoduchej uzavretej geodetiky, je $1/7$. Mirzakhani konkrétne ukázala, že na ploche rodu 2 je šesť krát väčšia pravdepodobnosť javu, že dostatočne dlhá jednoduchá uzavretá geodetika bude neseparujúca (čiže nebude separujúca), a teda nerozdelí plochu na dve oddelené súvislé časti.



Obr. 5. Mnohouholník so spárovanými spojenými stranami tvoriaci model translačnej plochy. Štvorcová sieť je časťou štruktúry plochy (zdroj [18]).

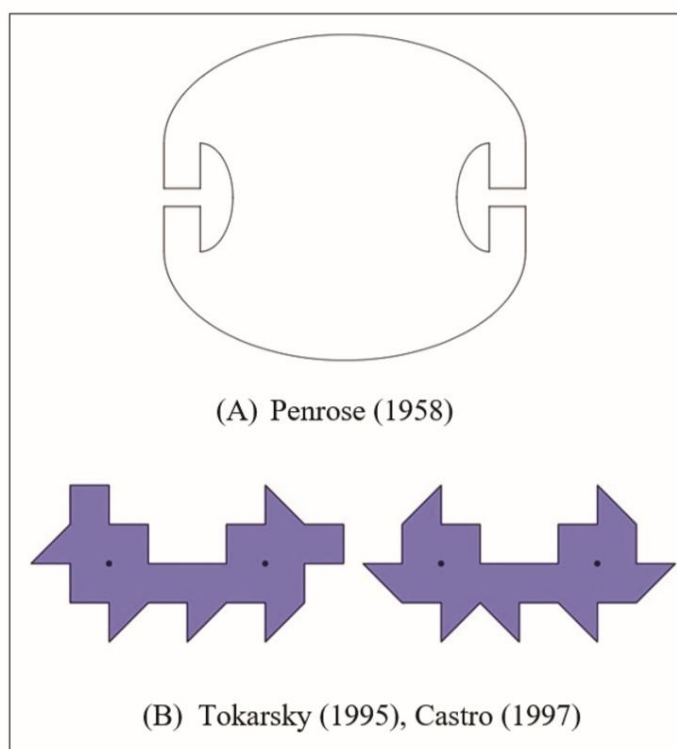
Ďalšia práca Mirzakhani sa zaoberá dynamikou rôznych modulových priestorov. Najvýznamnejším výsledkom je asi analógia slávnej vety Marini Ratnerovej o rigidite. Ratnerovej veta tvrdí, že uzáver orbít jednoparametrického neexponenciálneho toku v homogénnom priestore je uzavretou podgrupou. Tok v interpretácii Mirzakhani prebieha v inom modulovom priestore, na tkzv. translačnej ploche, zovšeobecnení anuloidov skonštruovaných z rovnobežníkov. Uvažujme o mnohouholníku, ktorého strany sú stotožnené spárovaním tak, že spárované strany majú rovnaké dĺžky a sú rovnobežné (obr. 5, podľa ilustrácie v [15]). Predpokladajme tiež, že keď strany spojíme tak, aby vytvorili translačnú plochu, potom uhol v každom vrchole bude celočíselným násobkom 2π . Keďže lineárne zobrazenia zachovávajú spárované strany, akcia grupy $SL(2, R)$ na priestore translačných plôch je prirodzená.

Otázkou ostáva, ako vyzerá uzáver orbít $SL(2, R)$? Dalo by sa očakávať, že to bude nejaký fraktálny atraktor. Mirzakhani, spolu s Alexom Eskinom a Amirom Mohammadi [15] ukázali, že je to varieta, ktorá je lokálne definovaná istými špeciálnymi nerovnicami. Mimoriadne komplikovaný a náročný dôkaz tohto tvrdenia podal Anton Zorichasa, [13]. Aplikácie uvedeného teoretického výsledku sa objavili okamžite, napr. pri riešení problému o ortogonálnych biliardových stoloch, alebo v probléme osvetlenia. Pekný úvod do spomínanej problematiky je uvedený v [20].

