



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 16, číslo 32, 2019
ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG**Vedúca redaktorka:**

Daniela Velichová

Výkonné redaktorky:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Redakčná rada:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsálová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

IČO: 31 816 304

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:

Redakcia G - SSGG

ÚMF SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

ssgg@ssgg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.

Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adresu: www.ssgg.sk**Tlačí:** ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.**Časopis G je citovaný v:** Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG december 2019, Bratislava

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkol'vek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.

SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
SLOVAK JOURNAL FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

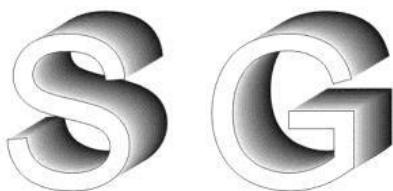
ročník 16, číslo 32, 2019
volume 16, number 32, 2019



Obsah – Contents

Vizualizácia a korekcia mentálneho obrazu Visualization and correction of mental image Mária Kmeťová, Renáta Vágová	5
220 rokov Mongeovej Géométrie descriptive 220 years of Monge Géométrie descriptive Jakub Poruba, Věra Ferdiánová	19
From the triangle to tetrahedrons, simplices and polytopes Od trojuholníka k štvorstenom, simplexom a polytopom Gunter Weiss	39

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo. Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaniem je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG
Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Vizualizácia a korekcia mentálneho obrazu

Mária Kmeťová, Renáta Vágová

Abstrakt

V tomto článku poskytneme stručný prehľad zmeny obsahu pojmu vizualizácia a ďalších pojmov s ním súvisiacich. Vizualizácia je neodmysliteľnou súčasťou abstraktného myslenia aj v matematike a takisto nevyhnutným predpokladom tvorby mentálnych predstáv. Proces tvorby mentálneho obrazu a jeho korekciu sme sledovali u žiačky druhého ročníka gymnázia po preberaní učiva zo stereometrie vo forme prípadovej štúdie. Snažili sme sa čo najpresnejšie zachytiť podrobnosti v jej uvažovaní pri riešení stereometrického problému najprv bez pomôcok a potom pomocou GeoGebra appletu a takzvaného navigačného listu, ktorý slúžil na preklenutie tŕžkostí v pochopení priestorovej reprezentácie problému v dynamickom prostredí.

Kľúčové slová: vizualizácia, mentálny obraz, stereometria, dynamický geometrický softvér, GeoGebra

Abstract

In this article, we provide a brief overview of changing the content of the term visualisation and other related terms. Visualisation is an integral part of abstract thinking also in mathematics and a necessary prerequisite for the creation of mental ideas. We observed the process of mental image creation and its correction on one second-year high school student after taking the subject matter from solid geometry in the form of a case study. We tried to capture the details in her thinking as accurately as possible when solving a solid geometry problem, first without tools and then using the GeoGebra applet and the so-called navigation guide, which served to overcome difficulties in understanding the spatial representation of the problem in the dynamic environment.

Key words: visualisation, mental image, solid geometry, dynamic geometry software, GeoGebra

1 Úvod

Hoci všeobecne možno povedať, že vizualizácia je neodmysliteľnou súčasťou ľudského poznania, mnohotvárny obsah tohto pojmu (ako vonkajšia a vnútorná reprezentácia, mentálny obraz a pod.) dlhodobo neboli presne vymedzený ani v pedagogickom, ani v psychologickom výskume. Skúmanie mentálnych obrazov vo všetkých zmyslových modalitách (zrak, sluch, čuch, chut', hmat) a ich vzájomné prepojenie prevládali v psychológii už počas 19. storočia, avšak v prvej polovici 20. storočia, počas zosilňovania myšlienky behaviorizmu, sa ich výskum do veľkej miery prerušil. Z matematického hľadiska sa skúmaním vizualizácie a priestorových schopností zaoberal najskôr Bishop [1]. Okrem jeho výskumu sa až v roku 1982 objavilo v tejto oblasti zopár štúdií, ktoré sa špecializovali na matematické vzdelávanie (Presmegová v [2] uvádzajú autorov, ako napr. Clements, Krutetskij, Moses, Suwarsono). V tomto rannom období výskumu sa stretávame s rôznymi definíciami toho istého pojmu alebo s takmer totožnými definíciami rôznych pojmov. Sú to pojmy ako napr. vizualizácia, priestorová vizualizácia, mentálna predstavivosť, zraková predstavivosť, vizuálne uvažovanie a pod. Na stranach 36 až 39 v [3] je uvedená prehľadná zbierka explicitných definícií pojmu

vizualizácia rôznymi autormi v chronologickom poradí od sedemdesiatych rokov minulého storočia.

Osemdesiate roky minulého storočia tvorili rozhodujúci priedel v tomto výskume. Konštruktivizmus bol na vzostupe a úspešne čeliť vplyvu behaviorizmu. Metóda kvalitatívneho výskumu sa začala akceptovať pre riešenie komplexných otázok vo výučbe matematiky. Obdobie bolo zrelé na obnovený záujem o postavenie vizuálneho myslenia vo výučbe a štúdiu matematiky, pričom kvalitatívny výskum bol vhodným prostriedkom na skúmanie inak neprístupných myšlienkových procesov spojených s mentálnymi obrazmi. Čoraz viac sa uznávala dôležitosť vizuálneho spracovania a vonkajších prejavov tohto poznania v matematike. Matematika je koniec koncov predmet, ktorý má ako základné komponenty diagramy, tabuľky, priestorové usporiadanie významov, ako sú symboly a ďalšie náписy. Tento obnovený záujem o výskum vizualizačného procesu vo výučbe matematiky sa začal prejavovať od roku 1988 [2].

2 Vizualizácia a mentálne predstavy

Ako teda vizualizujeme? Ako si vytvárame vnútorné mentálne vizuálne predstavy, konkrétnie alebo abstraktné interné reprezentácie informácií? Jednou odpovedou na túto otázku je, že ukladanie a manipulácia s informáciami sa spolieha na miliardy alebo bilióny elektrochemických reakcií v mozgu. Takáto odpoveď je, samozrejme, správna, ale chýba jej zmysel v danom kontexte. Samotné poznanie jednotlivých zložiek nám nehovorí veľa o celku. Samotné poznanie komponentov nám neumožní vidieť fungovanie mentálnych predstáv globálne. Funkciu mozgu ale môžeme analyzovať nielen na úrovni jednotlivých nervových udalostí, ale aj na úrovni veľkých nervových súborov, ktoré slúžia na ukladanie a spracovanie informácií špecifickým spôsobom. Podľa konvencii kognitívnej psychológie považujeme „mysel“ za funkčnú úroveň popisu mozgovej aktivity, ktorá špecifikuje spracovanie informácií [4].

Už pred niekoľkými desaťročiami sa rozprúdila debata o povahе mentálnej reprezentácie, ktorá zasahovala do mnohých oblastí, najmä do štúdií umelej inteligencie, filozofie a neurovedy. Výskum umelej inteligencie v 70-tych rokoch minulého storočia vychádzal z otázky: Ako by bolo možné naprogramovať počítače na napodobňovanie duševných udalostí? To znamená, keby sme chceli vybudovať mysliaci mozog, ako by sme v ňom reprezentovali informácie? Pritom tieto informácie môžu byť veľmi rôznorodé, od jednoduchého číselného radu po zložitý vizuálny zážitok. Počiatočná rozprava sa zamerala na dve formy uloženia: výrokové a obrazové. Presnejšie povedané, diskutovalo sa o tom, či sa okrem opisnej formy (používanie jazyka), môžu informácie uchovávať aj v obrazovej forme. Parson a Kosslyn v [4] uvádzajú, že nedávne empirické zistenia vyriešili túto dilemu a teraz silne podporujú tvrdenie, že my ľudia môžeme reprezentovať informácie niekoľkými spôsobmi, a že takéto reprezentácie sa môžu flexibilne používať v pracovnej pamäti alebo počas mentálnych predstáv. Tento záver otvára ďalšiu kapitolu pre empirický výskum, a to otázku charakterizovania všetkých možných rôznych foriem mentálnej reprezentácie, ako aj zistovanie, kedy a ako sa používajú pri poznávaní.

Na hodinách matematiky si tiež vytvárame rôzne druhy mentálnych predstáv (pozri obr. 1), ktoré môžu mať aj iný ako obrazový charakter. Podstata niektorých spočíva v rôznych schémach alebo aj v textových informáciách. Učitelia matematiky zastávajú názor, že mentálne predstavy a ich vonkajšie reprezentácie (nie mentálne) musia byť v interakcii na dosiahnutie lepšieho pochopenia a riešenia problémov, kde vizualizácia predstavuje kontext, kde sa táto interakcia uskutočňuje. Toto je jeden z hlavných dôvodov vzniku protichodných

názorov medzi psychológmi a učiteľmi matematiky [5]. Potom, ako sa koncom 80. rokov minulého storočia vizualizácia stala dôležitým predmetom výskumu, Dreyfus [6] poskytol množstvo príkladov, ktoré poukazujú na silu vizualizácie v matematickom myslení žiakov, a zároveň poukázal na prekážky spojené práve s ich vizuálnym myslením. Dreyfus tvrdí, že hoci si žiaci vytvárajú vizuálne predstavy, nie je isté, že ich následne používajú pri analytickom uvažovaní. Zastáva názor, že holistický spôsob riešenia úloh si vyžaduje viac poznávacieho zaťaženia ako sekvenčné spôsoby uvažovania. Avšak Presmegovej výskum z roku 1985 [7] toto tvrdenie nepotvrdil. Svoje závery opiera o empirické dôkazy, ktoré naznačujú, že zmenou niektorých aspektov výučby by bolo možné žiakov povzbudiť k využívaniu vizualizácií, čím by sa dosiahlo optimálne využitie vizuálnych postupov. Podľa Yerushalmymo, Shternberga a Gileada [8] vizualizácia je silným nástrojom nielen pre tak jasne vizuálny matematický odbor, akým je geometria, ale je rovnako dôležitým nástrojom, napr. aj pre algebru.



Obr. 1. Rôzne druhy mentálnych predstáv

Presmegová opisuje rôzne typy mentálnych predstáv, ktoré v rámci svojho výskumu spozorovala u svojich žiakov [9]:

- Konkrétne obrazové predstavy** ("concrete images", „pictures in the mind“) – konkrétné predstavy fyzického objektu. Chápeme ich ako vykreslené obrázky v našej mysli, čím sa stávajú detailnými a vernými, avšak nehybnými, kópiami. Iní autori používajú pre tento typ predstavy pojem statické predstavy.
- Pamäťové predstavy vzorcov** ("memory images of formulae") – ide o mentálnu vizualizáciu vzorcov alebo schematických vzťahov tak, ako sme ich videli na tabuli, v učebnici, zošite a pod.
- Kinetické predstavy** ("kinaesthetic images") - predstavy, ktoré si vyžadujú svalovú aktivitu akéhokoľvek druhu. Sčasti sa vzťahujú na fyzické a sčasti na mentálne obrazy, keďže pohyby rúk, nôh, hlavy a pod. plnia veľmi dôležitú úlohu pri tvorbe týchto predstáv. Máme na mysli predstavy, ktoré sú vytvorené, transformované alebo komunikované pomocou fyzického pohybu.
- Dynamické predstavy** ("dynamic images") – predstavy, v ktorých sa pohybujú celé objekty alebo niektoré ich časti, t. j. pohybujúce sa predstavy v našej mysli. Zahŕňajú schopnosť transformovať alebo premiestňovať konkrétnu zrakovú predstavu.
- Predstavy vzorov** ("pattern images") – predstavy vizuálnych schém, ktoré zodpovedajú abstraktným vzťahom. Rozdiel medzi uvádzanými a pamäťovými predstavami spočíva v tom, že sa nevizualizuje samotný vzťah, ale nejaká grafická reprezentácia jeho

významu. Ide o najabstraktnejší typ predstáv a Presmegová ho považuje za najdôležitejší pre pochopenie matematických vzťahov.

Jedna predstava môže súčasne patríť do dvoch vyššie uvedených skupín: predstavu môžeme označiť za kinetickú alebo dynamickú bez ohľadu na to, či ide o konkrétnu obrazovú, pamäťovú predstavu alebo predstavu vzorov.

2.1 Priestorová predstavivosť

V oblasti priestorovej geometrie preferujeme používanie pojmu priestorová predstava. Tento a jemu príbuzné pojmy sú dôkladne analyzované Gutiérrezom v [10]. Priestorová predstava je tvorená zo zmyslového poznania priestorových vzťahov a dajú sa vyjadriť v širokej škále verbálnych alebo grafických foriem zahrňujúcich schémy, obrazy, kresby, náčrty a pod. Gutiérrez ďalej zdôrazňuje vzťah medzi priestorovými predstavami a vonkajšími reprezentáciami. Predstavy považuje za základné operatívne jednotky priestorového myslenia a geometrické objekty za základný materiál pre tvorbu a manipuláciu priestorových predstáv. Priestorové myslenie definuje ako „formu mentálnej aktivity, ktorá umožňuje vytvárať priestorové predstavy a manipulovať s nimi počas riešenia rôznych praktických a teoretických úloh,“ vrátane verbálnych a pojmových operácií a niektorých percepčných udalostí potrebných na vytvorenie mentálnych predstáv. Gutiérrez v [10] zavádzza tzv. vizualizačný model, v ktorom je vizualizácia tvorená štyrmi hlavnými prvkami:

- 1) **Mentálna predstava** – typ kognitívnej reprezentácie matematického pojmu alebo vlastnosti pomocou vizuálnych alebo priestorových prvkov.
- 2) **Vonkajšia reprezentácia** – akýkoľvek typ grafickej alebo verbálnej reprezentácie pojmov alebo vlastností, ktorý zahŕňa kresby, náčrty, schémy a pod., ktoré pomáhajú vytvárať alebo meniť mentálne predstavy a vizuálne úvahy.
- 3) **Vizualizačné procesy** – mentálne alebo fyzické aktivity, ktoré sa týkajú mentálnych predstáv.
- 4) **Vizuálne schopnosti**, ktoré sú potrebné na vyriešenie matematického problému.

Priestorová predstavivosť je schopnosť, ktorá sa podľa [11] skladá z dvoch typov schopností: priestorová vizualizácia a priestorová orientácia, ktoré sú v [11] definované nasledovne:

- 1) **Schopnosť priestorovej vizualizácie** „je schopnosť mentálnej manipulácie, rotácie, otocenia alebo preklopenia obrazovej predstavy vnímaného objektu.“
- 2) **Schopnosť priestorovej orientácie** „je schopnosť pochopiť usporiadanie prvkov v rámci prezentovaného vizuálneho prototypu a schopnosť nezostať zmienený zmenou orientácie, v ktorej môže byť prezentovaná priestorová konfigurácia.“

Súhrn uvedených schopností sa tiež často označuje ako priestorové schopnosti.

3 Vplyv počítačovej technológie na rozvoj priestorových schopností

V súčasnosti sa stále častejšie analyzuje vplyv používania reálnych alebo virtuálnych modelov na rozvoj priestorových schopností žiakov [12]. Výsledky štúdií ukazujú, že vhodné použitie dynamických geometrických softvérov môže mať výrazne pozitívny dopad na správny rozvoj žiackych priestorových schopností. Dá sa predpokladať, že vďaka možnosti manipulovať s virtuálnymi 3D objektmi by žiaci mohli úspešne riešiť aj neštandardné stereometrické úlohy.

3.1 Vyučovanie priestorovej geometrie v dynamickom prostredí

Podstatou akéhokoľvek učenia je pozorovanie. V prípade trojrozmerného priestoru sú základom vizuálne nadobudnuté skúsenosti, z ktorých vychádzajú všetky činnosti a z nich následné abstrakcie. Pozorovať neznamená iba uprene hľadiť alebo pozerať sa na daný objekt. Pozorovať znamená porozumieť bežným veciam okolo nás, pochopiť spoločné vlastnosti rôznych objektov a postrehnúť rôzne vlastnosti v rámci jedného objektu.

Ako uvádza Sánchez Ávila (citované v [5]), vo vzťahu žiak – pozorovanie je potrebné dodržiavať nasledovné požiadavky:

- V prvom rade žiak môže pozorovať také objekty, ktoré sa vzťahujú na bežne viditeľné geometrické telesá v prírodnom, sociálnom, technickom a umeleckom prostredí.
- Na druhom mieste je potrebné, aby sledoval grafické reprezentácie a ich spojitost alebo vzťah s realitou, ktorú tieto reprezentácie odrážajú.
- Po tretie, žiacke pozorovanie môže byť zamerané na akýkoľvek didaktický materiál nachádzajúci sa v učebni, ako napr. dvoj alebo trojrozmerný priestor.

V súčasnosti je veľmi dôležité poznamenať, že informačné a komunikačné technológie (IKT) pozitívne narušili oblasť klasických spôsobov reprezentácií. IKT nám pomáhajú znázorňovať a stvárať naše predstavy, vnútorné chápanie a rovnako aj motivujú kognitívne procesy. Sánchez Ávila (citované v [5]) zavádzajúci didaktickú schému vyučovania priestorovej geometrie s využitím IKT, ktorá pozostáva z 5 etáp:

1. Pozorovanie
2. Osobné pôsobenie/konanie
3. Premýšľanie/uvažovanie
4. Interiorizácia
5. Abstrakcia

Voľné pozorovanie musí byť sprevádzané tzv. podnetným pozorovaním. Žiak sa pokúša nájsť odpovede na svoje pochybnosti, na to, čo ho zaujíma a tiež na otázky svojich spolužiakov. Prostredníctvom otázok (v ústnej alebo písomnej forme) učiteľ usmerňuje pozorovanie na aspekty, ktoré sa nám môžu zdať zrejmé, ale pre žiaka predstavujú niečo nové, doposiaľ neobjavené. Zámerom učiteľa je, aby mu položené otázky pomohli objaviť zaujímavé prvky alebo vzťahy medzi prvkami. Ide o pozorovanie, ktoré žiaka motivuje alebo uňho vzbudí súvislosti a súčasne ho dovedie k abstrahovaniu pojmov, analýze vlastností. Žiakova manipulácia s virtuálnymi objektmi sprevádzaná súborom otázok, na ktoré je potrebné nájsť odpovede, sú významnou pomôckou, ako si osvojiť odbornú slovnú zásobu a napredovať v reprezentácií trojrozmerných objektov [5].

