



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 17, číslo 34, 2020
ISSN 1336-524X

G

Slovenský časopis pre geometriu a grafiku

Ročník 17 (2020), číslo 34

ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG

Vedúca redaktorka:

Daniela Velichová

Výkonné redaktorky:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Redakčná rada:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsáblová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

IČO: 31 816 304

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:

Redakcia G - SSGG

ÚMF SJF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

sogg@sogg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.

Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adrese: www.sogg.sk

Tlačí: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

Časopis G je citovaný v: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG december 2020, Bratislava

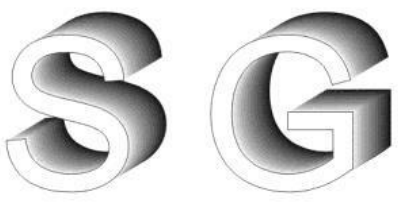
Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkoľvek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.



Obsah – Contents

Asymptoty elipsy? ... globálna a lokálna zaujímavosť vo vyučovaní nielen geometrie Asymptotes to ellipse? ... global and local interest in teaching not only geometry Zuzana Berger Haladová, Martina Bátorová, Andrej Ferko	5
Equidistant sets Ekvidištantné množiny Daniela Velichová	19
On Reconstructions of Dürer's Polyhedron O rekonštrukciách Dürerovho mnohostenu László Vörös	31

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu
a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG
Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Asymptoty elipsy? ... globálna a lokálna zaujímavosť vo vyučovaní nielen geometrie

Zuzana Berger Haladová, Martina Bátorová, Andrej Ferko

Abstrakt

Cieľom tohto textu je pokus navrhnúť objasnenia zaujímavých komunikačných situácií pomocou teórie i skúseností z virtuálneho kultúrneho dedičstva. Výklad ilustrujeme na vybraných témach geometrie a rozšírenej reality (AR).

Kľúčové slová: vyučovanie geometrie, rozšírená realita

Abstract

Our goal is an attempt to explain selected interesting communication situations using theory and experience from the virtual cultural heritage. We illustrate the approach on selected topics of geometry and augmented reality (AR).

Keywords: geometry education, augmented reality

1 Úvod

„První pravidlo objevování je mít mozek a štěstí. Druhé... napnutě sedět a čekat, dokud vás nenapadne chytrá myšlenka” [33, s. 172]. „Když jsem jako mladík slyšel o geniálních objevech ve vědě, snažil jsem se je objevit sám, dokonce bez seznámení se s dílem původního autora. Při této činnosti jsem postupně pocíťoval, že používám určitých pravidel” (Descartes) [33, s. 94]. „Nejlepší způsob, jak řešit dilema mezi příliš těžkými důkazy a úrovní kuchařské knihy, může být rozumné využití neúplných důkazů ... dostačující k tomu, aby jí dodaly jistou zajímavost a věrohodnost – a zafixovaly ji v myslích žáků, což je to hlavní.“ (ji, jí ... o základnej vete algebry) [33, s. 221].

Vo viacgeneračnej, už 60-ročnej tradícii vyučovania na Katedre, resp. Oddelení geometrie na Komenského matfýze vyvoláva kontroverzie úloha doc. Valenta Zaťka nájsť **asymptoty elipsy**, lebo je zaujímavá. Povedané s Ivanom Vyskočilom, pojem zaujímavosti používame často tak, ako keby sme mu rozumeli ... Otázky klasifikuje Ivan Vyskočil do dvoch z češtiny nepreložiteľných kategórií: vítačky a vytáčky, otázky vítané a nevítané. „vtipy mají zapojeny býti ve školách ... (vtipy) jasné, místné, členité jako prsty u rukou ...“ radí učiteľ národov Komenský ihneď na s. 7 Orbis pictus (Svet v obrazoch) [25]. Odhadujeme, že Komenský mohol mať na mysli nielen smiechovú, ale hneď tri reakcie, tvorivé bisociácie s citoslovcami HAHA! AH! AHA! [24].