V rozsiahlom 200 stranovom článku Eskin a Mirzakhani [12] dokázali legendárnu vetu ‘Magic Wand Theorem’ [13], ktorá viedla k vyriešeniu rôznych dovtedy neriešiteľných matematických problémov. McMullen [14] dokázal túto vetu pre plochy rodu dva, ale jeho prístup neumožňoval rozšírenie na plochy vyšších rodov. Eskin a Mirzakhani (a neskôr spolu s Amirom Mohammadim [15]) dokázali tento výsledok pre plochy vyšších rodov, skombinovaním rôznych metód topológie, geometrie a dynamických systémov. Vytvorili nové metódy štúdia vlastností hyperbolických plôch ľubovoľného rodu. Tento výsledok pre plochy vyšších rodov mal okamžité využitie pre známy problém biliardového stola, teda štúdium geometrie trajektórií biliardovej gule. Skúmanie pohybu biliardovej gule, ako sa odráža od strán mnohouholníkového guľčovníkového stola, umožňuje pochopiť správanie mnohých fyzikálnych systémov, napr. pohyb plynov, a dá sa tiež využiť pri hľadaní súvislostí medzi rôznymi charakteristikami štruktúry modulových priestorov. Matematici si kladú mnoho rôznych otázok pri skúmaní takéhoto pohybu. Je napríklad možné, aby sa guľa pri svojom pohybe vo vnútri mnohouholníka vrátila späť a pohybovala sa opakovane po tej istej dráhe? Ak áno, koľko takýchto trajektórií existuje a ako vyzerajú? Problém, či existuje takáto opakujúca sa dráha pohybu pre všeobecný mnohouholník, zostáva stále nevyriešeným.

Zaujímavou aplikáciou je aj využitie spomínaného výsledku pri riešení matematického problému známeho pod názvom ‘Illumination Problem’, ktorý formuloval v roku 1950 Ernst Straus. Predstavme si miestnosť so zrkadlovými stenami. Ak umiestníme sviečku na isté miesto v miestnosti, bude každý jej iný bod osvetlený? Vieme, že keď svetelný lúč dopadne na stenu, odrazí sa späť pod uhlom takej istej veľkosti, akú mal uhol dopadu. Na obr. 6(A) je náčrt zakrivenej miestnosti, ktorú navrhol Roger Penrose roku 1958 na ilustráciu skutočnosti, že nezávisle na tom, kde sviečku umiestníme, vždy bude existovať oblasť, ktorá nebude osvetlená. Na obr. 6(B) je znázornená miestnosť v tvare nepravidelného mnohouholníka s počtom strán 26, ktorú vytvoril Tokarsky v roku 1995, a miestnosť s počtom strán 24 navrhnutá Castrom v roku 1997. Na oboch modeloch je vyznačený práve jeden bod, ktorý nie je osvetlený druhým vyznačeným bodom, a to ani po opakovanom nasvecovaní.

„Translačná plocha“ sa dá interpretovať ako konečné zjednotenie mnohoúhelníkov, pričom zvolíme spôsob párovania rovnobežných strán rovnakej dĺžky. Takáto štruktúra vznikne prirodzene pri skúmaní trajektórií v biliarde a používa sa ako matematický model osvetlenia. Štvorec, ktorého protiľahlé rovnobežné strany stotožníme, reprezentuje anuloid, a osemuholník s totožnými protiľahlými rovnobežnými stranami je modelom zdvojeného anuloidu (obr. 2), ktorého rod je dva. Lelièvre, Monteil, a Weiss dokázali, náčrtom podobným prácam Mirzakhani, že na ľubovoľnej translačnej ploche M existuje iba konečný počet bodov, ktoré nie sú osvetlené daným bodom na ploche M . Pre pôvodný jednoducho formulovaný problém osvetlenia to znamená, že ak má miestnosť tvar mnohoúhelníka, a veľkosti jeho vnútorných uhlov sú racionálnymi násobkami π , potom nezávisle na umiestnení sviečky, ostane v miestnosti iba konečný počet neosvetlených miest.