Ak chceme, aby sa žiak aktívne zapájal, musí do procesu pozorovania zapojiť aj iné procesy, t.j. **manipuláciu, porovnávanie a overovanie**. Aktívna participácia mu pomôže **interiorizovať** problémy a možné spôsoby, ktorými nájde jedno alebo viac riešení. Toto všetko mu umožní pokročiť, napredovať v procese učenia. Akonále žiak dosiahne etapu pozorovania, osobného pôsobenia, premýšľania a interiorizácie, prechádza do ďalšej fázy - abstrakcie. Častokrát sa stáva, že proces abstrakcie vedie k novým otázkam, ktorých odpovede nie sú ihned zrejmé alebo známe. Vynárajúce sa otázky v etape abstrahovania pozitívne prispievajú k intelektuálnemu rozvoju žiaka.

Vďaka dynamickým geometrickým softvérom žiak vstupuje do virtuálneho priestoru, kde sa stretáva s množstvom obrázkov rôznych útvarov (reprezentáciami reálnych objektov). Žiak má možnosť manipulovať s virtuálnymi objektmi, pričom táto manipulácia je veľmi podobná tej fyzickej s reálnymi objektmi. Počítačové simulácie pomáhajú žiakovi prekonávať všetky tăžkosti, ktorým čelí v prvej fáze priestorového vnímania. Zároveň ponúkajú určitý stupeň interaktivity, t. j. môžu pohybovať, otáčať, premiestňovať jednotlivé objekty. Manipulácia im dodáva voľnosť, nie sú fixovaní na konkrétny pohľad, vďaka čomu môžu „absorbovať“ situáciu z rôznych uhlov pohľadu. Žiakom je tak poskytnutý nástroj, ktorý ich zavedie do abstrakčnej fázy myslenia.

4 Predbežný výskum k tvorbe mentálnej predstavy

V našom výskume sme sa zamerali na myšlienkové procesy u žiaka pri riešení neštandardného problému. Inak povedané, tvorbu mentálnej predstavy (obrazu v mysli) bez prítomnosti fyzického objektu (pozri obr. 1) a jej spracovanie pri riešení neštandardného priestorovo-vizualizačného problému. Pre tento účel sme vytvorili problém nazvaný „Vrstvenie kociek“, kde treba uvažovať o skrytých objektoch. Znenie problému sa nachádza v ďalšej kapitole.

V rámci predbežného výskumu sme testovali 87 žiakov z troch stredných škôl dvoma rôznymi štandardizovanými testami. V prvej časti žiaci riešili tri skupiny úloh testu priestorových schopností, ktorého reliabilita a validita je garantovaná Národným ústavom certifikovaných meraní vzdelávania (NÚCEM). V druhej časti riešili rôzne typy úloh z „Nástroja matematického spracovania úloh“ (The Mathematical Processing Instrument) merajúci preferenciu vizualizácie žiakov pri riešení rôznych matematických úloh, tzv. matematickú vizualitu. Ide o rozsah, v akom žiak uprednostňuje používanie vizuálnych metód v snahe vyriešiť matematické problémy, ktoré možno vyriešiť bud' vizuálnymi alebo nevizuálnymi metódami (viď nižšie). Nástroj (test) vytvorila psychologička Norma Presmegová [2, 7] a pozostáva z troch dokumentov, ktorých plná verzia sa nachádza v prílohe práce [13]:

- 1. Vizualizačný test** (sekcia A, sekcia B, sekcia C) – obsahuje úlohy, ktoré majú žiaci vyriešiť. V prípade, že žiak nevie úlohu doriešiť úplne, je potrebné, aby naznačil postup, ktorým by sa snažil úlohu vyriešiť.
- 2. Dotazník matematického spracovania úloh** (každá sekcia má jej prislúchajúci dotazník) – obsahuje zoznam riešení, ktorými je možné každú úlohu vyriešiť. Jednu úlohu je možné riešiť 3-6 spôsobmi.
- 3. Odpoveďový hárok** (každá sekcia má jej prislúchajúci odpoveďový hárok) – tabuľka, do ktorej žiaci zaznačia nimi zvolený postup pri konkrétnej úlohe.

Test pozostáva z aritmeticko-algebrických úloh, ktorých náročnosť sa postupne zvyšuje. Avšak nie v rámci jednej sekcie, ale vzťah náročnosti je vzostupný medzi jednotlivými sekciami. Prvá a posledná sekcia pozostáva zo 6 úloh a sekcia B z 12 úloh. Žiak môže za riešenie každej úlohy dostať 0, 1 alebo 2 body. Nie je dôležité, či sa žiakovi podarí správne vyriešiť požadované úlohy. Počet bodov závisí iba od typu zvolenej metódy, ktorou sa snažil úlohu vyriešiť.

Pre lepšiu predstavu testu uvedieme príklad zo sekcie A:

Úloha A-2. V dome je osem stolov, ktoré majú štyri alebo tri nohy. Spolu tak majú 27 nôh. Koľko stolov má 4 nohy?

Zoznam riešení A-2. (uvádzame len časť)

Riešenie 2: Úlohu som riešil rovnicou, napr.

Nech počet stolov so štyrmi nohami je x .

Potom počet stolov s tromi nohami je $8 - x$.

Celkový počet nôh je $4x + 3(8 - x)$.

Teda $4x + 3(8 - x) = 27$.

Riešenie pre x : $x = 3$.

Teda počet stolov so štyrmi nohami je 3 (a 5 stolov má tri nohy).

Riešenie 3: Načrtol som si schému, ktorá znázorňuje nohy stolov, a potom som vytvoril skupiny po štyroch a po troch.

IIII / IIII / IIII / III / III / III / III / III

Zo schémy možno vidieť tri skupiny so štyrmi nohami a päť skupín s tromi nohami.

Teda sú tam tri stoly so štyrmi nohami (a päť stolov s tromi nohami).

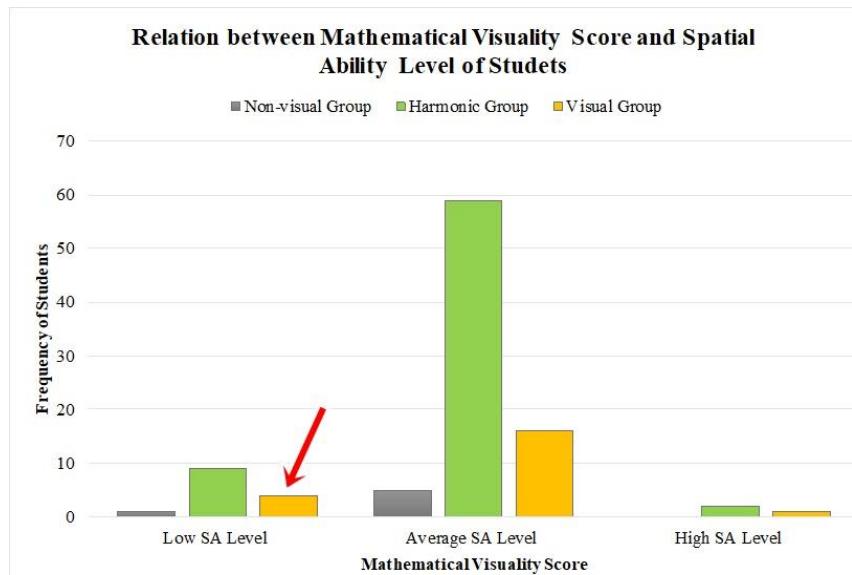
Žiak porovná svoje riešenie s ponúknutými a zapíše číslo riešenia do odpoveďového hárka. Počet bodov závisí iba od typu zvolenej metódy, ktorou sa žiak snažil úlohu vyriešiť. Rozlišujeme dva typy metód:

- Vizuálna metóda – metóda, ktorá zahŕňa zrakovú predstavivosť s alebo bez grafického náčrtu, ktorá je nevyhnutnou časťou riešenia, hoci pri riešení využíva i rôzne iné úvahy alebo algebrické metódy. Využitie tejto metódy je v teste ohodnotené 2 bodmi.
- Nevizuálna metóda – metóda, ktorá nezahŕňa zrakovú predstavivosť ako nevyhnutnú časť riešenia. Pri uplatnení tejto metódy žiak získa 0 bodov.

V prípade, že nie je jasné, o aký typ metódy ide, resp., ak sa žiak snažil uplatniť vizuálnu metódu, úloha je ohodnotená 1 bodom.

Podľa preferencie použitia vizuálnych prvkov (podľa celkového počtu získaných bodov z odpoveďového hárku) sú žiaci rozdelení do troch skupín.

1. **Vizuálna skupina** – žiaci, ktorí uprednostňujú použitie vizuálnych metód pri riešení úloh, ktoré možno vyriešiť buď vizuálnymi alebo nevizuálnymi metódami.
2. **Harmonická skupina** – žiaci, ktorí neuprednostňujú ani vizuálne a ani nevizuálne metódy pri riešení rôznych matematických úloh. Riešenie závisí od danej úlohy.
3. **Nevizuálna skupina** – žiaci, ktorí neuprednostňujú použitie vizuálnych metód pri riešení úloh, ktoré možno vyriešiť buď vizuálnymi alebo nevizuálnymi metódami.



Obr. 2. Vzťah medzi výsledkami z dvoch testov

Na základe výsledkov z oboch testov sme zistili, že prevažná väčšina žiakov s priemernou úrovňou priestorových schopností z prvého testu patrí do harmonickej skupiny žiakov z druhého testu (pozri obr. 2, prevzatý z [16]). Na uskutočnenie podrobnej analýzy tvorby mentálnej predstavy (a hodnotenie užitočnosti navrhnutej pomôcky, ktorá spája papierové a digitálne prostredie) u konkrétneho žiaka sme si vybrali žiačku z vizuálnej skupiny a s nízkou úrovňou priestorových schopností (pozri červenú šípku na obr. 2). Zaujímavosťou tejto skupiny je práve preferencia používania vizuálnych metód pri riešení rôznych typov matematických úloh napriek podpriemernej úrovni priestorových schopností.

5 Prípadová štúdia

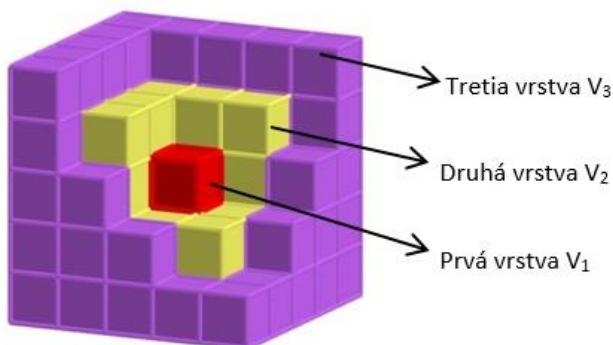
Metodologické východisko našej prípadovej štúdie sa zakladá na literatúre [14] a [15]. Vybraná žiačka riešila nasledovný problém, ktorý je obmenou série úloh s názvom „Vrstvenie kociek“ skúmanej v [13].

Predstavte si, že máte k dispozícii neobmedzené množstvo jednotkových kociek v rôznych farbách. Ďalej si predstavte, že pomocou týchto jednotkových kociek budete tvoriť väčšie kocky postupným pridávaním vrstiev (ako na cibuli alebo na matrioske), pričom každá vrstva bude inej farby. Následne si predstavte rôznofarebné vrstvy zložené z jednotkových kociek a odpovedzte na nasledovné otázky:

Predstavte si kocku K poskladanú z $5 \times 5 \times 5$ jednotkových kociek.

- Koľko vrstiev máme odstrániť, aby sme sa dostali k prostrednej jednotkovej kocke?*
- Koľko jednotkových kociek sa nachádza v jednotlivých vrstvách?*
- Koľko jednotkových kociek je skrytých vo vnútri kocky K?*
- Predstavte si jednotkové kocky vonkajšej vrstvy, ktoré sa dotýkajú celými stenami jednotkových kociek prechádzajúcej vnútornej vrstvy. Koľko je takých jednotkových kociek vo vonkajšej vrstve?*
- Odoberte tie jednotkové kocky z K, ktoré sa dotýkajú ostatných jednotkových kociek práve tromi stenami. Koľko jednotkových kociek ostane vo viditeľnej vrstve?*

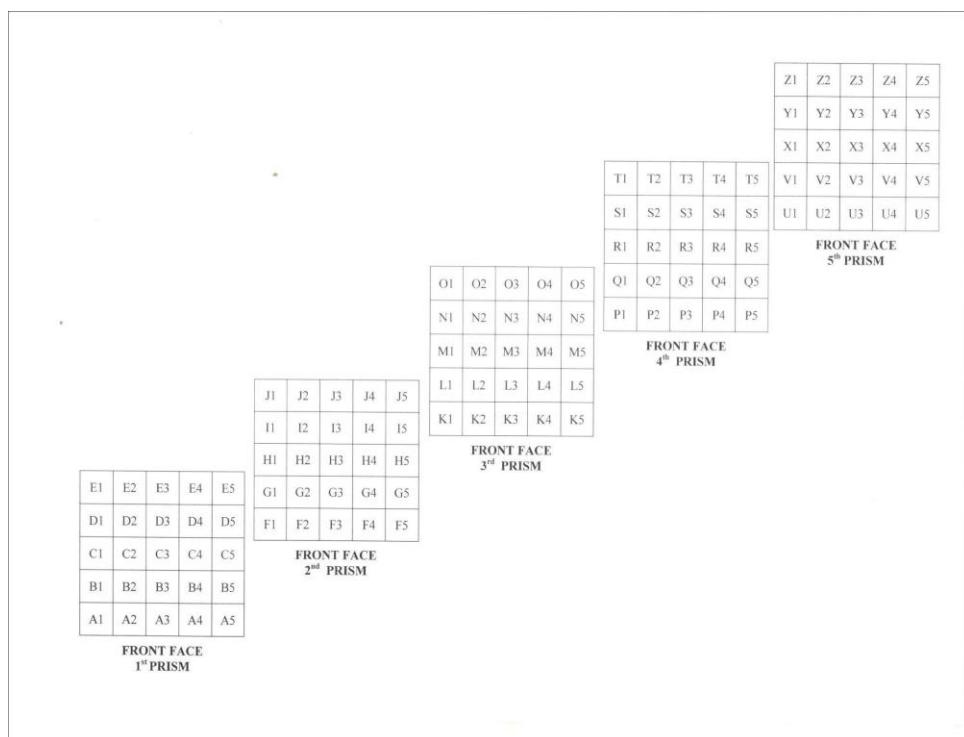
Riešenie problému sa značne zjednodušíuje vizualizáciou „neviditeľných“ (skrytých) vrstiev kocky K v dynamickom geometrickom softvéri GeoGebra (obr. 2). Na jednotlivé otázky dostávame nasledujúce odpovede: (a): 2 vrstvy, (b): 1, 26 a 98 ($98=5^3-3^3$) jednotkových kociek, (c): 27 jednotkových kociek, (d): $6 \cdot 9 = 54$ jednotkových kociek, (e): $54 + 12 \cdot 3 = 90$ jednotkových kociek.



Obr. 3. Ukážka princípu vrstvenia kociek

Naším cieľom bolo podrobne skúmať jednotlivé kroky riešenia problému vybranou žiačkou, ktorá dosiahla nízku úroveň priestorových schopností a uprednostňuje vizuálne metódy pri riešení rôznych matematických úloh. Kroky riešenia problému boli postupne skúmané v dvoch rôznych prostrediach, t.j. v prostredí papiera a ceruzky a v prostredí papiera a ceruzky v kombinácii s dynamických prostredími. Rovnako sme sa zamerali na to, či kombinované použitie tradičného papierového a dynamického prostredia pomôže žiačke potvrdiť alebo vyvrátiť a opraviť výsledky z prvého riešenia v prostredí papiera a ceruzky. O dosiahnutých výsledkoch z oboch štandardizovaných testov nebola žiačka vopred informovaná a to z dôvodu možného ovplyvnenia jej myšlienkových krovok pri riešení problému.

Vybraná žiačka prípadovej štúdie riešila daný problém dvakrát za sebou. Najprv bez akejkoľvek pomoci či pomôcky (digitálneho obrazu kocky K či náčrtu na papieri). Našim cieľom bolo, aby sa žiačka spoliehala „iba“ na vlastnú tvorbu mentálnej predstavy a jej grafickú reprezentáciu na papieri. V priebehu druhého riešenia mala žiačka k dispozícii digitálnu 3D kocku K vytvorenú v programe GeoGebra (možnosť rotácie telesa, možnosť (ne)viditeľnosti telesa alebo jeho častí). Navyše, pre lepšiu orientáciu vo virtuálnom 3D priestore a hlavne pre konfrontáciu papierového 2D papierového náčrtu s 3D digitálnym obrazom, sme žiačke poskytli tzv. navigačný list. Navigačný list predstavuje prepojenie 2D a 3D priestoru obsahujúci nárys – alebo čelný pohľad – každej vertikálnej vrstvy kocky K , ktorá je postavená z malých jednotkových kociek. Všetky jednotkové kocky sú jednoznačne identifikovateľné podľa označenia písmenom a číslom (pozri obr. 4).

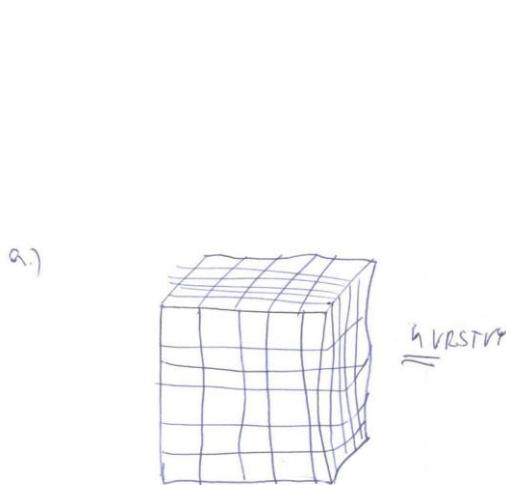
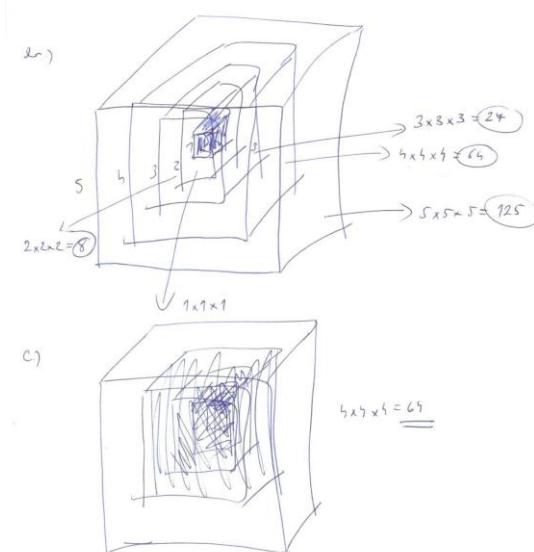


Obr. 4. Navigačný list

Očakávali sme, že žiačka bude hlavne pracovať s dynamickým modelom kocky K a navigačný list jej pomôže pri manipulácii s jednotkovými kockami na obrazovke počítača. Zamerali sme sa najmä na to, ako daný problém vyrieši v dvoch rôznych prostrediach (v papierovom a dynamickom) a na spôsob, akým bude opravovať svoje pôvodné riešenie na základe upravených mentálnych obrazov z druhého riešenia.