Umných 38 otázok na rozvoj matematickej tvorivosti pri riešení daného problému zhrnul Pólya v roku 1945 v bestselleri **Jak to řešit** [33]. Kultúrne dedičstvo umenia pýtať sa i rétoricky tvorivo dnes ovplyvňuje rozvoj rozšírenej reality. Pre autorov AR aplikácií vo výučbe geometrie i rozšírenej reality vzniká dvojotázka o zaujímavosti a možnosti ju merať. Čiastočné dvojodpovede ponúka teória digitálneho kultúrneho dedičstva ... [11], kde na vysvetlenie kombinujú rétoriku a **appraisal theory**, aby potom merali oi. čas zaujatia daným komunikátom.

V časti 2 rozlíšime globálnu a lokálnu zaujímavosť. Časť 3 uvádza potrebné pojmy z oblasti rozšírenej reality. V častiach 4 a 5 predstavujeme dve prípadové štúdie s rozdielnymi „chytákmi”.

2 Pólyova „definícia zaujímavosti“

Dag Hrubý [17] víta Kowalského preklad Pólyu do češtiny. „V předmluvě Johna H. Conweye se dočteme, že kniha položila pro matematické vzdělávání a svět řešení úloh demarkační linii mezi dvěma epochami. Epochou řešení matematických úloh před Pólyou a tou po něm.” ... „Autor se věnuje nejen logické struktuře daných problému, ale zabývá se i mentálními kroky, které řešení daných problémů doprovází.” Ak rozlišujeme štyri presnosti myslenia (mýtické (džavot/bľabot/skat (džezová verbálna improvizácia)), rýchle, pomalé a silné), tak Pólya nás vedie k silnému mysleniu, k remeslu tvorivosti, **k umeniu klásť otázky, ba dokonca aj približne v akom poradí**. „Veľký objav rieši veľký problém, ale v riešení každého problému sa objaví zrnko objavu. Váš problém môže byť skromnučký; no ak podpichne vašu zvedavosť a rozohrá vašu vynaliezavosť a ak ho vyriešite vlastnými nápadmi (vtipmi), môžete zažiť napätie i triumf objavu (endorfin). Práve takéto blaho skúsenosti vo vnímavom veku môžu podnietiť chuť na tvorivú prácu a vpečať tú radosť v mysl i povahe na celý život. Učiteľ matematiky tak má prelomovú príležitosť. Ak premrhá vyhradený čas drilom svojich študentov v ríši rutinných operácií, zabije ich záujem, zbrzdí ich intelektuálny rozvoj a svoju šancu zneužije. Ak však vyzve do útoku zvedavosť svojich študentov, ak problémy prispôsobí ich vedomostiam a pomôže objaviť riešenia stimulujúcimi otázkami, môže im darovať chuť a prostriedky na slobodné, nezávislé myslenie” [33].

V zmysle Pólyovho citátu „v riešení každého problému” uvažujme **globálnu zaujímavosť** akéhokoľvek aktíva z nehmotného kultúrneho dedičstva: **téma**, ktorej venujeme čas, pamäť a komunikáciu. To sa deje v širokom rozsahu od každodenných situácií riešenia problémov až po katalógy hviezd a súhvezdí, rozsahom najväčšiu okom viditeľnú položku kultúrneho dedičstva z hľadiska času, priestoru a komunikácie, študovanú i budovanú po mnohé generácie. Každý z desiatok miliónov patentov, každá matematická veta a každá téma učiva sú globálne zaujímavé po istý čas, čas prvotného objavu, čas neskoršej prezentácie, po okamih prepnutia na inú tému alebo zabudnutia. Pólya ostane pravdepodobne prvým autorom, ktorý sa podujal vysvetliť kreativitu v matematike systematicky. Ďalšie hviezdy v tejto konštelácii sú napr. Apolonius, Bolzano, Hadamard, Halmos, Kim, Raskar... Pólyov model tvorivého riešenia problémov zaradili dokonca psychológovia do zoznamu siedmich reprezentatívnych (Wallas, Dewey, Rossman, Bransford & Stein, Vaigiu, Osborne, Pólya). **Lokálna zaujímavosť** podporuje odpovedanie na globálne zaujímavú otázku, udržanie pozornosti otázkami, zámlkami, ilustráciami, ozvučením, zakontextovaním, rétorikou... Jim Blinn ich nazýva **finty** na získanie pozornosti (attention getting tricks).