Obr. 6

Ďalším dôležitým výsledkom a prínosom Maryam Mirzakhani je objav súvislosti s deformáciou hyperbolických plôch nazývanou „Thurston’s earthquake flow“. Každý uzavretej geodetike α na hyperbolickej ploche X rodu g a ľubovoľnému reálnemu číslu s možno priradiť novú hyperbolickú plochu X_s rodu g pomocou Fenchel–Nielsenovej konštrukcie: plochu X rozrežeme pozdĺž krivky α , skrútime po dĺžke s doprava a opäť spojíme. Výsledná skrútená trajektória je periodická, v tom zmysle, že $X_{s+l} = X_s$, kde l je dĺžka krivky α . „Thurston’s earthquake flow“ je prirodzeným zovšeobecnením tejto konštrukcie.

Mirzakhani dokázala [17] pozoruhodný fakt, že „Thurston’s earthquake flow“ je ergodický. To konkrétne znamená, že trajektória takmer každého bodu počas deformácie povedie ľubovoľne blízko ku každému inému bodu. Jej dôkaz poukázal aj na súvis medzi holomorfnými a symplektickými štruktúrami na hyperbolických plochách daného rodu.

3 Záverom

Maryam Mirzakhani, pokojná, mierna a priateľská osobnosť s obrovskými intelektuálnymi ambíciami, vedela výrečne rozprávať o potešení, ktoré zažívala pri objavovaní zložitých závislostí a vzťahov, o tom, ako strávila svoj život skúmaním tajomstiev, a akú radosť zažívala pri spoznávaní kľúčových postáv a charakterov, ktoré sa objavovali pri spoznávaní jej matematických príbehov – o potešení, ktoré v nej rezonovalo pri spomienke na detský sen stať sa spisovateľkou. Bola vždy pripravená zápalisto diskutovať o matematike s nákazlivým entuziazmom, vždy optimistická v tom, čo by sa dalo urobiť, skromne a nenápadne plánujúc všetko s neochvejnou sebadôverou. Bola známa tým, že riešila tie najzložitejšie problémy s tvrdohlavou vytrvalosťou. McMullen ju opísal ako človeka obdareného „neohroziteľnou ambíciou pokiaľ išlo o matematiku – akousi odvážnou predstavivosťou“.

Napriek sláve a pozornosti verejnosti, ktorých sa Maryam Mirzakhani dostávalo najmä po udelení Fieldsovej medaile, zostala skromnou a pokornou, a vždy sa vyhýbala zbytočnej publicite. Na konferenciách ju bolo vidieť v kruhu postgraduálnych študentov alebo medzi ostatnými medailistami. Sledovala prácu iných matematikov s nadšením a počas ich prednášok im vzrušene kládla otázky, ktoré naznačovali možné nové smery ďalšieho bádania a rozvoja matematiky. Veľkoryso zdieľala svoje inšpiratívne myšlienky s komunitou a nezištne pomáhala ostatným ďalej rozvíjať ich profesionálnu vedeckú kariéru.

Predčasná smrť Maryam Mirzakhani na zákernú chorobu pripravila svet o vynikajúcu matematicku v období jej najväčšieho vedeckého potenciálu. Celosvetová matematická komunita prijala túto stratu s hlbokým zármutkom. Mirzakhani zanechala vedcom množstvo nápadov a myšlienok hodných pokračovania. Jej nápaditosť, kreativita, inšpiratívne myšlienky a vedecké prínosy, či už priame alebo nepriame v rôznych oblastiach matematiky a fyziky, ešte nie sú plne docenené a nerozpracované do detailov zostávajú otvorenou výzvou.