5.1 Prvé riešenie

V rámci prvého riešenia (riešenie v prostredí papiera a ceruzky) si žiačka na úvod takmer každej čiastkovej úlohy načrtla kocku K . Jedinou výnimkou bola otázka a), kde počet vrstiev kocky K určila „iba“ na základe svojho mentálneho obrazu. Kocku K (obr. 5) si načrtla až po zodpovedaní otázky a), avšak iba na potvrdenie si svojho riešenia. Hned’ ako si prečítala otázku (a), povedala: „Hmm ... počkajte chvíľu, prosím ...“ [Zavrela oči a pohla rukami v priestore pred sebou.] „Áno! ... Hmm.... Áno!“ [Otvorila oči.] „Viem presne, ako sú tieto kocky poukladané. Ale aj tak som si bola istá.“ [Nakreslila kocku s vyznačenými jednotkovými kockami ako je na obr. 5.] „Áno, áno. Existujú - jedna, dve, tri a štyri vrstvy.“ Nakoniec dodala: „Mimochodom, musím povedať, že takmer každú úlohu začнем riešiť kreslením. Je to moje východisko pri riešení matematických úloh.“

Obr. 5. Náčrt kocky K (a)Obr. 6. Náčrt kocky K (b) a (c)

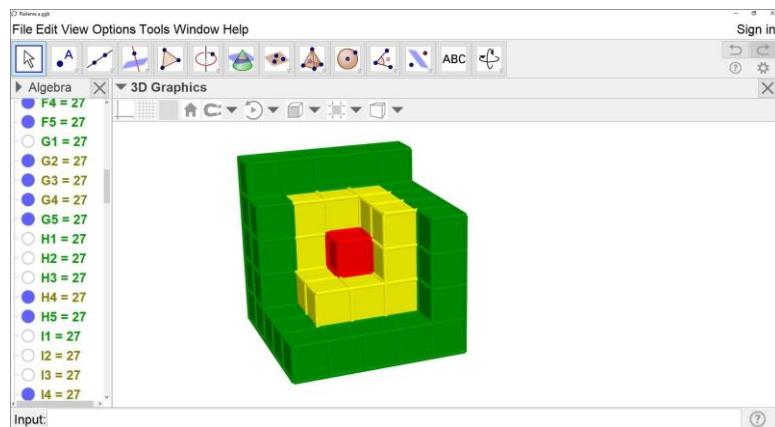
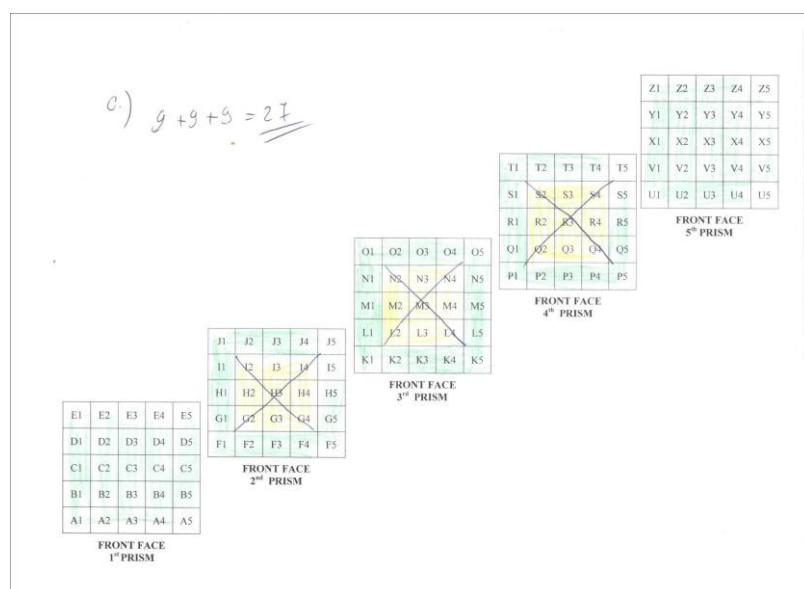
Žiačka načrtla kocku K v obvyklom pohľade, t. j. v náhľade sprava. Pri určovaní počtu jednotlivých vrstiev kocky K žiačka vychádzala z nesprávneho mentálneho obrazu, čoho dôsledkom sú aj ďalšie nesprávne náčrtky kocky K v otázkach b) a c) (obr. 6 (b) a 6 (c)). Chybou bolo, že nerobila (v mysli) kocku K , a tak neobjavila jej skrytú vnútornú štruktúru. Odrazom tohto nesprávneho uvažovania je jej nedostatočné vnímanie priestorových polôh a priestorových vzťahov (vytvorenie si nesprávneho obrazu vnútornej konfigurácie kocky K).

Všimli sme si, že žiačka vizuálnej skupiny s nízkou úrovňou priestorových schopností sa príliš spoliehala na zaužívanú vonkajšiu reprezentáciu kocky (náhľad sprava). Zhodnotili sme, že v prípade, ak si riešenie problému vyžadovalo použitie iba mentálnej reprezentácie (obrazu v mysli), problém nedokázala úspešne vyriešiť.

5.2 Druhé riešenie

V rámci druhého riešenia (riešenie v prostredí papiera a ceruzky v kombinácii s digitálnym prostredím) mala žiačka k dispozícii GeoGebra applet, v ktorom je možné otáčať kocku K a meniť viditeľnosť a zafarbenie jej jednotkových kociek. Okrem toho, pre lepšie identifikovanie skrytých časť kocky K a získanie pohľadu do jej vnútra, mohla žiačka použiť i navigačný list.

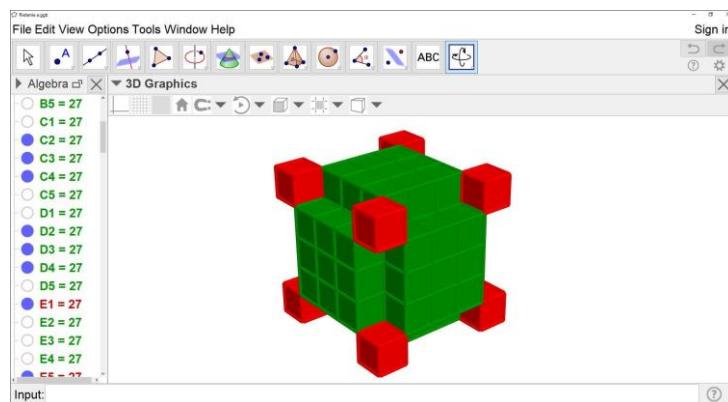
Na úvod druhého riešenia sa žiačka oboznámila s appletom metódou pokus-omyl. Zistila, ako ako pracovať s dynamický modelom kocky pri riešení problému (napr. otáčať, pohybovať a zväčšovať kocku K , skrývať alebo prefarbiť jej časti) a porozumela princípu práce s jednotlivými objektmi. Pri postupnom skrývaní jednotkových kociek kocky K vonkajšej vrstvy, odkryla jej skryté – predtým neviditeľné – vrstvy (obr. 7). Žiačka s prekvapením zistila, že jej pôvodná predstava (obr. 6) nebola správna: „Hmm ... toto je nesprávne, nie? Vo vnútri je málo jednotkových kociek. Prečo sú tu [na jednej hrane] len 3 a nie 4 malé kocky?“ Z tejto časti odpovede na otázku a) vidíme, že si žiačka uvedomila vytvorenie nesprávneho mentálneho obrazu v prvom riešení problému (po tom nastala zmena mentálneho obrazu). Dodala: „To znamená, že mám všetko zle!“ [Zavrela oči a rukami gestikulovala.] „Nie sú štyri, ale iba tri alebo dve vrstvy.“ [Žiačka otvorila oči a pohybovala prstom po obrazovke počítača a ukázala na kocku K .] „Toto je začiatok, stredná kocka [ukázala na strednú (červenú) kocku], ktorá bola zabalená do týchto malých kociek [ukázala na ďalšie (žlté) jednotkové kocky (obr. 7)], a potom sa tieto kocky zabali do týchto jednotkových kociek [ukázala na zelené kocky na obr. 7]. A to je všetko, existujú iba dve vrstvy.“

Obr. 7. Odkryté vnútro kocky K 

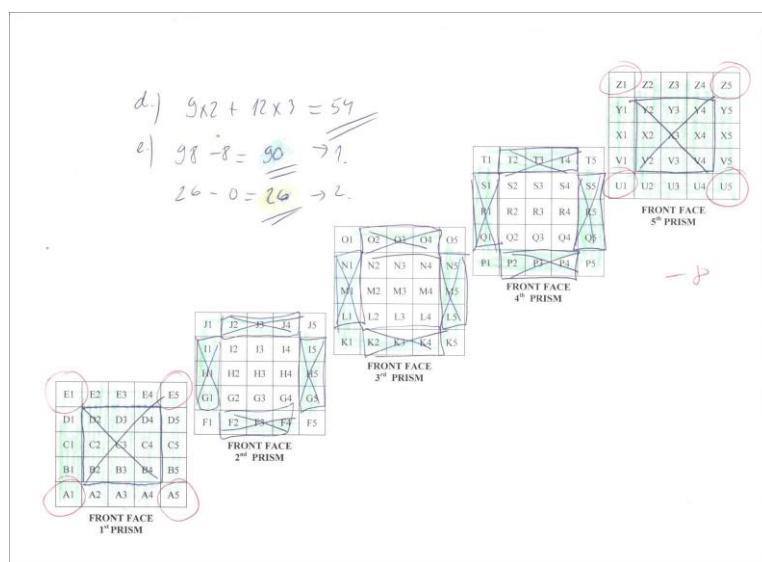
Obr. 8. Riešenie (a) a (b) v navigačnom liste

Vidíme, že si žiačka vytvorila nový mentálny obraz pre danú situáciu. Následne jej bol ponúknutý navigačný list s fixkami na vyznačenie kociek v ňom. Zafarbila štvorčeky reprezentujúce jednotkové kocky jednotlivých vrstiev rôznymi farbami (pozri obr. 8), a potom ich tiež farebne odlišila na dynamickom modeli. Táto skutočnosť potvrdzuje, že žiačka je schopná pracovať s dvoma rôznymi typmi (2D a 3D) reprezentácie kocky.

Hlavným cieľom kombinovaného použitia dynamického prostredia s 3D modelom kocky a navigačného listu s 2D zobrazovaním jej vrstiev bolo podporiť rozvoj priestorových schopností žiačky, u ktorej sa prejavil nedostatok týchto schopností (sú to schopnosti mentálnej rotácie a vnímanie priestorových pozícii a vzťahov) v klasickom riešení v prostredí papiera a ceruzky. Všimli sme si, že žiačka bola schopná tieto dve prostredia vzájomne prepojiť a správne odpovedať na otázky (a) a (b). Pri odpovedi na otázku (b) najprv spočítala koľko je jednotkových kociek v dynamickom prostredí s následným použitím navigačného listu. Po dôkladnom zorientovaní sa v oboch modeloch nemala problém odpovedať na otázku (c).



Obr. 9. Tvorba modelu k otázke (d) a (e)



Obr. 10. Využitie navigačného listu k otázkam (d) a (e)

V porovnaní s predchádzajúcimi otázkami pre našu participantku bola najťažšia otázka (d). Hoci pochopila, ktoré jednotkové kocky sa dotýkajú celou stenou s jednotkovými kockami

predchádzajúcej (vnútornej) vrstvy, mala problémy s ich vyznačovaním v navigačnom liste. Pri riešení tejto úlohy sa u nej najviac prejavila absencia schopnosti mentálnej rotácie a vnímania vzájomných polôh v priestore. K prelomu došlo až po priložení navigačného listu k obrazovke počítača (obr. 9) a porovnaní oboch vonkajších reprezentácií. Povedala: „Na každej stene je rovnaký počet kociek, ... toto [ukázala na jednotlivé vrstvy na navigačnom liste] musí dať spolu 9 jednotkových kociek.“ Hlavným cieľom tu bola podpora rozvoja uvedených schopností, orientovanie sa v 2D priemete a spájanie statického a dynamického obrazu. Žiačka nakoniec zodpovedala a vyriešila otázky (d) a (e) za súčasného používania navigačného listu (obr.10) a GeoGebra appletu.

6 Záver

V článku sme priblížili rôzne pohľady na pojem vizualizácia v matematike a potom špeciálne v priestorovej geometrii. V prípadovej štúdií sme pozorovali, ako žiačka druhého ročníka gymnázia s nízkou úrovňou priestorových schopností a preferenciou riešiť úlohy s vizuálnymi metódami rieši neštandardný problém o skrytých objektoch. Zamerali sme na jej jednotlivého kroky riešenia problému, rovnako v prostredí papiera a ceruzky, ako aj v následnom prostredí papiera a ceruzky v kombinácii s digitálnym prostredím. V rámci druhého riešenia došlo u žiačky ku korekcií prvotne vytvoreného mentálneho obrazu za pomoci dynamického modelu a navigačného listu. Navigačný list mal v našej prípadovej štúdií dvojakú rolu. Na jednej strane, žiačke pomohol zorientovať sa v priestore dynamického modelu v rámci všetkých úloh a) – e). Na druhej strane, výskumníkom poskytol záznam o jej korigovanom mentálnom obraze. Dá sa predpokladať, že navigačný list spolu s GeoGebra appletom predstavujú výbornú pomôcku pre žiakov, ktorí majú problémy s priestorovou orientáciou. Avšak táto domnenka si ešte vyžaduje širšie overenie v praxi.

Literatúra

- [1] BISHOP, A.J., Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. *Research in Education*, 9, 1973, s. 43 – 49.
- [2] PRESMEG, N. C., Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: A. Gutiérrez & P. Boero (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2006, ISBN 90-77874-19-4, s. 205-235.
- [3] PHILLIPS, L. M., NORRIS, S. R., MACNAB, J. S. *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education*.5. New York: Springer, 2010, ISBN 978-90-481-8815-4.
- [4] PEARSON, J., KOSSLYN, S. M., *The heterogeneity of mental Representation: Ending the imagery debate*, PNAS 112(33), s.10089–10092
- [5] VÁGOVÁ, R., *Úloha vizualizácie v rozvoji matematického myslenia*, Písomná práca k dizertačnej skúške, PFV UKF Nitra, 2018
- [6] DREYFUS, T., On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings of the 15th PME International Conference*, Vol. 1. USA: ERIC, 1991. ED 352 274, S. 33-48..
- [7] PRESMEG, N. C., The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation, Unpublished Ph. D. dissertation, England: Cambridge University, 1985.

- [8] YERUSHALMY, M., SHTERNBERG, B., GILEAD, S., Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. *Proceedings of the 23th PME International Conference*, Vol. 1. Haifa, Israel: ERIC, 1999. ISSN 0771-100X, s. 197-211.
- [9] PRESMEG, N. C., Visualisation in high school mathematics. In: *For the Learning of Mathematics*. ISSN 02280671, 1986, vol. 6, no. 3, s. 42-46.
- [10] GUTIÉRREZ, A., Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME International Conference*. Vol. 1. Panama City, Florida, 1996. SE 059 001, s. 3-19.
- [11] McGEE, M. G., Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*. ISSN 0033-2909, 1979, vol. 86, no. 5, s. 889-918.
- [12] GÓMEZ-CHACÓN, I. M., Affective pathways and visualization processes in mathematical learning within a computer environment. *Proceedings of the MAVI-18 Conference*. Unigrafia Oy, Helsinki, 2013. ISBN 978-952-5993-08-0, s. 287-301.
- [13] VÁGOVÁ, R., *Priestorová predstavivosť a vizualizácia objektov priestorovej geometrie v riešení problémov*, Rigorózna práca, UKF v Nitre, 2018.
- [14] STARMAN, A. B., The case study as a type of qualitative research, *Journal of Contemporary Educational Studies* 1, 2013, s. 28-43.
- [15] Yin, R. K., *Qualitative Research from Start to Finish*. The Guilford Press New York, 2011.
- [16] VÁGOVÁ, R., KMET'OVÁ, M., GeoGebra as a Tool to Improve Visual Image. In: *Acta Didactica Napocensia*, Vol. 12, No. 2, 2019, ISSN 2065-1430, s. 225-237.

Doc. RNDr. Mária Kmet'ová, PhD.

Katedra matematiky
FPV UKF Nitra
Trieda A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, SR
e-mail: mkmetova@ukf.sk

PaedDr. Renáta Vágová

Katedra matematiky
FPV UKF Nitra
Trieda A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, SR
e-mail: renata.vagova@ukf.sk

220 let Mongeovy Géométrie descriptive

Jakub Poruba, Věra Ferdiánová

Abstrakt

Před 220 lety vydal Gaspard Monge svou Géométrie descriptive, která byla po dlouhých patnáct let vojenským tajemstvím. Díky tomu je považován za otce deskriptivní geometrie, vynikal však také v dalších oblastech matematiky. Cílem článku je poukázat na jeho osobu a představit modely, které byly v rámci užití Mongeova promítání vytvořeny. Modely je možno vytvořit v „domácích podmínkách“ jen díky znalosti Mongeova promítání a GeoGebry.