Ako vyriešiť problém „Ako môže učiteľ matematiky podnietiť zvedavosť svojich študentov?”? Vidíme tu dva otázniky. (V šachovej notácii to znamená slabý ťah.) Všeobecná odpoveď na túto vnorenú otázku by znela, že učiteľ by mal zámerne vytvárať učenie tvorivé, globálne i lokálne zaujímavé. O dva riadky vyššie dva príklady lokálnej zaujímavosti: vnorená otázka a párované “?” tvoria naviac vizuálny rým. Globálne zaujímavý algoritmus (ako súčet dvoch čísel) sa dá naučiť jednosmerným dogmatickým vysvetlením a ostane zapamätaný, pochopený, zabudnutý alebo zautomatizovaný. Jednosmerné vysvetlenie možno lokálne vylepšiť vložením otázok, analógií, metafor, slepých uličiek (ako powyše odbočka k šachovej notácii), aby sa

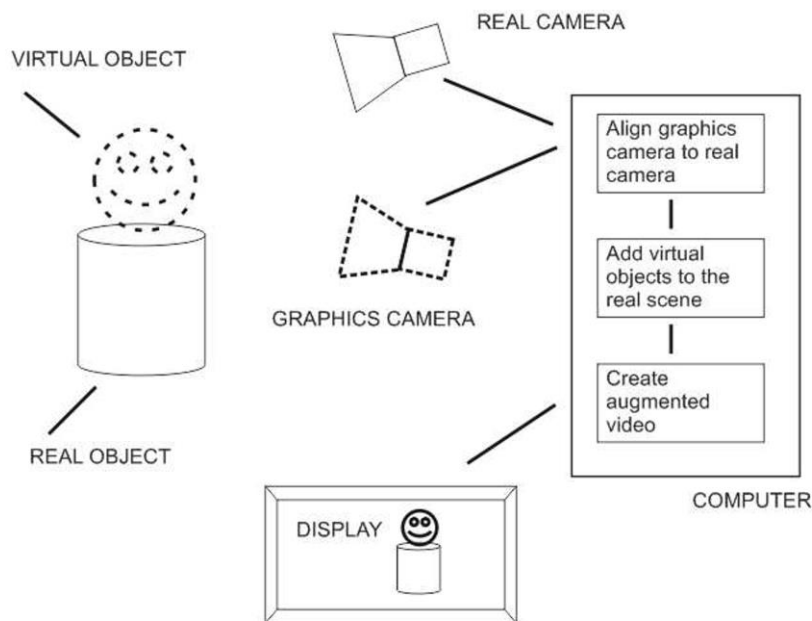
zvýšila „používateľská skúsenosť“ (user experience, engagement, enchantement), očarujúcusť, podmanivosť, uchvátenie. Prinajlepšom študenti riešenie objavajú! **Aha!!!** Rozdiel v spôsobe zapamätania je ten, že prvý komunikačný proces sa deje len (opakovaním) v talame, zatiaľ čo druhý aktivuje viac častí mozgu a dosiahne vnútornú odmenu (endorfín). Učíme sa celkovo tromi cestami: jednorazovo bolesťou cez amygdalu, opakovaním cez thalamus a vlastným objavom s príjemným endorfinovým či dopamínovým pocitom. Štyri myslenia s tromi cestami učenia možno vizualizovať v 12-políčkovej morfológickej tabuľke. Viac o štyroch mysleniach sa píše v česko-slovenskej literatúre v popularizačných prekladoch ako Dobelli: **Umenie jasného myslenia**, Kahneman: **Myšlení rychlé a pomalé** [21], Altshuller: **A co na to vynálezce?** [3]. Za silné myslenie označujú Altshullerov algoritmus systematického vynálezu **ARIZ** v rámci teórie technickej tvorivosti **TRIZ**, ktorú ovplyvnil aj Pólya. Dobelli píše o chybách myslenia, vrátane tárania (twaddle tendency). O troch cestách učenia sa píše v knihe **Vítejte ve svém mozku** [1]. V praxi často prevláda učenie pomalého myslenia opakovaním, ideálom by bolo objaviteľské učenie sa objavovaním.