Maryam Mirzakhani,
the first female Fields medallist

Obr. 7. Maryam Mirzakhani (zdroj [18])

Deň narodenín Maryam Mirzakhani, 12. máj, bol na jej počesť vyhlásený za Deň oslavy žien v matematike. Stalo sa tak na podnet Výboru žien Iránskej matematickej spoločnosti prednesený na konferencii (WM)² - World Meeting for Women on Mathematics, ktorá sa konala 31. júla 2018 v Rio de Janiero ako súčasť Svetového kongresu matematikov ICM 2018. Iniciatívu v roku 2019 podporilo množstvo matematických spoločností a združení žien v matematike v krajinách celého sveta organizáciou viac než 100 rôznych podujatí na počesť Maryam Mirzakhani, a na oslavu vedeckej práce a výsledkov žien oracujúcivh v matemtiike. koordinátorom celej akcie boli okrem iných aj Európska spoločnosť žien v matematike EWM, Americká asociácia žien v matematike AWM, Výbor žien Iránskej matematickej spoločnosti, a Asociácia žien v matematike v Čile a v Indii a Matematická asociácia žien v Afrike [21].

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku sa tiež aktívne pripojila k vyhlásenej iniciatíve, dňa 10. mája 2019 sa na pôde Ústavu matematiky a fyziky Strojníckej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave konalo stretnutie na počesť Maryam Mirzakhani. Okrem pripomienky jej životných osudov a vedeckej práce tiež odzneli krátke referáty o aktuálnych vedeckých iniciatívach prítomných slovenských matematiciiek pôsobiach na univerzitách v Bratislave, Trnave a Žiline.

Maryam Mirzakhani sa stala skutočnou inšpiráciou pre celý súčasný vedecký svet, i budúce generácie.

Literatúra

- [1] AGARWAL, N., SHAH, R., VENKATAMARAN, G. *Maryam Mirzakhani – the Master Artists of Curved Surfaces*. Resonance, March 2018, str. 253-262.
- [2] O’CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. *Maryam Mirzakhani*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mirzakhani.html>.
- [3] MIRZAKHANI, M. *Simple Geodesics on Hyperbolic Surfaces and the Volume of the Moduli Space of Curves*. Ph.D. Thesis, Harvard University, 2004.
- [4] ESKINAND, A., MIRZAKHANI, M. Counting Closed Geodesics in Moduli Space. In *Journal of Modern Dynamics*, Vol. 5, No. 1, pp. 71–105, 2011.
- [5] ROBERTS, S. Remembering Maryam Mirzakhani, the Pioneering Mathematician Who Died at Forty, In *The New Yorker*, 17 July 2017.
- [6] RAFI, K. Maryam Mirzakhani (1977–2017). In *Nature*, Vol. 549, 2017.
- [7] TAO, T. *Maryam Mirzakhani*. <https://terrytao.wordpress.com/2017/07/15/maryam-mirzakhani/>.
- [8] MIRZAKHANI, M. Simple Geodesics and Weil–Petersson Volumes of Moduli Spaces of Bordered Riemann Surfaces. In *Inventiones Mathematicae*, Vol. 167, No. 1, pp. 179–222, 2007.
- [9] MIRZAKHANI, M. Weil–Petersson Volumes and Intersection Theory on the Moduli Space of Curves. In *Journal of the American Mathematical Society*, Vol. 20, pp. 1–23, 2007.
- [10] MIRZAKHANI, M. Growth of the Number of Simple Closed Geodesics on Hyperbolic Surfaces. In *Annals of Mathematics*, Vol. 168, No. 2, pp. 97–125, 2008.
- [11] KONTSEVICH, M. Intersection Theory on the Moduli Space of Curves and the Airy Function. In *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 147, pp. 1–23, 1992.