Klúčové slová: Gaspard Monge, Mongeovo promítání, modely

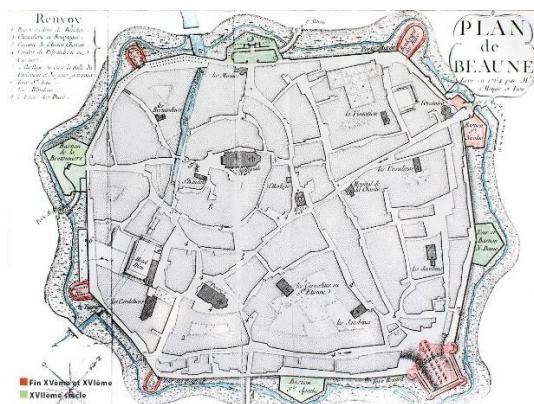
Abstract

220 years ago, Gaspard Monge published his Géométrie descriptive, which was a military secret for 15 years. Thus he is considered to be a father of Descriptive geometry, however, he excelled also in other areas of mathematics. The aim of this article is to point out his personality and introduce models that were created within the use of Monge projection. Models can be created in „home conditions“, only with knowledge of Monge projection itself and GeoGebra.

Keywords: Gaspard Monge, Monge projection, models

1 Gaspard Monge¹

Gaspard Monge se narodil 10. Května 1746 jako prvorodený syn do rodiny malého obchodníka v burgundském městě Beaune. V dětství vyrůstal se svými bratry Luisem a Jeanem, a i přesto, že pocházeli z poměrně skromných poměrů, rodiče se snažili synům získat dobré vzdělání. Monge nejprve studoval školu oratoristů, která se nacházela v rodném městě. Už tehdy jej učitelé označili za „zlatého žáka“ a vynikal svou pílí a intelektem. Ve čtrnácti letech zkonztruoval požární stříkačku, přičemž jeho nevšedních výsledků si všimli Oratoristé z Lyonu, kteří mu nabídli místo profesora fyziky v jeho 16 letech. Během letních prázdnin roku 1764 vytváří mapu města Beaune (Obr. 1) pomocí „ortogonální projekce“, jenž je uložena v archívnu městské Mongeově knihovně v Beaune.



Obr. 1. Mapa Beaune [4]

¹ Tato část byla sepsána z následujících zdrojů [1], [2], [3].

Během jeho krátkého působení v Lyonu dostává dopis od otce, který ho informoval, že rodinný přítel ho doporučil ke studiu na ženijní škole v Mézierés. Ženijní škola v Mézierés byla důstojnická škola pro mladíky, kteří měli šlechtický původ. V rámci této školy bylo zřízeno nižší oddělení pro chudší žáky, do kterého byl Monge přijat. Hanlivě mělo toto oddělení přezdívku „zednická lžíce“, jelikož povinností žáků bylo vytváření sádrových modelů pro taktická cvičení vyššího oddělení. Monge v rámci této práce mohl rozvíjet svou geometrickou představivost a vymyslet vlastní grafickou metodu, která mu urychlovala a zdokonalovala projektování děl, jenž nazval „géométrie descriptive“. Zajímavosti je, že se tato metoda stala vojenským tajemstvím a byla vyučována pouze ústně ve škole v Mézierés. Více jak 15 let nesmělo být nic zveřejněno a oficiálně publikováno. Gaspard Monge se stává v roce 1765 repetitorem a tři roky poté je jmenován profesorem matematiky.

V roce 1777 se žení s Catherine Huartovou, jenž pocházela z kovářské rodiny, takže Monge začal rozvíjet své znalosti z metalurgie. Do roku 1784 na škole v Mézierés vyučoval matematiku a fyziku. Škola každoročně vycvičila asi 20 vojenských inženýrů se specializací na opevnění. V dané době pracuje i na vědeckých pracích z diferenciální geometrie, variačního počtu a dalších, které prezentuje na půdě francouzské akademie věd (více viz. Dějiny matematiky). Přesouvá se do Paříže, kde je pověřen vedením katedry hydrauliky v Louvre a stává se učitelem námořních kadetů. Stále však nemůže písemně shrnout své poznatky z deskriptivní geometrie. Příchod velké francouzské revoluce (1789) poznamenal mnoho životů a změnil osudy mnoha lidí. Monge byl nadšenec a přiklonil se na stranu revolty. Následně byl v roce 1792 jmenován ministrem námořnictví, ale v následujícím roce podává demisi, která byla přijata až o dva měsíce později. Po krátké odmlce jej s dalšími odborníky povolávají jako ředitel ozbrojení a zásobování. Ve dne řeší problematiku zásobování a po nocích se venuje své práci o výrobě oceli a děl, jelikož využívá svých znalostí z metalurgie. Za vlády Robespierre byl Monge zbaven své funkce a musel utéci z Paříže, jelikož mu hrozilo vězení na základě udání jeho domovníka.

Po pádu Robespierrové krutovlády bylo cílem obnovit školství, jelikož většina škol byla uzavřena, učitelé popraveni. Dekretem z 30. 10. 1794 byla zřízena École Normale v Paříži, jež měla za úkol vyškolit učitele. V lednu 1795 Monge poprvé může vyučovat deskriptivní geometrii.



Obr. 2. G. Monge – studentská skica z hodiny [5]

Na přelomu roku 1799/1800 publikuje Géométrie descriptive, jenž je shrnutím jeho stenografických přednášek. Kniha je jedinečná a mimořádná svého druhu, která je rozdělena do pěti nenadepsaných částí na 132 stranách. Součástí je obrazová a tabulková příloha na dalších 25 stranách. První část popisuje úlohy a metody deskriptivní geometrie, následně Monge řeší elementární polohové a metrické úlohy v promítání na dvě průmětny. Druhá část je zaměřena především na konstrukce tečných rovin a normál oblých ploch, apod. Třetí část obsahuje řezy těles a průniky oblých ploch. Ve čtvrté části poukazuje na aplikační využití (vojenské, kamenické, tesařské a topografické problémy). Poslední část se zaměřuje na křivky a plochy s dvojí křivostí. V závěru autor uvádí úvahy a konstrukce na zborcených plochách, jeden praktický příklad z kamenořezu a mědiryTECTví. První čtyři části jsou dle Mongea vhodné pro žáky všech středních škol od 12 let, poslední, pátá pro studenty vyšších škol. Jeden z přepisů této knihy digitalizovala společnost Google na University of Michigan a například v roce 1996 bylo první vydání k dispozici v aukční síni. Svého anglického překladu se již kniha dočkala v roce 1809 a následně existují překlady v němčině, italštině, ruštině a španělštině.

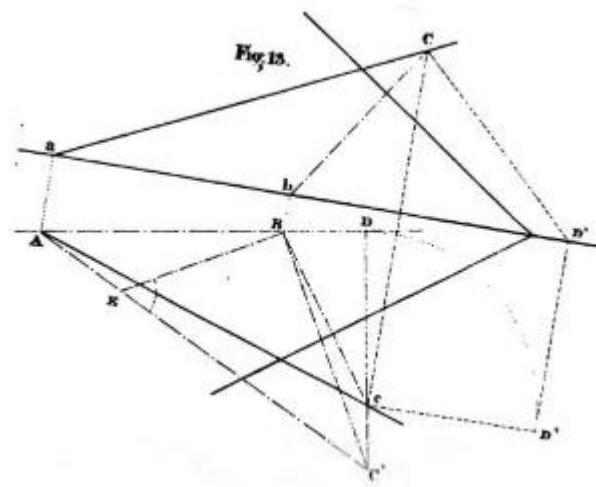


Obr. 3. Hrobka G. Monge na pařížském hřbitově Père-Lachaise

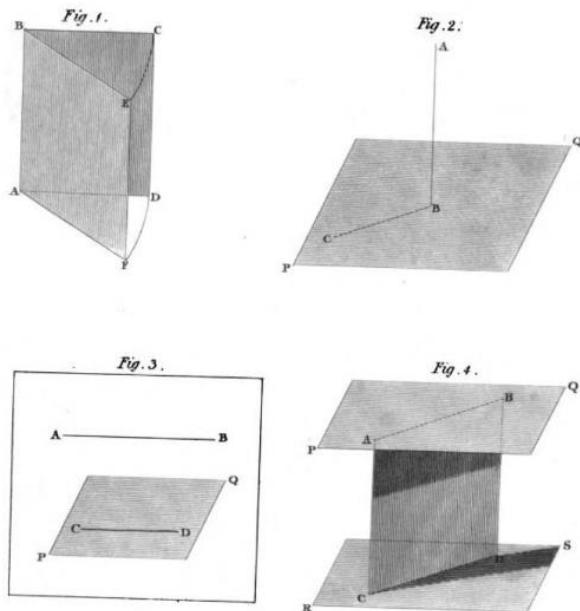
Ve stejné době jako École Normale vzniká další významná instituce a to École Polytechnique (École Centrale des Travaux Publics 1794), kde jedním ze zakladatelů je i samotný Monge. Škola byla primárně zaměřena na oblasti matematiky, fyziky a chemie. Studenti byli přijímáni na základě vědomostních kritérií a ne na základě původu. Tato univerzita je jednou z nejlepších univerzit v současné Evropě a její sláva je srovnatelná s americkou MIT. Z této instituce tři absolventi získali Nobelovu cenu a studovala ji řada významných osobností (Poncelet, Lagrange, ad.). Monge se velmi přátelil s Napoleonem Bonaparte, kterého znal ještě z dob, kdy byl ministrem námořnictva. Bonaparte nezapoměnl na vřelé přijetí od Mongea a proto jej pověřil i některými z úkolů nebo spolurealizovali výpravu do Egypta, ze které co 10 dní byli zaslány zápisny (Monge poprvé osvětlil fata Morganu). V rámci svého působení měl Monge dostatečné příjmy, takže například část svého platu věnoval na podporu chudých studentů na École polytechnique. Po nástupu Bourbonů mu byli sebrány profesorské tituly a na příkaz Ludvíka XVIII nebyl přijat do nové Akademie věd. Dne 18. 3. 1818 umírá v soukromí. Jelikož

studentům bylo přísně zakázáno navštívit jeho pohřeb, při nejbližší příležitosti v tajnosti položili na jeho hrob dubovou větev a vavřínový věnec.

Jedno z prvních pojednání v angličtině (*A Treatise on Descriptive Geometry*, 1821) o deskriptivní geometrii zajistil Mongeho žák, Claude Crozet, který získané vědomosti sepsal a vyučoval v USA na nově založené vojenské škole West Point. Přímo v úvodu autor uvádí poděkování a upřesňuje, že metoda není nová, ale byla objevena francouzským matematikem Gasparem Mongem. Kniha v anglických zemích byla dlouho opomíjena a Britové místo toho využívali jiné knihy o ortogonální projekci. Například Peter Nicholson se označoval za architekta a matematika, je pozoruhodné, jak popsal promítání ve své knize *Treatise on stone-cutting* (1828) nebo *Treatise on Projection* (1840). Britové tuto techniku pojmenovali jako „British system of orthographic projection“. Zajímavé je, že promítání bylo několikrát znova publikováno v dílech Binse a Bradleyho bez odkazu na původní autory.



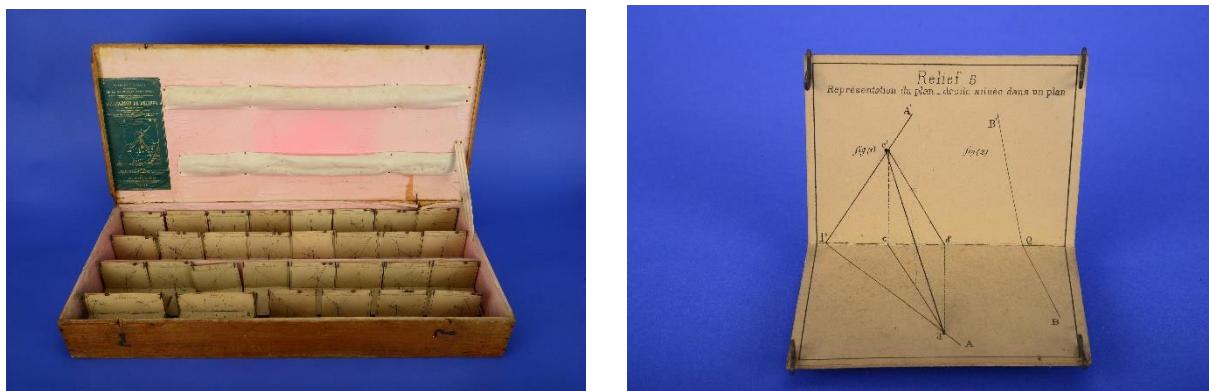
Obr. 4. Ukázka z knihy *A Treatise on Descriptive geometry* (C. Crozet) [6]



Obr. 5. Ukázka z knihy *A popular and practical treatise on masonry and stone-cutting* (P. Nicholson) [7]

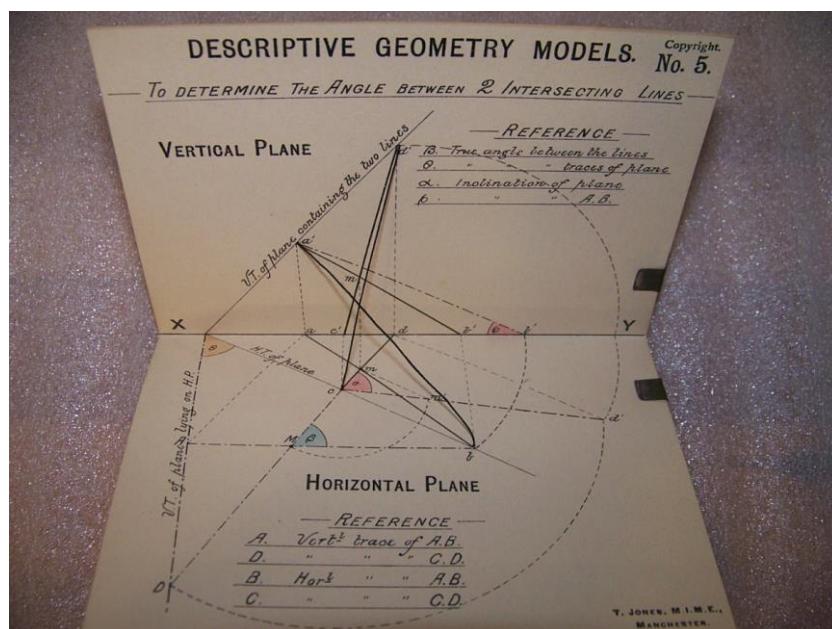
2 Historické modely pro Mongeovo promítání

Jednou z prvních modelů pro Mongeovo promítání vytvořil francouzský učitel M. Jullien, který působil na Lycee Sainte-Bartie v Paříži. V rámci své činnosti napsal učebnici *Cours élémentaire de géométrie descriptive* (třetí vydání je k dispozici na Google Books), ke které vytvořil sérii modelů. Jednalo se o modern didaktickou pomůcku, která předchila svou dobu. K dispozici bylo 30 modelů s příručkou ve dřevěné truhle, jenž byla vypolstrována růžovým a běžovým saténem. Přímka v prostoru byla zobrazena pomocí stužky, jednotlivé modely byly upevněny ve speciální L-kové konstrukci. Jullienovy modely v roce 1873 získali prestižní ocenění na vědecké výstavě ve Vídni.



Obr. 6. Modely M. Jullien, [8]

V roce 1893 si učitelé mohli zakoupit speciální box s 12 základními modely pro Mongeovo promítání od Thomase Jonesa, který se jmenuje *Descriptive Geometry Models for the use of students in schools and colleges*. Modely byly vytvořeny z tvrdého papíru a přímky v prostoru byly z provázku, v boxu se nacházely i speciální kovové L-kové profily, který model fixovali pod pravým úhlem. Zajímavostí je, že výukové modely stály $\frac{1}{3}$ net, [10].



Obr. 7. Modely T. Jones, [9]

3 Princip Mongeova promítání a tvorba modelů²

Mongeovo promítání pracuje se dvěma pohledy na zobrazovaný objekt – shora (půdorys) a zepředu (nárys). Je definováno jako pravoúhlé (rovnoběžné) promítání na dvě navzájem k sobě kolmé průmětny – půdorysnu a nárysnu. Jedná se o zobrazení, které jednoznačně transformuje trojrozměrný objekt na dvourozměrný nákres v podobě sdruženého půdorysu a nárysu. To znamená, že každý vzor v prostoru má jednoznačně přiřazený obraz v rovině. Díky tomu je možno řešit úlohy týkající se trojrozměrných tvarů, velikostí a vzájemné polohy v rovině poměrně jednoduše, avšak na úkor dobré názornosti, protože je občas složité umět se zorientovat ve dvou pohledech na jeden objekt. V základu pracuje se čtyřmi geometrickými prvky - bodem, přímkou, křivkou a rovinou. Dále zejména využívá následující konstrukční postupy - zobrazení přímky, bodu, roviny, křivky, hlavní spádové přímky roviny, průsečnice dvou rovin, průsečík přímky a roviny, osová afinita a otáčení, kolineace.

Jak je zmíněno výše, Mongeovo promítání se může potýkat s horší názorností, proto jsme se rozhodli vytvořit sadu trojrozměrných modelů k praktické demonstraci základních úloh. V první fázi byly vytvořeny zejména základní úlohy, v druhé fázi poté tělesa a jejich řezy (vybraná hranatá a oblá tělesa včetně platonských i archimédovských). Tyto modely a řezy byly vytvořeny v programu GeoGebra a následně exportovány do programu LATEX. Protože obsahují i papírový 3D model, byly následující úlohy vytvořeny tak, aby z důvodu názornosti splňovaly tato kritéria:

- body těles leží v I. kvadrantu,
- tělesa musí být v rámci zobrazování co nejvíce viditelné,
- tělesa musí mít vhodně zvolenou polohu k zobrazení.