Ako vyriešiť problém „Ako môže učiteľ matematiky podnietiť zvedavosť svojich študentov?“? Jedno riešenie ponúka Pólyov zoznam 38 odporúčaných otázok a ďalších pokynov (označíme, nakreslíme ...) pri riešení každého problému. Každého. Pólya ponúka aj viaceré nematematické príklady ... „v jednej z najúspešnejších matematických kníh všetkých dob“ (Conway). „Pri riešení úloh jsou doporučeny čtyři fáze postupu. Za první: musíme porozumět úloze, vědět, co se od nás žádá. Za druhé: musíme vidět, jak jsou různé prvky úlohy propojeny, jak je neznámá spojena s údaji. A abychom našli způsob řešení, musíme mít plán. Za třetí: realizujeme náš plán. Za čtvrté: podíváme se znovu na ukončené řešení a provedeme jeho kontrolu a rozbor. [17]“. Pólya ponúka 38 otázok a ďalšie pokyny na zúplnenie riešenia daného (globálne zaujímavého) problému, ale aj na udržanie pozornosti (lokálne zaujímavými) otázkami.

Globálna a lokálna zaujímavosť, téma a finty, problém a kroky riešenia sa používajú na rozprávanie príbehov, hranie hier, individuálne alebo skupinovo, s počítačom alebo bez neho. Glassner [16] si všimol týchto 16 možností, vrátane možnosti skupinovej komunikácie v triede alebo vo vnorení vo virtuálnom múzeu. Vyučovanie matematiky je špecifickým druhom rozprávania príbehov a/alebo hrania hier a každý príbeh/hru možno chápať ako fenomenologický dôkaz existencie daného príbehu/hry a často ako obranu danej pravdy. Pri výučbe musíme budovať pojmy a formovať krivku učenia podporujúcu pozornosť obrazmi, otázkami, analógiami, metaforami... Naša pamäť pre viaceré inteligencie má dve časti: otázky a odpovede [10]. Môžeme učiť bez otázok, no možno študujúcich upútať tak, že sa pýtame, a že sa pýtajú aj sami od seba. Najjednoduchší „vtip“, ako zvýšiť pozornosť, poznáme už tisícročia od Aristotelovej rétoriky: položiť otázku. Alebo neodpovedať presne, zakotviť pozornosť najprv analógiou alebo metaforou. „Najlepší spôsob, jak řešit dilema mezi příliš těžkými důkazy a úrovní kuchařské knihy, může být rozumné využití neúplných důkazů... dostačující k tomu, aby jí dodaly jistou zajímavost a věrohodnost – a zafixovaly ji v myslích žáků, což je to hlavní.“ (ji, jí ... o základnej vete algebry, časť ktorej sa dokáže ľahko) [33, s. 221]. Vo virtuálnych múzeách sa v súčasnosti používa kombinácia dvojteórie hodnotenia (appraisal) a rétoriky na vysvetlenie angažovanosti. Metafora vo výučbe matematiky je často nepresná odpoveď, ktorú treba upresniť, vzorové dielo **Explaining Algorithms Using Metaphors** [15]. Pokúsime sa v ďalšom diskutovať aj o otázných otázkach, nesprávnych metaforách a autorskej práci v rozšírenej realite. Na to budúci autorov prezentácií geometrie pomocou rozšírenej reality informatívne prevedieme referenčným modelom a možnosťami merania kvality, postupmi kladenia vítaných aj nevítaných otázok, využitím chybných metafor a vybranými inšpiratívnymi projektami, najmä **Videoplace** a **Construct3D**.