- [12] ESKIN, A., MIRZAKHANI, M. Invariant and Stationary Measures for the $SL(2, R)$ Action on Moduli Space, arXiv 1302.3320 – to appear in Publications mathématiques de l’IHĚL’S.
- [13] ZORICH, A. The Magic Wand Theorem of A Eskin and M Mirzakhani, English translation of Le thĉorĉme de la baguette magique de in Gazette des mathĉmaticiens in 2014, arXiv 1502.05654, preprint, 2015.
- [14] MCMULLEN, C. Dynamics of $SL(2, R)$ Over Moduli Space in Genus Two. In *Annals of Mathematics*, 165, pp. 397–456, 2007.
- [15] ESKIN, A., MIRZAKHANI, M., MOHAMMADI, A. Isolation, Equidistribution, and Orbit Closures for the $SL(2, R)$ Action on Moduli Space. In *Annals of Mathematics*, Vol. 182, No. 2, pp. 673–721, 2015.
- [16] LELIĚVRE, S., MONTEIL, T., WEISS, B. Everything is Illuminated. In *Geometry and Topology*, Vol. 20, pp. 1737–1762, 2016.
- [17] MIRZAKHANI, M. Ergodic Theory of the Earthquake Flow. In *International Mathematics Research Notices*, Article ID rnm116, Vol. 2008, p. 39, 2008.
- [18] SERIES, C. Maryam Mirzakhani and Her Work. In *Mathematics TODAY*, 193, October 2017.
- [19] ZORICH, A. The work of Maryam Mirzakhani, In *AMS Notices*, vol. 62, pp. 1345–1349, 2015.
- [20] WRIGHT, A. From rational billiards to dynamics on moduli space, In *Bull. AMS.*, vol. 53, pp. 41–56, 2016.
- [21] <https://may12.womeninmaths.org/#>

doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.

stav matematiky a fyziky, Strojnick fakulta
Slovensk technick univerzita v Bratislave
Nm. slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: daniela.velichova@stuba.sk

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective
to stimulate scientific research and teaching methodology
in the fields of geometry and computer graphics
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

SSGG

Institute of Mathematics and Physics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Abstracts

C. Càndito, A. Meloni: Hexagons and squares as bidimensional representations of a cube

This contribution examines examples of the plane representation of a series of cubes and the strategies used by some artists to work between the plane and the space. We analyse the recurrence in graphic language of some configurations, which have a two-dimensional and three-dimensional meaning, such as the hexagonal tessellation that can be assimilated to isometric orthogonal axonometry. Known since ancient times, its suggestive effects were used in a series of artistic expressions in the twentieth century as well as in the graphic language of today's music videos.

A. Ferko: Prof. Ján Čižmár awarded The Big medal of st. Gorazd for his lifelong unique contribution to the theory of teaching mathematics and mathematics history

Award to prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. for his lifelong work in mathematics.

M. Vajsáblová: Geometric and mathematical analysis of map Bohemiae Rosa, Blaeu's historical map from the 17th century and August's projection

Historical maps present not only factual but also artistic value. Their mathematical and geometric fundamentals show a great diversity. The paper deals with geometric analysis of the cartographic projection on three maps from the 17th century mapping the world, Europe and Bohemia, whose authors are Willem Blaeu with his son Joan. Analyzing the map curiosity of Bohemiae Rosa by Christoph Vetter we have showed the geometrical objects (pentagons, epicycloids) and properties of the map composition in conjunction with the author's message. The final chapter presents mathematical and geometric characteristics of August's cartographic projection, where epicycloids are also used.

D. Velichová: A tribute to Maryam Mirzakhani

The paper outlines the life and work of Maryam Mirzakhani (1977 - 2017) – the first and the only female winner of the Fields Medal since its inception in 1936. Mirzakhani is an inspiration to young women around the world, to believe in their own abilities and to pursue their academic dreams changing them to reality.

Edited by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

Editor-in-Chief:

Daniela Velichová

Managing Editors:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Editorial Board:

Ján Čížmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Štefan Solčan

Margita Vajsáblová

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics

IČO: 31 816 304

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

Frequency: One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.
Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

G is cited in: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG July 2019, Bratislava

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific

www.ssgg.sk