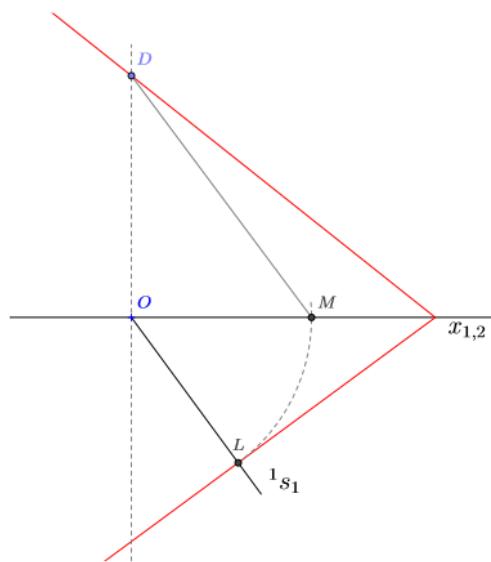
Konstrukce modelu jako takového vyžaduje několik kroků, u nichž je hlavním předpokladem samotná znalost Mongeova promítání, bez nějž by modely nešlo sestrojit. Dále je také nutno uvědomit si, kolik částí na model potřebujeme (minimálně dvě - samotný rys a „vlep“ zobrazující reálnou situaci, s rostoucí složitostí úloh však počet částí roste).

Tvorbu modelu začneme samotným vytvořením rysu podle zádání a pravidel Mongeova promítání. Ten slouží jako „podklad“, do kterého dále přidáváme zobrazované objekty ve skutečné velikosti. Dále záleží na typu úlohy. Jedná-li se o zobrazení geometrického útvaru (v jakémkoliv podobě), je nutno vytvořit síť daného tělesa s využitím sklopení požadovaných rozměrů do půdorysný či nárysny, abychom získali skutečnou velikost daného útvaru. Jestliže v úloze pracujeme s rovinami, je dále nutno vytvořit skutečnou velikost části dané roviny. Tato část konstrukce bývá většinou nejsložitější, protože se však Mongeovo promítání definuje jako kolmá projekce na dvě kolmé roviny, stačí nám k této konstrukci využít vlastnosti Pythagorovy věty. Provádí se tedy následovně:

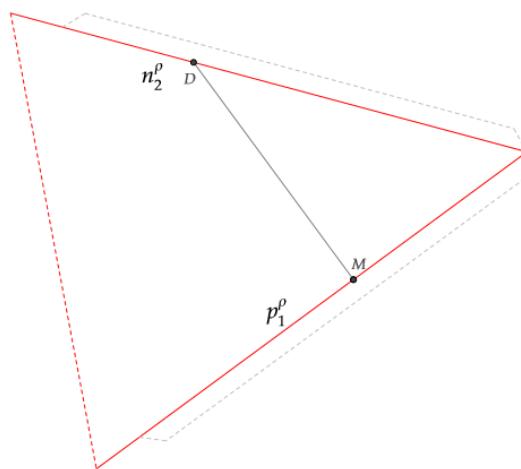
Ke zjištění skutečné velikosti části roviny využijeme její spádovou přímku. Nejdříve musíme zjistit její skutečnou velikost, resp. skutečnou velikost části spádové přímky. Tu zjistíme využitím Pythagorovy věty (viz obr. 8 a 9). Úsečky OL a DM budou odvěsný. Bod M získáme otočením bodu L na základnici z půdorysné stopy roviny. V trojúhelníku OLM představuje úsečka OM, která je přeponou trojúhelníku, danou skutečnou velikost vymezené části spádové přímky, kterou vymezují stopy roviny.

² Tato část byla vytvořena na základě [11], [12].

Část roviny potom zobrazíme tak, že na úsečku, jejíž délka odpovídá délce půdorysné stopy, naneseme od krajního bodu úsečky (v tomto případě z její pravé strany) vzdálenost bodu L. Tímto bodem vedeme kolmici k výše zmíněné úsečce a na tuto kolmici od bodu L naneseme úsečku DM. Zvoleným počátkem úsečky a bodem D proložíme úsečku o délce odpovídající délce nárysne stopy. Tím vznikne požadovaná „skutečná“ část roviny. Nakonec dorysujeme značky pro vlepení. Analogicky na rovinu přeneseme i potřebné body.



Obr. 8. Zjištění skutečné velikosti části roviny

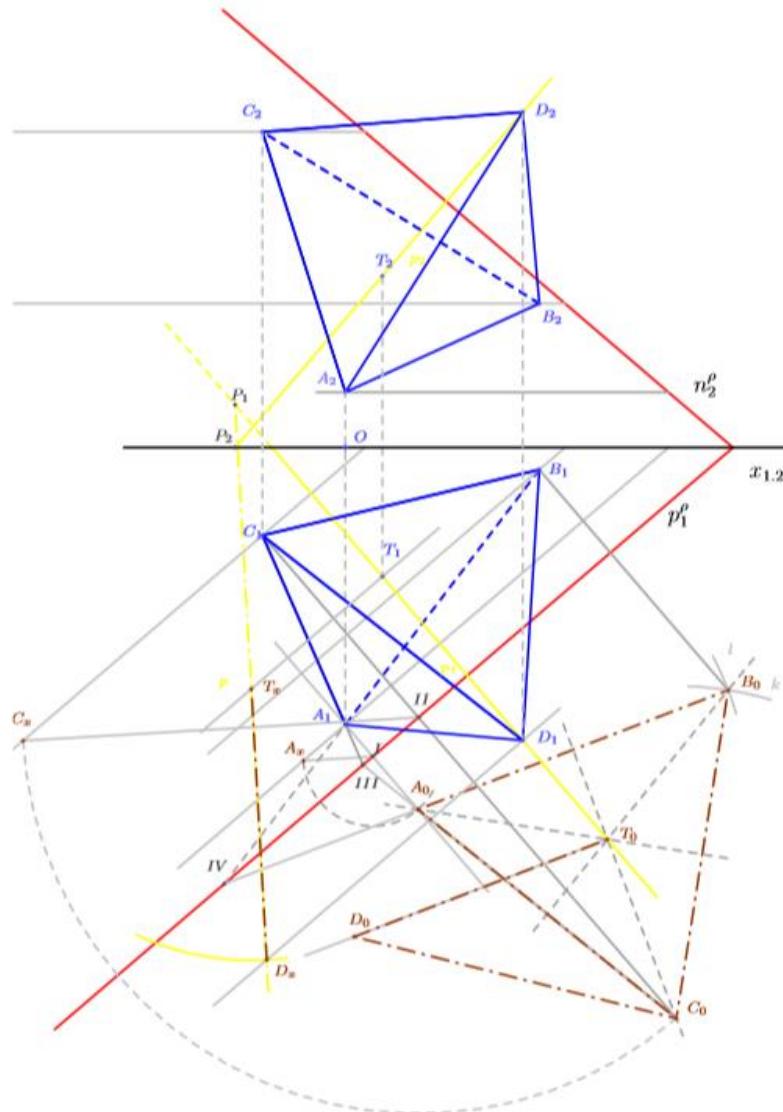


Obr. 9. Zjištění skutečné velikosti části roviny – rovinný vlep

Pokud v příslušné rovině potřebujeme vytvořit určité „výrezy“, např. znázorňující řez tělesa, pak je do této roviny přenesene opět s využitím sklopení do půdorysny či nárysny. V posledním kroku vytvoříme „vlepové značky“ jak v rysu, tak v částech, které budeme do rysu vlepovat. Potřebné části vytiskneme, vyřízneme a slepíme dohromady. Konkrétní postup tvorby modelů (I se stručným popisem konstrukce) zobrazují následující dvě úlohy, na konci článku jsou přiloženy vyřízené části, z nichž se model skládá.

3.1 Zobrazení pravidelného čtyřstěnu

Zobrazte pravidelný čtyřstěn $ABCD$, který leží podstavou v rovině $\rho(7;6;6)$, jsou-li dány body podstavy $A = [0;5;?]$, $C = [-1,5;?;5,7]$. Polohu bodů B a D zvolte tak, aby platilo, že $x_C < x_A$ a $z_D > z_C$.



Obr. 10. Zobrazení čtyřstěnu

- **Postup zobrazení podstavy**

Využijeme principy konstrukce základních prvků; nejdříve pomocí hlavní přímky I. osnovy nalezneme nárysny průmět A_2 bodu A a půdorysný obraz C_1 bodu C . Dále využijeme otáčení a osové afinity. Otočením zjistíme polohu A_0 , C_0 . V dalším kroku musíme vyrýsovat podstavu čtyřstěnu ve skutečné velikosti. Protože již známe skutečnou velikost strany AC a vzhledem k tomu, že pravidelný čtyřstěn tvoří čtyři rovnostranné trojúhelníky, nalezneme obraz bodu B_0 pomocí kružnic k , l s ohledem na stanovenou podmíinku. Nakonec otočením nalezneme v půdorysně polohu půdorysného obrazu bodu B_1 a pomocí hlavní přímky I. osnovy a ordinály nalezneme sdružený průmět B_2 . Nakonec nalezneme střed podstavy, který je zároveň i těžištěm, a označíme T .

- **Zobrazení výšky čtyřstěnu**

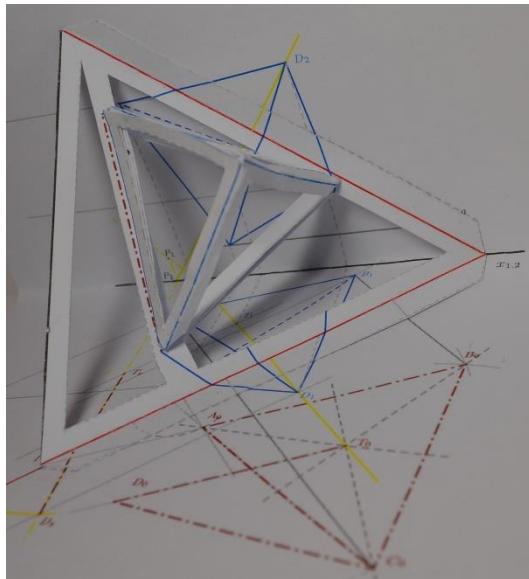
Protože podstava leží v rovině ρ a je to pravidelný čtyřstěn, bude vrchol D ležet na přímce p , která zároveň prochází bodem T podstavy a je kolmá na rovinu. Výšku pravidelného čtyřstěnu zjistíme tak, že ve sklopeném obrazu podstavy sestrojíme kolmici na osu strany podstavy (např. A_0B_0), která prochází středem podstavy, bodem T_0 . V dalším kroku sestrojíme kružnice se středem v C_0 o poloměru délky hrany. Získáme bod D_0 a velikost úsečky D_0T_0 představuje výšku tohoto čtyřstěnu. V posledním kroku sklopíme přímku a naneseme na ni velikost $|D_0T_0|$ od sklopeného bodu T_x . Poté zobrazíme získaný bod D_x ve sklopení do půdorysu a nárys.

- **Viditelnost**

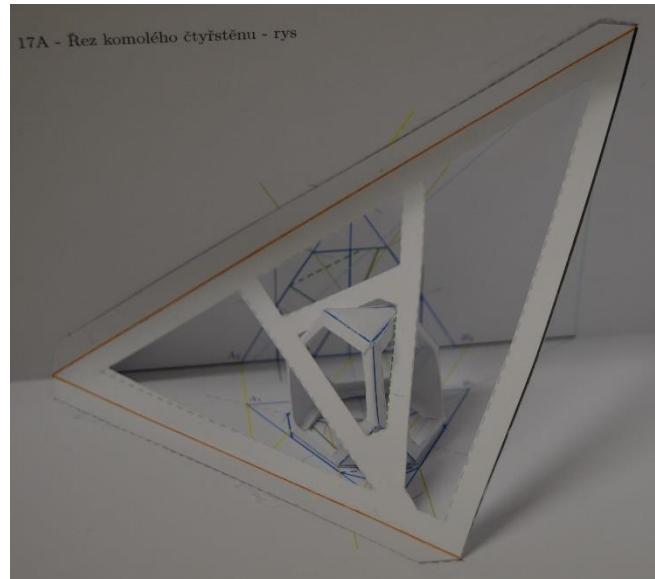
Spojením vrcholů získáme čtyřstěn. Na základě pravidel pro viditelnost nebude viditelný půdorysný obraz hrany A_1B_1 , v nárys pak obraz hrany B_2C_2 .

- **Tvorba modelu a jeho sestavení**

Rysy a vlepy na sestavení modelu se nacházejí v příloze (1A, 1B a 1C). Do rysu vlepíme na příslušná místa rovinu s vyříznutými šedě ohrazenými útvary a na ni vlepíme do hnědě ohrazeného prostoru čtyřstěn. Síť čtyřstěnu sestrojíme s využitím otočeného obrazu strany.



Obr. 11. Model čtyřstěnu



Obr. 12. Model řezu komolého čtyřstěnu

3.2 Řez komolým čtyřstěnem

Sestrojte řez komolým čtyřstěnem rovinou $\alpha(-3; 3; 2)$, když podstava pravidelného čtyřstěnu leží v půdorysně a známe souřadnice vrcholů pravidelného čtyřstěnu $A = [2; 2; 0]$, $B = [8; 2; 0]$.

Platí, že $y_A < y_C < y_B$. Míra odseknutí je $\frac{1}{3}$.

- **Sestrojení komolého čtyřstěnu**

Využijeme znalostí konstrukce základních prvků; díky tomu, že podstava leží v půdorysně, zobrazí se hrana čtyřstěnu ve skutečné velikosti.

- **Řez komolého čtyřstěnu**

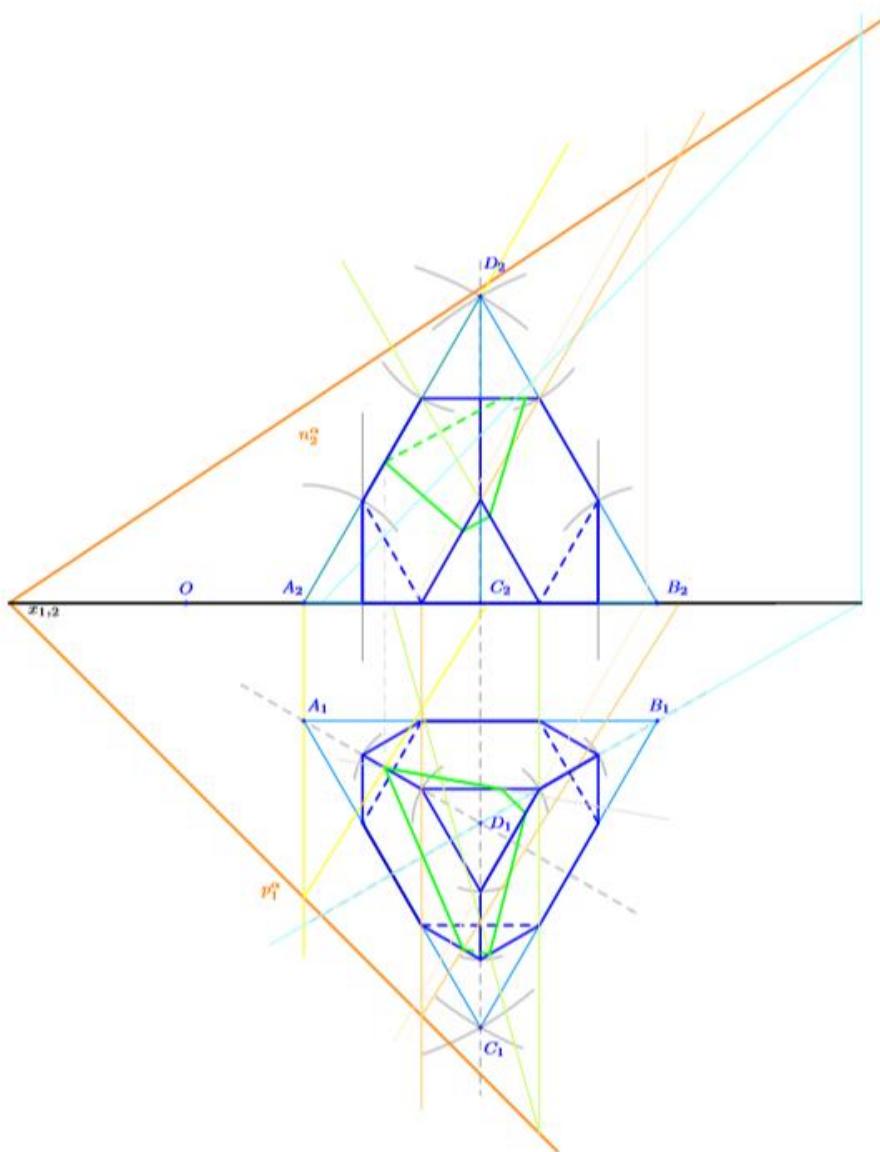
Viz předcházející úlohy; opět budeme prokládat hrany rovinami kolmými k některé ze zobrazovacích rovin a nalezneme body řezu jako průsečíky dané hrany a průsečnice roviny řezu s prokládanou rovinou.

- **Viditelnost**

Podle pravidel viditelnosti nebudou viditelné hrany v nárysuvě stěně A2B2D2 řídícího čtyřstěnu a v půdorysu potom nebude viditelná přední stěna.

- **Tvorba modelu a jeho sestavení**

Rysy a vlepy na sestavení modelu se nacházejí v příloze (2A , 2B a 2C). Do rysu vložíme na půdorysný obraz komolého čtyřstěnu sestavený model a nakonec přilepíme na příslušná místa vyřezanou rovinu řezu včetně vyříznutého zeleně vyznačeného řezu. Síť komolého čtyřstěnu sestrojíme s využitím půdorysného obrazu komolého čtyřstěnu.



Obr. 13. Zobrazení řezu komolého čtyřstěnu

4 Závěr

Mongeovo promítání je i v dnešní době stále aktuální, neboť se pořád vyučuje na gymnáziích, středních průmyslových školách a vysokých školách. Námi představené modely mohou mít dvojí funkci – jednak mohou posloužit jako názorná demonstrace zobrazovaného problému, ale také díky tomu, že všechny součásti jsou vyrysvány a zobrazeny ve skutečné velikosti, mohou posloužit jako kontrolní prvek pro ověření správnosti rysu – pokud je rys správný, pak do něj musí „pasovat“ vlepy modelů.

5 Poděkování

Článek byl podpořen z projektu SGS01/PřF/2018-2019 Numbers, Geometry and Physics.