3 Augmented Reality, virtuálne múzeum a meranie kvality

Pôvod moderného výkladu nachádzame u Komenského [25]. J. A. Komenský (Comenius) pre vzdelávací projekt Orbis pictus v roku 1658 objavil návrhový vzor multimediálnej prezentácie s poukazom na všetky 4 učebné štýly (VARK, visual, audio, read, kinesthetic), navyše vizualizácia s anotáciami v obrázkoch, ba dokonca aj CRM (conceptual reference model), teda súbor pojmov, ktoré má učiteľ dieťa naučiť o svete v rodnej reči a po latinsky. V predobraze stručnej, viackanálovej a štruktúrovanej prezentácie (Powerpoint, webstránka) pojmy autor zreťazil do mikropříbehov (use case). Knihu ako médium dnes obohacuje AR.



Obr. 1. Schéma systému AR

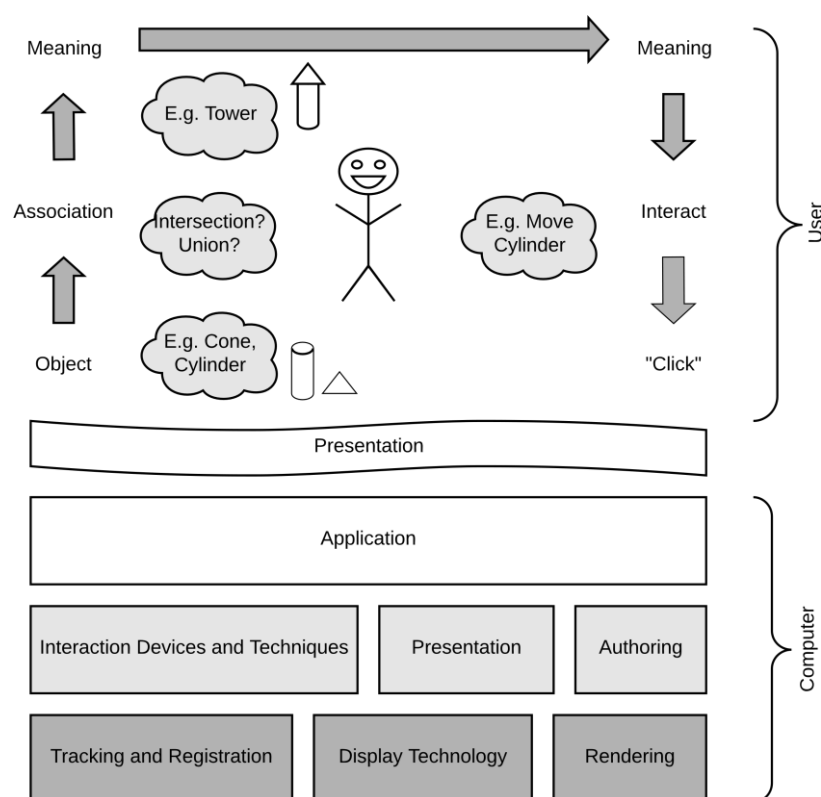
Na obr. 1 vidno systém s kamerou, počítačom a obrazovkou. Vnímame súčasne reálny aj virtuálny svet. Základným princípom rozšírenej reality (AR) je naniest' digitálne informácie priamo na používateľovo zmyslové vnímanie, namiesto náhrady syntetickým prostredím, ako to robia systémy VR. „AR má potenciál stať sa vedúcou metaforou používateľského rozhrania pre situované výpočty (ubiquitous computing)“ [40]. Výskum vo VR a AR optimalizuje každodennú komunikačnú skúsenosť, filtrovanie informačného znečistenia, obohacovanie a šetrenie času ľudského života pre každého používateľa. Inými slovami, tento smer výskumu má zásadný civilizačný význam (ako kedysi jazyk, písmo, kníhtlač). Kým dnešná Virtuálna realita (VR) ponúka 3I (imagination, immersion, interaction): predstavivosť, vnorenie a interakciu, rozšírená realita (AR) „poskytuje jednoduché a okamžité používateľské rozhranie pre elektronicky vylepšený fyzický svet“ [40].