Literatúra

- [1] ČIŽMÁR, J., *Dějiny matematiky*. Perfekt, 2017. 896 s. 978-80-8046-829-3.
- [2] LAWRENCE, S. *History of Descriptive Geometry in England*. In Proceedings of the First International Congress on Construction History, Madrid, 20th-24th January 2003, d. S. Huerta, Madrid: I. Juande Herrera, SEdHC, ETSAM, A. E. Benvenuto, COAM, F. Dragados, 2003. pg. 1269-1281.
- [3] KVĚTOŇOVÁ, B., *Gaspard Monge a deskriptivní geometrie*. In: Pokroky matematiky, fyzika a astronomie. vol. 41 (1996), issue 5, pp. 256-261. 0032-2423.
- [4] *Mapa Beaune*. Plan de la ville: la couleur rouge indique les bâtimens construits fin du 15^{eme} et 16^{eme} si`ecles. [online]. cit[2019-11-24]. Available from: <http://www.rempartsbeaune.fr/histoire-des-remparts-de-beaune/>
- [5] *Gaspard Monge*. [online]. cit[2019-11-26]. Available from: virtual.upc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Revolucion.asp.htm.
- [6] Ukázka z knihy: *A Treatise on Descriptive Geometry*. Crozet, C. A Treatise on Descriptive Geometry: For the Use of the Cadets of the United States Military Academy. 1821. [online]. cit[2019-12-01]. Dostupné z: <https://archive.org/details/atreatiseondesc00crozgoog/page/n46> a).
- [7] Ukázka z knihy: *A popular and practical treatise on masonry and stone-cutting*. Nicholson, P. A popular and practical treatise on masonry and stone-cutting. 1828. [online]. cit[2019-12-01]. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=vZcwqkOadIC&printsec=frontcover&hl=cs&source=gbsgesummaryrcad=0&v=onepage&qf=false>
- [8] *Mathematical Treasure: Jullien Models for Descriptive Geometry*. Convergence: June 2016. quoted. [2019-11-24]. Available from: <http://americanhistory.si.edu/collections/object-groups/geometric-models-jullien-models-for-descriptive-geometry>
- [9] *Descriptive Geometry Models: To determine the angle between 2 intersecting lines*. quoted [2019-11-22]. Dostupné z: <https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/71E9C7as9WL.jpg>

- [10] FERDIÁNOVÁ, V., PORUBA, J., Construction of Special 3D Models for Monge Projection. In Proceedings, 18th Conference of Applied Mathematics Aplimath 2019. 1st edition. Bratislava: Slovak university of technology in Bratislava, 2019. p. 292-303. 978-80-227-4884-1.
- [11] PORUBA, J., *Geometrické útvary v Mongeově promítání*. Ostrava: 2016. Bakalářská práce. Ostravská univerzita v Ostravě, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Mgr. Věra Ferdiánová, Ph.D.
- [12] PORUBA, J., *Tělesa v Mongeově promítání*. Ostrava: 2018. Diplomová práce. Ostravská univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Mgr. Věra Ferdiánová, Ph.D.

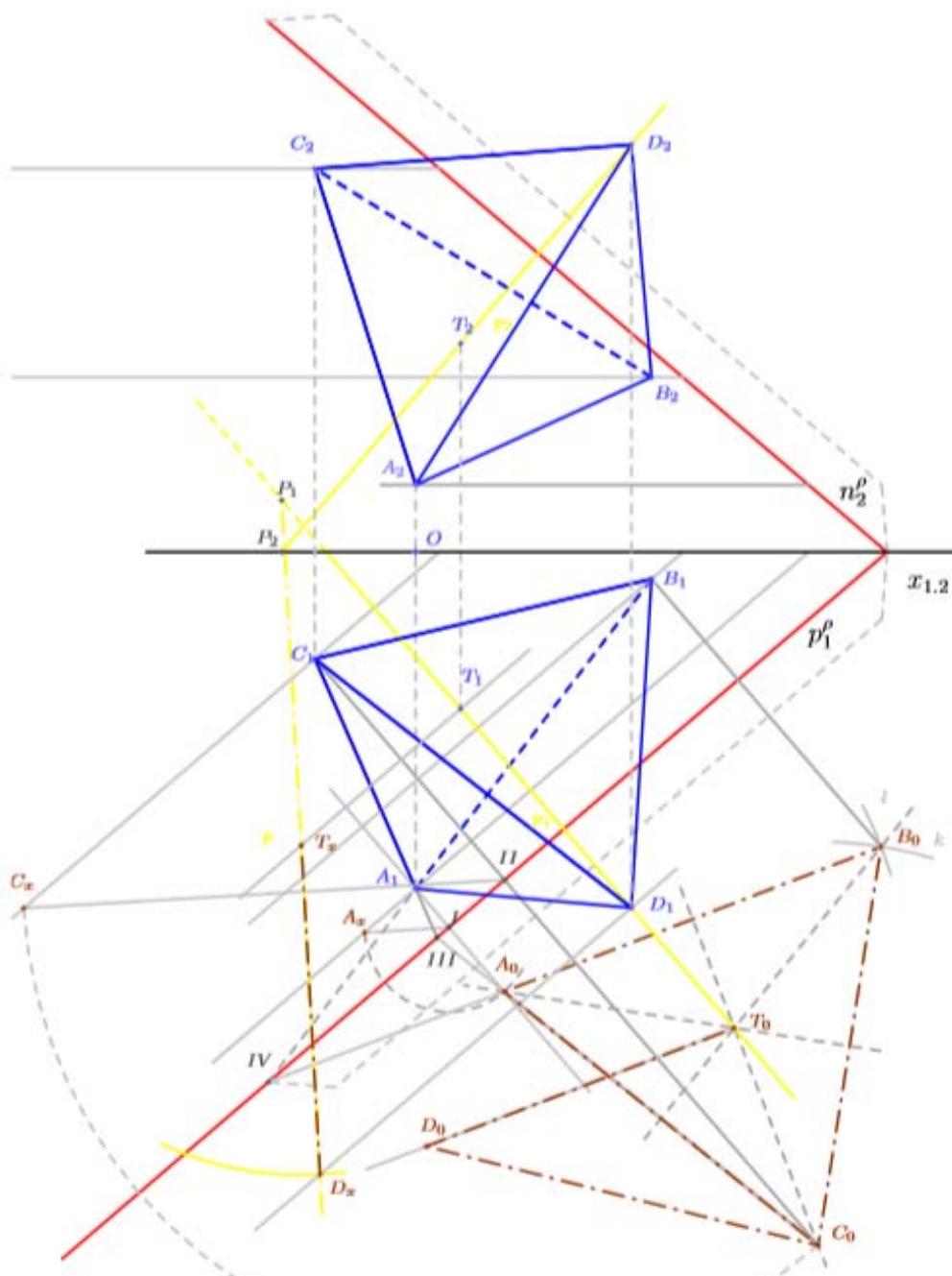
Mgr. Bc. Jakub Poruba, PhD.

Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
30. dubna 22, 701 03 Ostrava, Česká republika
e-mail: jakub.poruba@osu.cz

Mgr. Věra Ferdiánová, Ph.D.

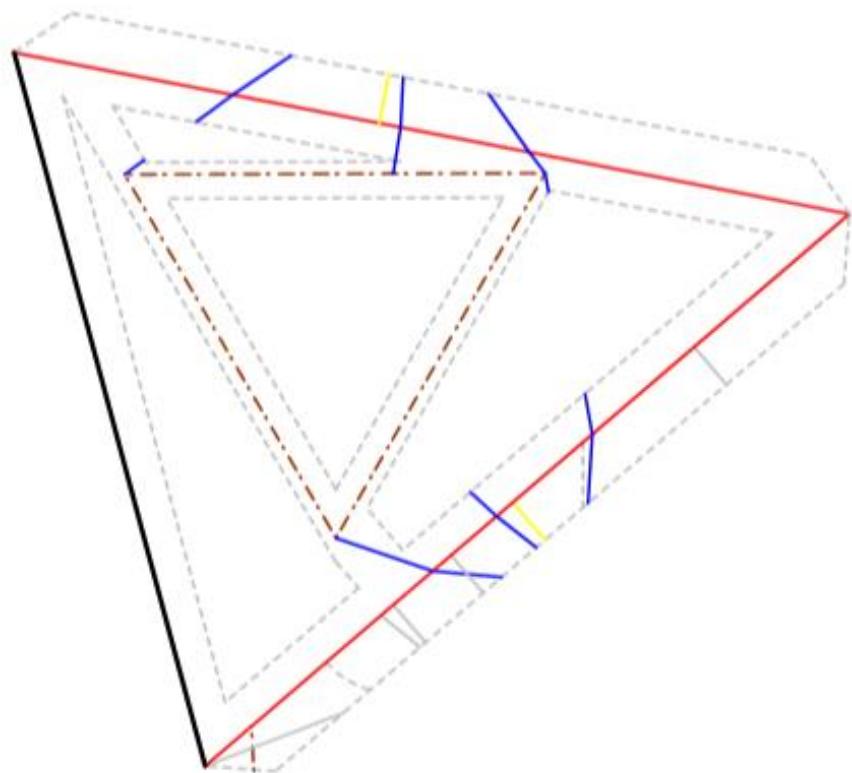
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
30. dubna 22, 701 03 Ostrava, Česká republika
e-mail: vera.ferdianova@osu.cz

PŘÍLOHA 1A
ZOBRAZENÍ ČTYŘSTĚNU – RYS



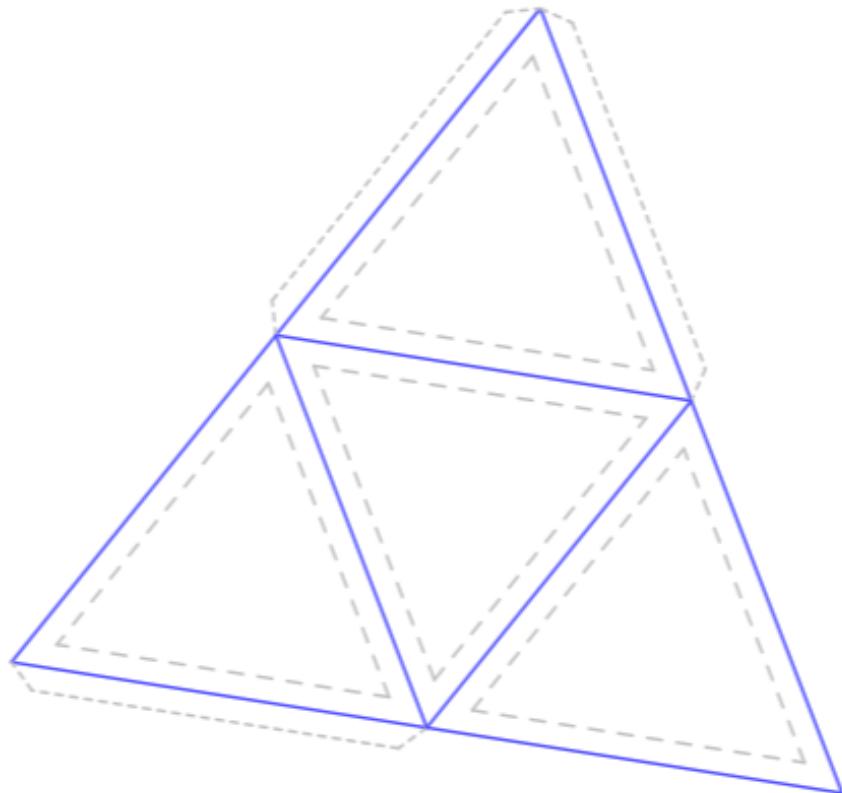
PŘÍLOHA 1B

ZOBRAZENÍ ČTYŘSTĚNU – RYS – ROVINA VLEPU

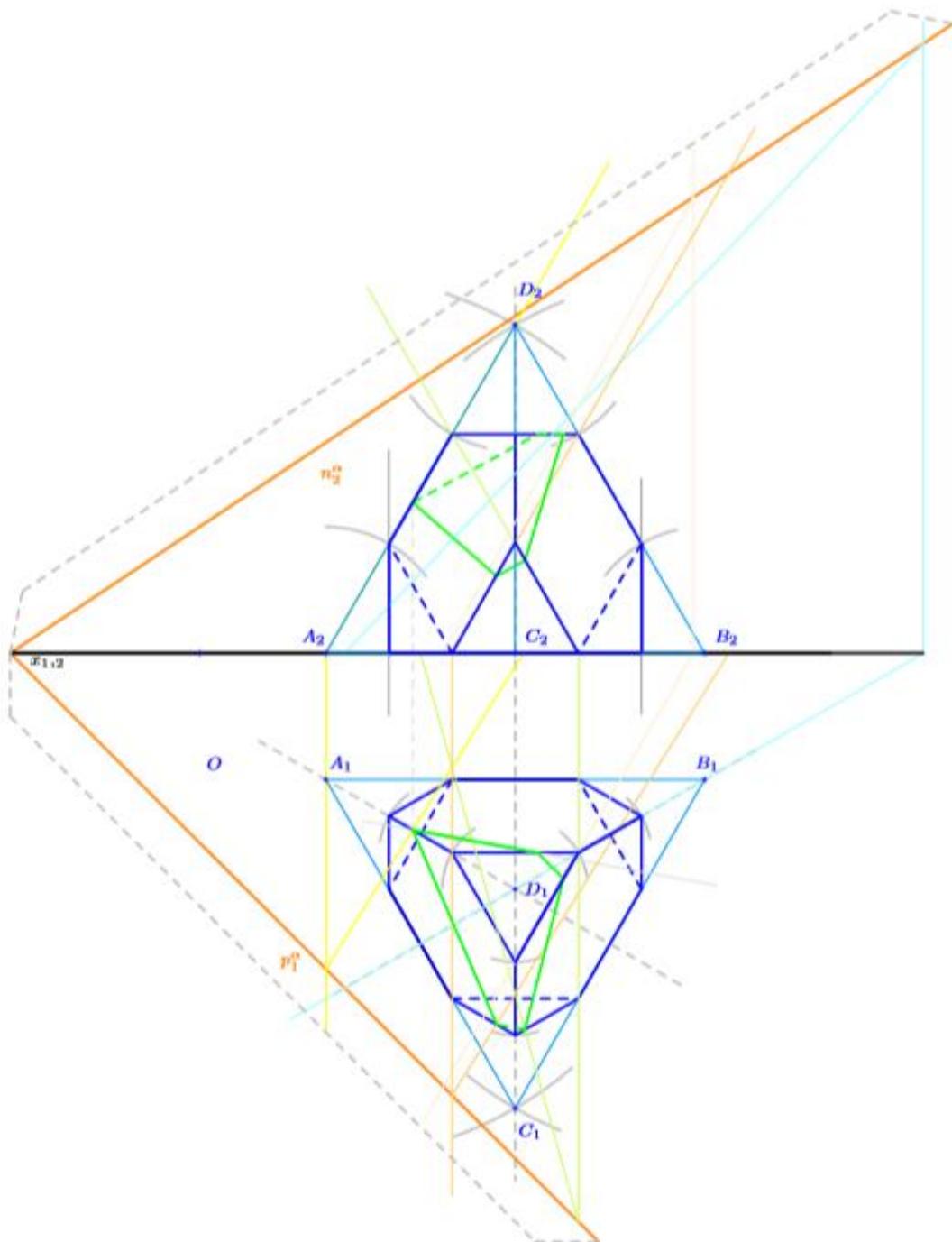


PŘÍLOHA 1C

SÍŤ ČTYŘSTĚNU

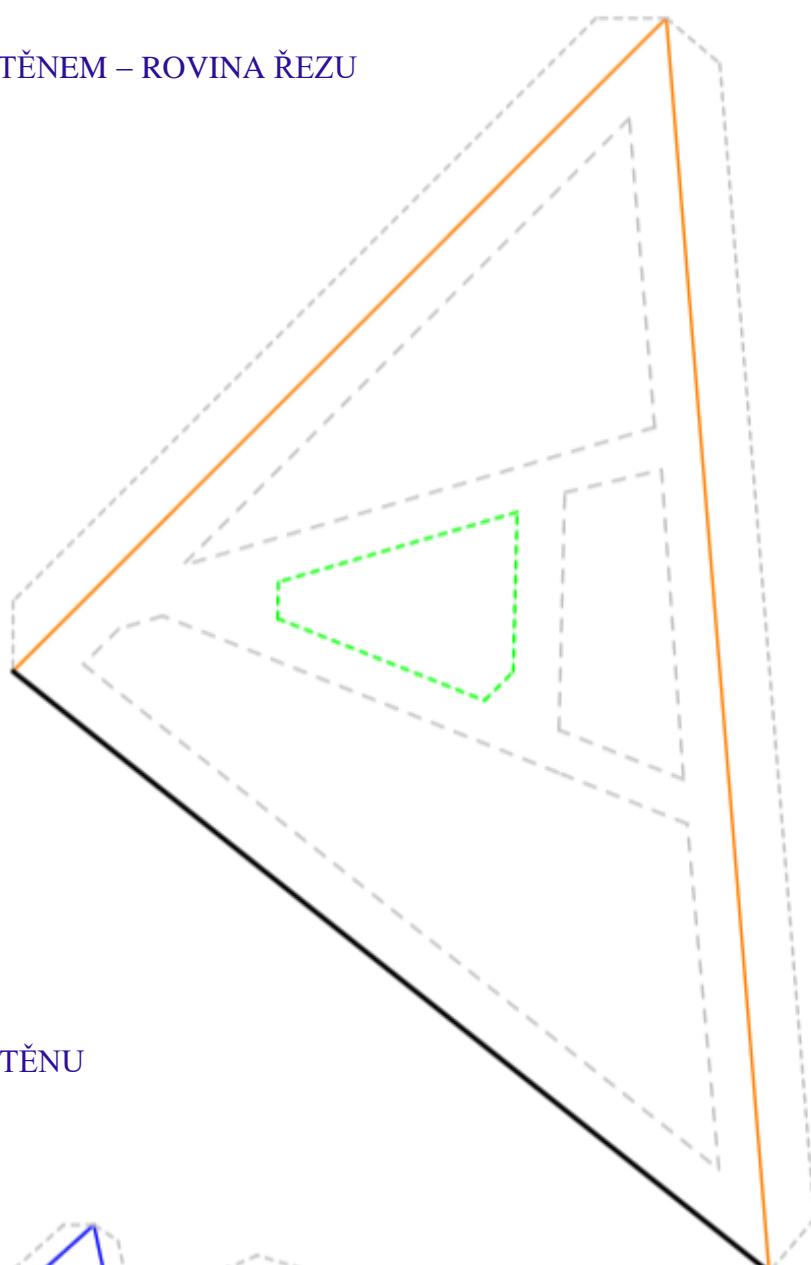


PŘÍLOHA 2A
ŘEZ KOMOLÉHO ČTYŘSTĚNU – RYS



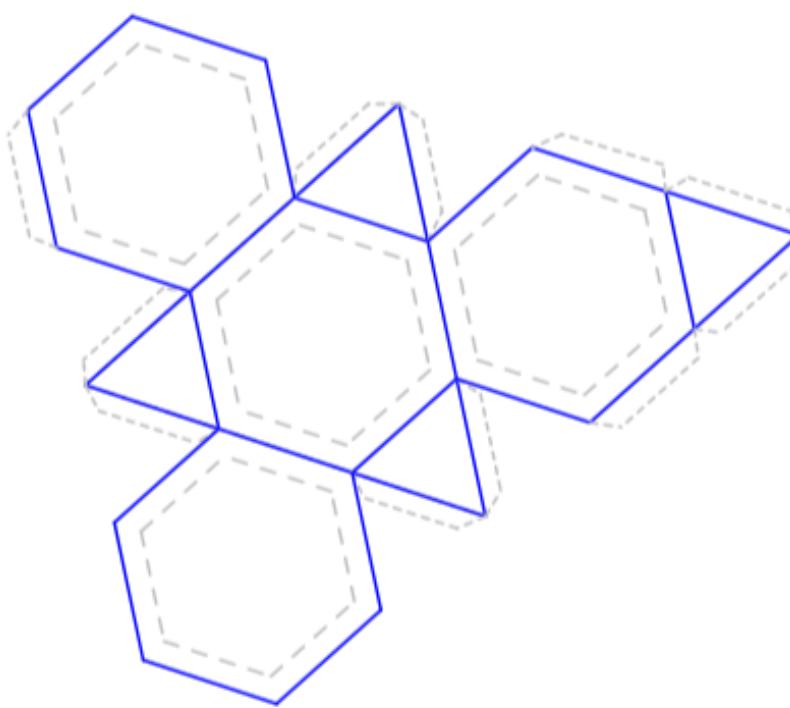
PŘÍLOHA 2B

ŘEZ KOMOLÝM ČTYŘSTĚNEM – ROVINA ŘEZU



PŘÍLOHA 2C

SÍŤ KOMOLÉHO ČTYŘSTĚNU



From the triangle to tetrahedrons, simplices and polytopes

Gunter Weiss

Abstrakt

Zovšeobecnením mnohostenov do vyšších dimenzíí sú polytopy, tak ako sú mnohosteny zovšeobecnením mnohouholníkov do trojrozmerného priestoru. Analógia špecifických vlastností trojuholníkov (pozri [9]), aplikovaná na štvorsteny a simplexy vo vyšších dimensiach poskytuje bohatý priestor na štúdium a množstvo otvorených otázok. Tento článok chce ukázať niektoré aspekty elementárnej geometrie štvorstenov a simplexov, preto v ňom štvorsteny so zhodnými stenami, nazývané pravidelné štvorsteny, zohrávajú podstatnú úlohu.

Kľúčové slová: štvorsten, simplex, stred trojuholníka, pravidelný štvorsten

Abstract

Polytopes are generalisations of polyhedrons with respect to the dimension, the latter generalising polygons to three dimensions. Especially for tetrahedrons and simplices translations of remarkable triangle properties (see [9]) to higher dimensions provide a rich playground for research and many open questions. This article is an attempt to show some aspects of elementary geometry of tetrahedrons and simplices. Thereby tetrahedrons with congruent face triangles, so-called equifaced tetrahedrons, will play an outstanding role.

Keywords: terahedron, simplex, triangle centre, equifaced tetrahedron

1 Introduction

Properties of polyhedrons or polytopes are either of projective geometric or of affine nature or their proper place of action is a metric space. An example for a projective geometric property is a pair of perspective k -simplices, which reveal additional “remarkable points and lines”, c.f. [14]. Examples of affine geometric properties are e.g. affine regularity or the centroid of a (convex) polytope, understood as the set of its vertices or as a solid. The centroids of lower dimensional “skins” of a polytope, e.g. of its edges or 2-faces, are e.g. metric properties.

Usually one connects planar faces to a polyhedron, but patches of minimal surfaces or of hyperbolic paraboloids are possible, too. If the place of action is the 3D-Möbius space, edges and faces of a Möbius-polyhedron would be circular arcs resp. spherical patches. Sets of such polyhedrons occur e.g. in foam, see [11].

Here we focus on tetrahedrons and simplices in the usual sense with linear subspaces as faces, and we translate some elementary geometric “remarkable concepts” of triangles, as collected by Kimberling [9], to higher dimensions. For tetrahedrons it turns out that so-called *equifaced* tetrahedrons play an outstanding role. The concept “equifaced” is a matter of the considered metric. It might mean the equal content of d -faces of an n -polytope as well as similar or even congruent d -faced polytopes in the sense of a Cayley-Klein geometry.

2 Centroids connected with simplices

Definition 1: The “ d -centroid” C_d of an n -simplex $S_n \subset E^n$, ($1 \leq d \leq n$) is the centroid of all d -faces S_d .

The centroid C_0 of the vertex set of S_n is an *affine geometric* remarkable point and, in the case of an affine space as place of action, it always coincides with the centroid C_n of S_n , a fact, which is not true in e.g. elliptic or hyperbolic spaces.

Examples: For a triangle in E^2 , the centroid C_1 of its edges is a Euclidean geometric remarkable point. The property $C_0 = C_1 (= C_2)$ characterises equilateral triangles.

For a tetrahedron S_3 we get the centroid of vertices $C_0 = C_3$, the centroid C_1 of edges, and the centroid C_2 of faces. Coinciding centroids characterise equifaced tetrahedrons. Such tetrahedrons have congruent acute face-triangles, see e.g. [6] and [2].

For a simplex $S_n \subset E^n$ the d -centroids C_d , ($1 \leq d < n$), are Euclidean properties and can be interpreted as “weighted centroids” of the point set of centroids C_{d-1}^i of the $(d-1)$ -faces $S_{d-1}^i \subset S_n$. Again yields, $C_0 = C_1 = \dots = C_n \Leftrightarrow S_n$ is a *regular simplex*.

3 Altitude sets of simplices

Definition 2: The “ d -altitude” of a simplex in a Euclidean n -space is the common normal of a d -face and its opposite face; ($d < n/2$).

With this definition a triangle has a single set of 3 “0-altitudes” passing through the orthocentre O_0 . That means, the 0-altitudes of a triangle belong to a pencil of lines, their equations do not have maximum rank.

A tetrahedron has four “0-altitudes”, which, in general, are generators of a special hyperboloid, a so-called “trace-0-quadratic”, see [8]. The midpoint M_0 of this hyperboloid acts as replacement of an orthocentre O_0 and is called the 0-Monge-point of the tetrahedron. Furthermore, there are three “1-altitudes”, the common normals of the three pairs of opposite edges of the tetrahedron. Again these three 1-altitudes are, in general, skew and span a hyperboloid. Its midpoint M_1 then can be defined as the “1-Monge-point” of the tetrahedron, see Fig. 1, Fig. 2 and [15].

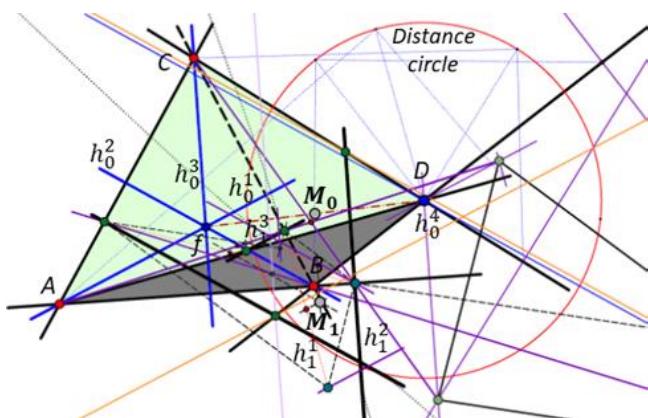


Fig. 1. Top-view of a tetrahedron with its 0- and 1-altitudes h_0^i and h_1^j as well as its Monge points M_0, M_1 , (general case)

In Fig. 1 the construction of the Monge points makes use of the property of a hyperboloid Φ that, if one generator g is projecting, the others of the same regulus map to a pencil. Its vertex is image of a projecting generator f of the other regulus and f and g are opposite and parallel. Therefore, the centre M of Φ lays on the symmetry line between g and f . In Fig. 1 the point M_1 is the intersection of three such lines (black dashed) after projecting two altitudes h_1^j , h_1^k in direction of the third h_1^i .

For tetrahedrons follows a first classification considering the behaviour of the 0-altitudes:

Type A: The 0-altitudes of the tetrahedron belong to a regulus, the midpoint of which is called Monge-point M_0 .

Type B: There are two pairs of intersecting 0-altitudes. The Monge-point M_0 is the midpoint of the segment of these intersection points. Such a tetrahedron is characterized by having one pair of orthogonal opposite edges.

Type C: All four altitudes intersect in one point, the orthocentre $O_0 = M_0$. Such a tetrahedron is characterised by two pairs of orthogonal opposite edges. (The third pair then is orthogonal, too.)

One might also ask for the conditions, when two (or all three) 1-altitudes are intersecting. It turns out that the three 1-altitudes are independent, such that there exist tetrahedrons with

- three skew 1-altitudes,
- one pair of intersecting 1-altitudes,
- one 1-altitude intersects the other two in different points,
- 1-altitudes intersecting in one point. (These tetrahedrons are characterised as being “equifaced”.)

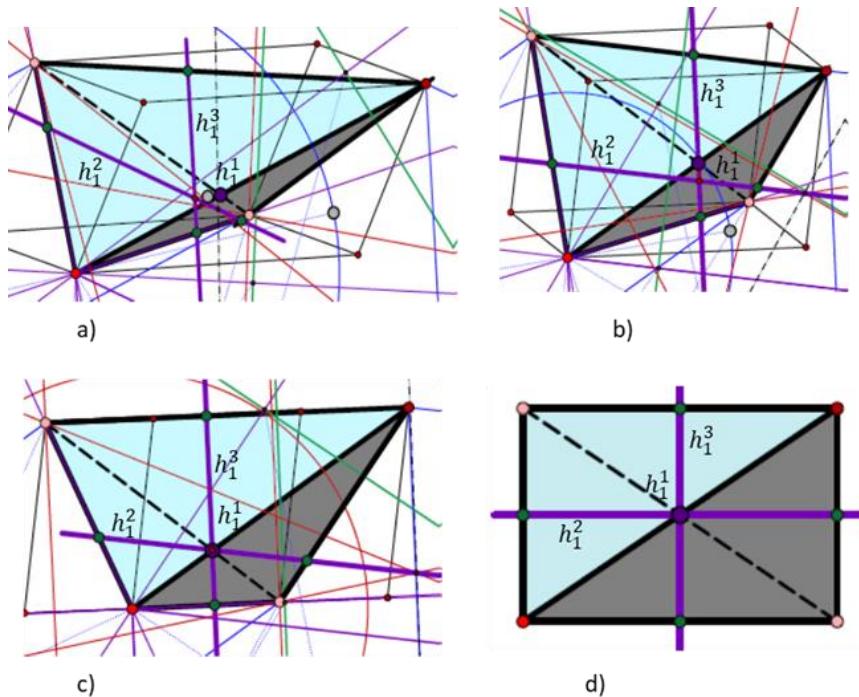


Fig. 2. Top-view of tetrahedrons onto a plane parallel to one pair of opposite edges. One 1-altitude h_1^1 is therefore projecting. A Monge point M_1 exists in the cases a), c) and d).

It is obvious, how to proceed in higher dimensions. A simplex in an n -dimensional Euclidean space is the convex hull of $n+1$ points. and has therefore $\binom{n+1}{d+1}$ d -dimensional faces. There are essential differences between odd and even dimensional spaces. In case of odd dimension $n = 2d + 1$ there exist pairs of opposite d -faces, and therefore $\frac{1}{2}\binom{n+1}{d+1}$ d -altitudes, which are independent. In case of even dimension $n = 2d$ the $\binom{n+1}{d+1}$ d -faces are opposite to $(d+1)$ -faces and there are $\binom{n+1}{d+1}$ d -altitudes, which are dependent. E.g. a “penteract”, a simplex in a 4-space, has five 0-altitudes, which are dependent and define, in general, a 0-Monge-point M_0 as replacement for an orthocentre O_0 . Now there are $\binom{5}{2} = 10$ 1-altitudes, which are dependent, too, and they define a 1-Monge-point M_1 . “Dependent” means that, within the 10-dimensional Grassmann model space of lines, the 10 1-altitudes only span a subspace.

4 Spheres connected with simplices

Definition 3: A “ d -sphere” c_d of a simplex in a Euclidean n -space E^n touches *all* subspaces spanned by d -faces S_d of S_n . The always existing 0-sphere c_0 is called „circum-(hyper)-sphere, the (hyper)-spheres c_{n-1} are called “in-(hyper)-spheres”. The centre Z_d of each c_d is a “remarkable point“ of S_n .

The circumcentre Z_0 is the common point of $\binom{n+1}{2}$ symmetry hyperplanes of pairs of vertices of S_n , while incentres Z_{n-1} are intersections of the symmetry hyperplanes of pairs of hyperfaces S_n , i.e. they are common points of dihedral symmetry hyperplanes. In general, there are no d -spheres and centres for $1 \leq d < n-1$, and their existence demands special properties of S_n .

We start with the triangle S_2 as example: It has a circumcircle c_0 with centre Z_0 , and 4 incircles c_1^i , the centres Z_1^i of which form a triangle plus its orthocentre. A tetrahedron S_3 has a circumsphere c_0 with centre Z_0 , and $5+3=8$ inspheres c_1^i , whereby 3 inspheres degenerate for equifaced tetrahedrons, see e.g. [2]. In general, there is no “edge sphere” c_1^i , but if there exists one edge sphere, so four additional ones, too. (A simple criterion for the existence uses the edge lengths as sum of tangent distances. A consequence is that the incircles of the face triangles touch each other. The edge spheres of a tetrahedron are also called “midspheres”, a concept, which is not precise for higher dimensional simplices.) For a simplex $S_n, n > 3$, there always exists one circum-hypersphere and $n+2$ in-hyperspheres, but, similar as for tetrahedrons, there might occur additional in-hyperspheres. In general, there are no d -spheres $c_d, 1 \leq d < n-1$, but if there exists one, so additional ones, too, and their centres Z_d^i form special configurations.

5 The Euler line of simplices

Definition 4: The Euler line e_n of a simplex $S_n \subset E^n$ connects the Monge point M_0 (resp. the orthocentre), the centroid $C_0 = C_n$, and the circumcentre Z_0 . Thereby $e_n \subset P_j \vee e_{n-1}^j$ with e_{n-1}^j being the Euler line of the hyperface opposite to vertex P_j of S_n .

On the Euler line of a triangle the points O_0, C_0, Z_0 define the well-known ratio $R(O_0, C_0, Z_0) = 2:1$. For a simplex S_n we get the ratio

$$R(M_0, C_0, Z_0) = 2:(n-1), \quad (1)$$

and within the planes $P_j \vee e_{n-1}^j$ there occur complete quadrilaterals with only rational ratios on its sides, see the example S_3 in Fig. 3.

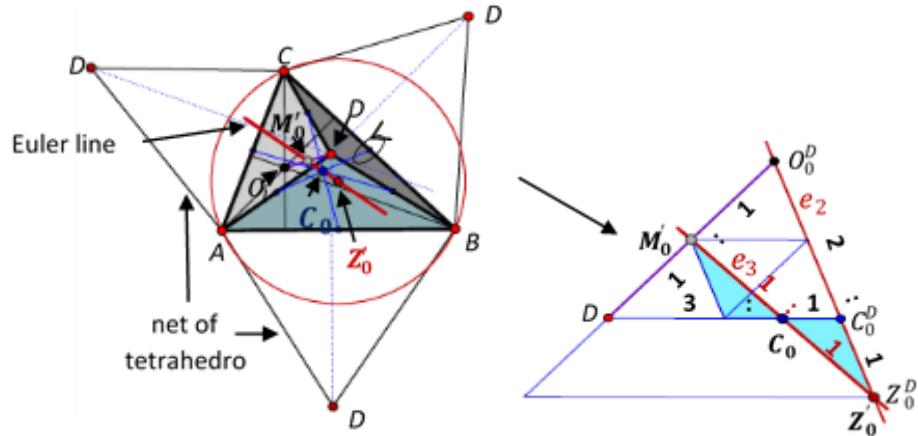


Fig. 3. Euler line e_3 of a tetrahedron and the complete quadrilateral in the plane $D \vee e_2$ showing the ratio $R(M_0, C_0, Z_0) = 1:1$

6 Midpoint altitudes and midpoint hyperplanes of a simplex

Even so there are further generalisations possible (and obvious) we restrict ourselves to a special case of what shall be defined as midpoint altitude resp. midpoint hyperplane:

Definition 5: A “midpoint altitude” (m_1 -altitude) m_1^{jk} passes through the midpoint of an edge $P_j P_k$ and is orthogonal to the opposite face $S_n \setminus \{P_j, P_k\}$. The “midpoint hyper-plane” (m_1 -hyperplane) μ_1^{jk} passes through the midpoint of an edge $P_j P_k$ and is orthogonal to the opposite face $S_n \setminus \{P_j, P_k\}$.

To define “midpoint subspaces” one had several possibilities according to the fact that the midpoint of an edge is as well its centroid, circumcentre and incentre. Each of these remarkable points of a d -face could act as midpoint in the sense of definition 5.

For a tetrahedron S_3 it is well-known (see e.g. [Altschiller], [8], and [12]) that all six m_1 -planes μ_1^{jk} have the Monge point M_0 in common. The planes μ_1^{jk} are parallel to the symmetry planes of the edges $P_l P_m$, which intersect in the circumcentre Z_0 of S_3 . Considering a tetrahedron, which degenerates to a planar complete quadrangle, we find an interesting connection to a well-known, elementary geometric theorem for complete quadrangles inscribed to a circle, see e.g. [16] and Fig. 4:

“The midpoint altitudes of a quadrangle pass through a point M_0 , if, and only if, the quadrangle is inscribed to a circle. Thereby, M_0 is symmetric to the circumcentre Z_0 with respect to the centroid C_0 .”