Rozšírená realita rozširuje funkčnosť nástroja **GeoGebra** (<https://www.geogebra.org/ar>). Ide o míľnik v roku 2018. V rámci viacerých kapitol v knihe [34], najmä. ([4], [8], [9], [26], [28],) sa skúmajú myšlienky i prínosy AR, slúžiace na podporu modernej didaktiky, predstavivosti, interakcie a vnorenia. Myron Krueger pomenoval novú technológiu ponajprv Umelá realita (Artificial Reality) v polovici 70-tych rokov, ale zväčšil pojem Jarona Laniera virtuálna realita.

V roku 2016 Dieter Schmalstieg a Tobias Holerer predpovedajú, že práve vnorenie sa stane dôležitou mierou kvality systémov AR [40].

Umeleckým cieľom Kruegerovho projektu **Videoplace** (1975) bolo vytvoriť nové umenie interakcie [29]. Premietali farebné siluety používateľov na stenu v reálnom čase, kde pôsobili a napriek 2D vizualizácii jednoduchého virtuálneho sveta dosiahli silné skúsenosti (user experience, UX, engagement) z pocitu „byť tam“ (being there). Dych berúci vzdelávací cieľ Videoplace nebol nikdy dosiahnutý. Myron Krueger sprítomnil fantastické 2D výtvyry pre skupiny detí. Od nich sa očakávalo, že budú pozorovať umelú realitu, pomenujú nemenované objekty, zorganizujú semináre, aby si naplánovali ďalší výskum, rozdelili pracovné zaťaženie a prípadne objavili pre dospelých nové metódy výskumu. Autor predpokladal, že existujú výskumné metódy, ktoré nespokořovali alebo zabudli „vedy dospelých“ a spoliehal sa na tvorivosť školou nepokazených detí ... Vizuali umelci museli vytvárať viditeľné objekty a ich správanie, aby sa diametrálne odlišovalo od všetkého známeho, aby mali deti čo objavovať. Kruegerovu umelecko-didaktickú víziu Videoplace považujeme za vzorový príklad globálnej zaujímavosti.

Umelá realita zmiešaná, reálna i virtuálna podnecuje aj pozýva na imaginatívne, interaktívne a pohlcujúce objavovanie. Reálny problém matematicky modelujeme, informaticky reprezentujeme a konkrétne implementujeme. Obr. 2 ilustruje stavebné bloky: registráciu, obrazovku, vykresľovanie, autorskú, prezentačnú a interaktívnu vrstvu aplikácie, výstupy vníma používateľ. Po sprítomnení postupne pixle, objekty, ich semiotické a rétorické kontexty, až význam, ktorý ho môže aktivizovať na dialóg alebo ponechať vo vnímaní monológu. Na porozumenie pritom vplýva neurčitosť i hĺbka vnorenia [16].



Obr. 2. Stavebné bloky AR [6] a príklad úrovni odoziev, rozpoznané objekty, generované asociácie, určenie významu a prípadná interakcia

Virtuálny priestor umožňuje reálnu komunikáciu, v ktorej komunikujeme prostredníctvom rádovo desiatok semiotických systémov. Virtuálne múzeum sa definuje ako multimedialná kolekcia telematicky dostupných digitálnych dát i kognitívny priestor s nekonečnou kapacitou na rozširovanie, kombináciu, kompozíciu a rekompozíciu [36]. Alternatívne, virtuálne múzeum rozumieme ako multimedialný semiotický systém, ponúkajúci súbor mikropříbehov alebo herných ťahov na komunikáciu danej výpovede, hlavného príbehu, časti metapríbehu. Delíme ich na vizualizačné, aktivizačné a hermeneutické (sprítomňujúce neviditeľné). Súčasná prognóza autorom zdôrazňuje [32] "*Storytelling, presence, and gamification are three basic fields that need to be taken into account when developing novel mixed reality applications for cultural heritage ...*", v preklade storytelling, vnorenie a gamifikácia (pridanie hravosti).

Maximálny jednorazový účinok vo virtuálnom múzeu sa označuje aristotelovským pojmom **entymémé** a vnorenie trvajúce v čase hoci v počítačovej hre novodobým pojmom **flow**. (Zriedka sa dá merať komický účinok, napr. Huron [19] klasifikoval rádovo stovky smiechov, aby našiel 9 typov hudobných vtipov.) Aristoteles v Rétorike hodnotí entymémé ako najsilnejší z dôkazov. Autorsky upravíme sylogizmus vynechaním premisy. Napr. trojica „Všetci ľudia sú smrteľní. Sokrates je ľudská bytosť. Sokrates je smrteľný.“ sa skrúti na dvojicu "Všetci ľudia sú smrteľní. Sokrates je smrteľný." Auditórium sa stane spoluautorom, lebo si chýbajúce doplní. Entyméma intuitívne zjednotí rečníka s obecnosťou, ktoré samo pomáha zostrojiť dôkaz, ktorým sa samo presvedčí. Tento efektívny postup sa mnohokrato využíva v reálnom i virtuálnom priestore. Meranie kvality zaujatia (engagement factor) [11, p. 276] sa počíta z počtu návštev *Visits*, počtu jedinečných návštevníkov *Visitors* a dĺžky návštev *Duration* danej časti virtuálneho múzea. Lyn Elliot Sherwood navrhla vzorec: $Visits/Visitors * Duration$. Na kvalitu vplýva obsah, architektúra i vizuálny dizajn. Danou mierou sa napr. ohodnocujú jednotlivé časti Virtual Museum of Canada, za hranicami kvantitatívnej i kvalitatívnej metódy.

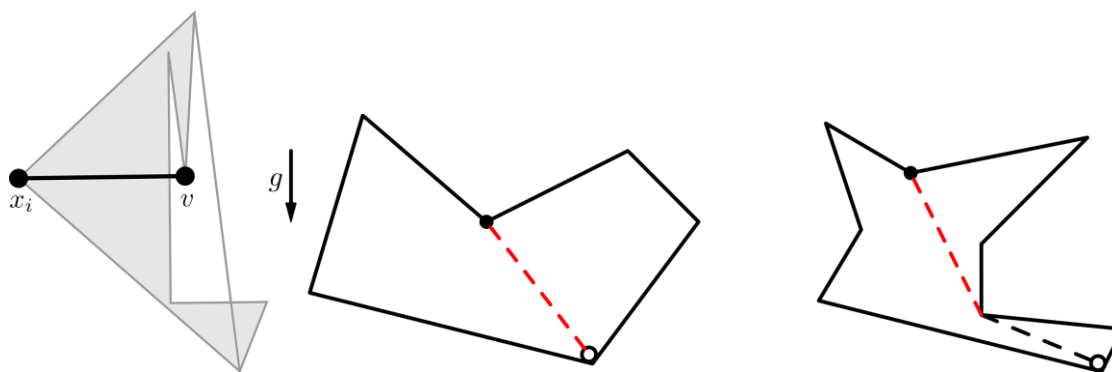
Čiastočný uzáver by znel, že do rétoriky patriaci vrcholný verbálny argument entymémé, multimedializovane prevzatý do virtuálneho múzejníctva, poukazuje na užitočnosť rádovo desiatok iných rétorických figúr, ktoré prispievajú k lokálnej zaujímavosti a dajú sa analogicky ako entymémé v mnohokrato multimedialných realizáciách zaradiť do nášho autorského inštrumentária s využitím AR. Preskočíme oi. analógiu, parabolu, hyperbolu a pristavíme sa v dvoch prípadových štúdiách bližšie pri metafore a otázke, pri ich neštandardnom až vedome chybnom použití.