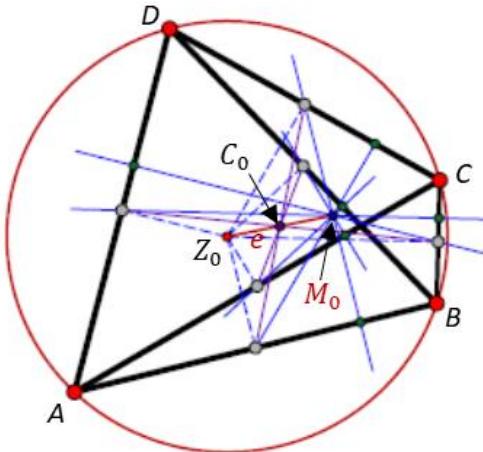


Fig. 4. The six midpoint altitudes of a complete quadrangle, which is inscribed to a circle, pass through a common point

For a tetrahedron we get three pairs of m_1 -altitudes m_1^{jk} . The six m_1 -altitudes span at most a linear complex. For an equifaced tetrahedron each of these pairs coincide with a 1-altitude. Fig. 5 shows the top-view of a tetrahedron, together with its m_1 -altitudes and the octahedron of their feetpoints.

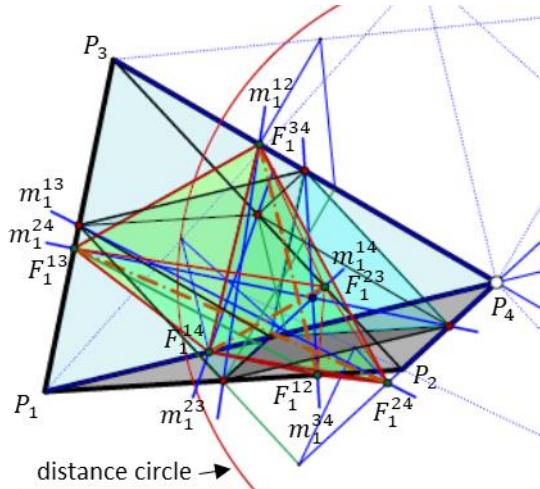


Fig. 5. Top-view of a tetrahedron onto the face plane $P_1P_2P_3$, together with its m_1 -altitudes m_1^{jk} and the octahedron spanned by their feetpoints F_1^{lm}

7 Isodynamic points of simplices

For a triangle $S_2 = ABC$ in the Euclidean plane E^2 points $\{X\}$ defined by the property

$$\overline{XA} \cdot \overline{BC} = \overline{XB} \cdot \overline{CA} = \overline{XC} \cdot \overline{AB} \quad (2)$$

are called “isodynamic points“ of ABC . It is well-known that (2) has two points I, J as solutions. For their many interesting properties, see e.g. [18], [7] or [3]. In the list of remarkable triangle centres of C. Kimberling they got the numbers X(15) and X(16), see [9].

We repeat a few of these properties: Writing (2) as proportions makes it obvious that I, J are the common points of three Apollonius circles over the sides of ABC passing through the opposite vertex, see Fig. 6. As the Apollonius circles intersect the sides in points harmonic to the vertices, these three pairs of intersection points are vertices of a complete quadrilateral, which has ABC as its diagonal triangle. Therewith, I, J are the Bodenmiller points of that quadrangle. While the Bodenmiller points of a quadrilateral can be imaginary or coinciding, too, the, isodynamic points are always real, with the equilateral triangle as the only exception. For equilateral triangles there exists only one, the inner, isodynamic point, and it coincides with the centroid. On each side of ABC the pair of intersection points with the Apollonius circles can also be received as footpoints of the angle bisectors of the opposite angle to this side, Fig. 6.

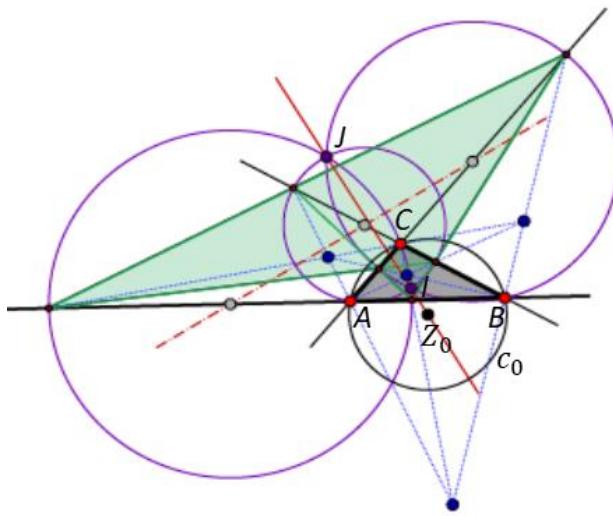


Fig. 6. A triangle with its Apollonius circles intersecting in its isodynamic points

A generalisation to higher dimensions might be possible in the following way:

Definition 6: Let S_d^i, \bar{S}_d^i be all pairs of complementary faces of a simplex $S_n = \{P_k\}$ in a Euclidean space E^n . Isodynamic points of S_n are points $\{I_d\}$ with the property

$$dist(X, S_d^i) \cdot vol(\bar{S}_d^i) = dist(X, S_d^j) \cdot vol(\bar{S}_d^j), \quad i \neq j \in \{1, \dots, \binom{n+1}{d}\}. \quad (3)$$

For general simplices and for some dimensions d the set $\{I_d\}$ solving (3) might be empty.

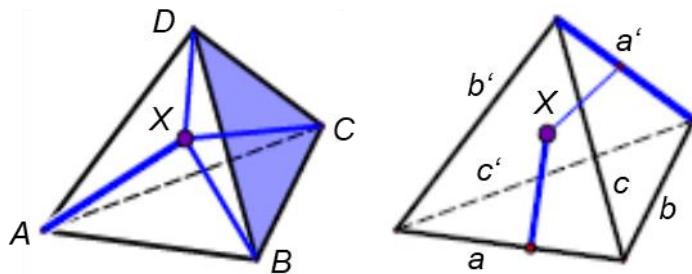


Fig. 7. Symbolic figures for the two cases of isodynamic points of a tetrahedron; left: $X = I_0$ (a) and right: $X = I_1$ (b)

From Definition 6 follows for a tetrahedron $S_3 = ABCD$ with pairs (a, a') , (b, b') , (c, c') of opposite sides that there are two possibilities for sets of isodynamic points, (Fig. 7):

(a) $\overline{XA} \cdot \overline{BCD} = \overline{XB} \cdot \overline{CDA} = \overline{XC} \cdot \overline{DAB} = \overline{XD} \cdot \overline{ABC}$ with solution set $\{I_0\}$, and

(b) $\overline{Xa} \cdot a' = \overline{Xb} \cdot b' = \overline{Xc} \cdot c' = \overline{Xa'} \cdot a = \overline{Xb'} \cdot b = \overline{Xc'} \cdot c$ with solution set $\{I_1\}$.

Equifaced tetrahedrons have the centroid as their (only) “vertex isodynamic point” as well as their (only) “edge isodynamic point”. For general tetrahedrons one can predict the number of edge isodynamic points in case (b): To a pair (g, g') , of skew lines and a given distance ratio $\overline{Xg} : \overline{Xg'} = p : q$ the set of solutions $\{X\}$ fulfills a quadric with (g, g') as reciprocal polar lines, thus generalising the planar Apollonius circle. Therewith, we should intersect three of such well-defined quadrics, what results in 8 common points counted in algebraic sense.

We refrain from a more detailed research on this surely interesting topic at this place.

8 Equifaced tetrahedrons and simplices

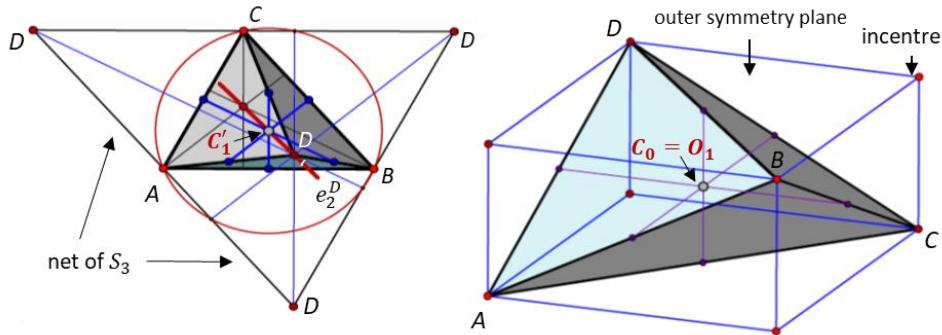
In the former chapters we mention that equifaced tetrahedrons play a special role among the set of tetrahedrons. Here we use the concept “equifaced” meaning *congruent* faces of a polyhedron or polytope in Euclidean sense.

An also common synonym for “equifaced tetrahedron” is “isosceles tetrahedron”, see [2]. As there are tetrahedrons with one, two and three pairs of isosceles opposite edges, and three, four, five and finally six isosceles edges, this concept is neither precise nor applicable to simplices and polytopes in higher dimensions. In addition, the faces of an equifaced tetrahedron need not be isosceles. There is a rich amount of references concerned with this type of special tetrahedrons, see e.g. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [10], [12], [13], and surely many more.

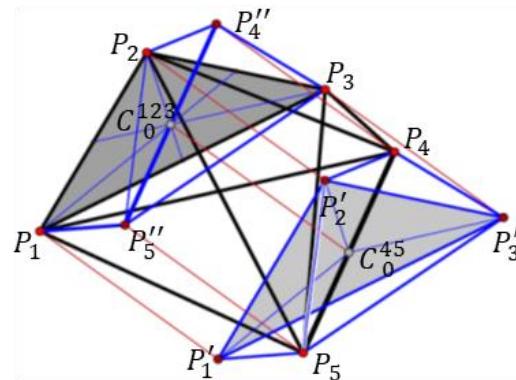
We list some of the well-known properties of equifaced tetrahedrons S_3 , see Fig. 8:

- a) A necessary condition for their existence is that the face triangles are acute.
- b) The edges of a general tetrahedron are diagonals of a parallelepiped, which, in case of an equilateral tetrahedron, is a prism.
- c) As a consequence of b) follows that opposite edges have equal length.
- d) Equifaced tetrahedrons are the only tetrahedrons with no Euler line, (the centroid coincides with the circumcentre, Monge point, and edge orthocentre).
- e) The centroid coincides also with an incentre and with the single isodynamic point of S_3 .

Obviously, the planes of the prism circumscribed to S_3 are outer symmetry planes of dihedral angles. Therefore, four vertices of that prism are incentres, the fifth is the midpoint C_0 of that prism. As there are three pairs of parallel outer symmetry planes, there exist three ideal intersection points as representants for three degenerated inspheres. One might also consider Stellae Octangulae based on equifaced tetrahedrons, a theme of its own, which we must omit at this place.


 Fig. 8. Top-view and net of S_3 (left) and axonometric view (right)

Equifaced simplices $S_n \subset E^n, n \geq 4$, are regular, see e.g. [17]. They are no longer embeddable into a polytope affinely related to a hypercube. To construct circumscribed parallelotopes $P_n^d, (1 \leq d \leq n/2)$ to a simplex S_n one proceeds analogue to the construction of the parallelepiped for tetrahedrons: For all pairs S_d^i, \bar{S}_d^i of opposite faces of S_n construct their centroids C_0^i, \bar{C}_0^i . Translate S_d^i with vector $C_0^i \rightarrow \bar{C}_0^i$, the translated $S_d^{i'}$ and \bar{S}_d^i span the hyperplane of one face of the circumscribed parallelotope P_n^d . Translate \bar{S}_d^i with vector $C_0^i \leftarrow \bar{C}_0^i$, then the translated $\bar{S}_d^{i'}$ and S_d^i span the hyperplane of the face parallel to the former one. In Fig. 9 the situation is shown for a simplex S_4 .


 Fig. 9. Principle of the construction of parallel hyperplanes spanned by faces of a parallelotope, which is circumscribed to a simplex S_4

A penteract S_4 has 5 vertices, 10 edges, 10 2-faces, 5 3-faces. The resulting parallelotope has 30 vertices and 10 pairs of parallel 3-faces, while a polytope affinely related to a hypercube has only 16 vertices and 4 pairs of parallel 3-faces. For a simplex $S_5 \subset E^5$ there exist two types of circumscribed parallelotopes P_5^1, P_5^2 . As the 20 2-faces of S_5 occur in opposite pairs, we still receive only 10 pairs of parallel 4-faces of P_5^2 , so again one notices differences between odd and even dimensional cases.

9 Conclusion

The paper aims at drawing attention to videly neglected topics of polyhedrons and polytopes. The shown elementary geometric approach looking for analogs of triangle centres for n -simplices opens up for research aside mainstream treatment focussing on regular and semiregular polytopes. The presented content is part of a lecture given at the 5th Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics, September 9-12, 2019, Trenčianske Teplice, Slovakia.

References

- [1] ALSINA, C., NELSON, R. B., A mathematical space odyssey: solid geometry in the 21th century. (Dolciani mathemacical expositions, no. 50), Washington: Mathematical association of America, 2015.
- [2] ALTSCHILLER-COURT, N., *Modern Pure Solid Geometry*. Macmillan, 1935
- [3] BOTTEMA, O., *Topics in elementary geometry*. (2nd ed.), Springer, p. 108, ISBN 9780387781303, 2008.
- [4] BRICARD, R., *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé*. J. de Mathématiques pures et appliquées, Liouville 3:113–148 (1897).
- [5] BRÜCKNER, M., *Vielecke und Vielfläche, Theorie und Geschichte*. Verl. Teubner Leipzig, 1900. ([hghttps://archive.org/details/vieleckeundviel00bruoft](https://archive.org/details/vieleckeundviel00bruoft), open library_edition OL23356512M, FCRecord: MARCXML).
- [6] DIRNBÖCK, H., *Das gleichflächige Tetraeder*. Wissenschaftliche Nachrichten Nr. 27 (1985), p.27-30. (edited by the Federal Ministry for Science and Art, Austria).
- [7] EVES, H. W., *College geometry*, Jones & Bartlett Learning, p. 69–70, ISBN 9780867204759, 1995.
- [8] HAVLICEK, H., WEISS, G., *The Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadratic Forms*. Am. Math. Monthly, (2002), 679-693.
- [9] KIMBERLING, C. *Encycl. of Triangle Centres – ETC*, Parts 1...16 (2019).
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [10] LEMOINE, E., *Quelques théorèmes sur les tétraèdres don't les arêtes sont égales deux à deux et solution de la question 1272*. Nouvelle ann. de math. 39, 133-138, 1880.
- [11] PEARCE P. *Structure in nature is a strategy for design*. MIT Press, Cambridge, London 1980, ISBN 0-262-16064-1, 1980.
- [12] PRASOLOV, V. V., *Problems in Plane and Solid Geometry*. (translated and edited by Dmitry Leites): [https://de.scribd.com/document/61948241/Viktor-v-Prasolov_Problems-in-plane-and-Solid-Geometry-Vol-2-Solid-Geometry-239p](https://de.scribd.com/document/61948241/Viktor-v-Prasolov-Problems-in-plane-and-Solid-Geometry-Vol-2-Solid-Geometry-239p) (retr. 19.3.2019).
- [13] ROSENTHAL, A., *Zur Theorie der gleichflächigen Polyeder*. Sitzber. Akad. d. Wiss. München Bd. XXXVIII, 1908.
- [14] WEISS, G., EBISUI, H., *Remarks on Perspective Simplices*. FME-Transactions (2017) 45, 243-250.
- [15] WEISS, G., HAVLICEK, H., *Ecken- und Kantenhöhen im Tetraeder*. KoG – J. Croatian Soc. f. Constr. Geometry and Comp. Graph., Vol. 6 (2002), 71-80.
- [16] WELLS, D., *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, London 1991.
- [17] ZIEGLER, G. M., *Lectures on Polytopes* (= Graduate Texts in Mathematics. Nr. 152). Springer Verlag, 1995, ISBN 0-387-94365-X.
- [18] Isodynamic Point, https://en.wikipedia.org/wiki/Isodynamic_point (retr.: 10.3.2019).

Gunter Weiss, PhD.

TU Vienna (Austria), TU Dresden (Germany)
e-mail: weissgunter@gmx.at

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective
to stimulate scientific research and teaching methodology
in the fields of geometry and computer graphics
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

SSGG

Institute of Mathematics and Physics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Abstracts

M. Kmet'ová, R. Vágová: Visualization and correction of mental image

In this article, we provide a brief overview of changing the content of the term visualisation and other related terms. Visualisation is an integral part of abstract thinking also in mathematics and a necessary prerequisite for the creation of mental ideas. We observed the process of mental image creation and its correction in one second-year high school student after taking the subject matter from solid geometry in the form of a case study. We tried to capture the details in her thinking as accurately as possible when solving a solid geometry problem, first without tools and then using the GeoGebra applet and the so-called navigation guide, which served to overcome difficulties in understanding the spatial representation of the problem in the dynamic environment.

J. Poruba, V. Ferdiánová: 220 years of Monge Géométrie descriptive

220 years ago, Gaspard Monge published his Géométrie descriptive, which was a military secret for 15 years. Thus he is considered to be a father of Descriptive geometry, however, he excelled in other areas of mathematics. The aim of this article is to point out his personality and introduce models, that were created within the use of Monge projection. These models can be created in „home conditions“ only with knowledge of Monge projection itself and GeoGebra.

G. Weiss: From the triangle to tetrahedrons, simplices and polytopes

Polytopes are generalisations of polyhedrons with respect to the dimension, the latter generalising polygons to three dimensions. Especially for tetrahedrons and simplices translations of remarkable triangle properties (see [9]) to higher dimensions provide a rich playground for research and many open questions. This article is an attempt to show some aspects of elementary geometry of tetrahedrons and simplices. Thereby tetrahedrons with congruent face triangles, so-called equifaced tetrahedrons, will play an outstanding role.

G

Slovak Journal for Geometry and Graphics

Volume 16 (2019), No. 32

ISSN 1336-524X

Edited by:

Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

Editor-in-Chief:

Daniela Velichová

Managing Editors:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Editorial Board:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmet'ová

Margita Vajsálová

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics

IČO: 31 816 304

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

Frequency: One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per

volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

G is cited in: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG December 2019, Bratislava

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific

www.ssgg.sk