4 Chybné metafory – prípadová štúdia 1

Pólya v roku 1940, keď písal prvú verziu svojho diela v nemčine, si už bol vedomý, že zostavil zoznam otázok, historicky prvý, a za každým návrhom otázky alebo pokynu treba vidieť „mentální operace běžně užívané pro řešení úloh“ s. 4 Kowalského prekladu, „seřazený v pořadí, ve kterém se nejpravděpodobněji objevují“. V roku 2013 vyšlo pozoruhodné didaktické dielo zamerané nie na otázky, ale na iné mentálne operácie, na prirovnania, na metafory, **Explaining Algorithms Using Metaphors** [15]. Metafory sa technicky využívajú aspoň v ďalších troch oblastiach, metafory pamäti [12], metafory interakcie [41] i metafory vizualizácie. Porovnáme korektnú metaforizáciu s chybnými. Autori spomenutej knihy i článku On the Role of Kinesthetic Thinking in Computational Geometry v článku [38] uvažujú oi. **problém triangulácie jednoduchého mnohouholníka**. Na tomto probléme sme založili hernú časť výkladu o globálnej a lokálnej zaujímavosti, ktorý odznel na rôznych fórach pre publikum od 11-ročných bratislavských gymnazistov po medzinárodne renomovaných matematikov [13],

V uvedenej časti výkladu však metafora poškodzuje predstavu, spôsobuje kognitívnu disonanciu, epistemologickú prekážku. (Trojnásobným opakovaním využívame inú rétorickú figúru, opakovanie.) Výklad s chybnou metaforou a odhalenie chyby kontrapríkladom (Obr. 4a) vedie k spoločnej výhre so študujúcimi a adekvátnou metaforou, čiže správnym dôkazom. V texte [38] chybnú predstavu nazývajú kinestetické myslenie, nie metaforou a vzápätí opravujú. Chybnú metaforu uvádzajú aj [15] a potom predstavia fyzikálne motivovaný postup. Spustia z konkávneho vrcholu na pomyslenej gumičke olovenú guľku, ktorá spadne na vrchol alebo hranu „naproti“. Ak na hranu, tak sa ešte skotúľa do vrcholu, pričom gumička môže zasiahnuť aj ďalší vrchol (Obr. 4b). V oboch prípadoch autori uvádzajú aj nápravu chybnej trojice metafor a korektnú implementáciu fyzikálnej metafory.

Do omylu uvádzajúci obrázok vidno aj v známej knihe Preparata-Shamos Computational Geometry na s. 188, kde pri izotonickú regresii si človek (aj (pod)vedený daným obrázkom) predstaví neklesajúcu spojitú funkciu, hoci optimum sa dosiahne funkciou po častiach konštantnou, nespojitou. Pri vysvetlení, prečo sa kosínus hodí na empirický výpočet lokálneho osvetlenia bodu difúzneho povrchu lúčom s danou intenzitou, treba tiež po zdôvodnení vzorca upresniť, že zmysel dosiahneme, až keď lúč pokladáme za valec, čiže ho v predstave študujúcich z polpriamky prinafúkame na valec, lebo obrazový bod reprezentuje jasový integrál na kruhu resp. elipse. Tá epistemologická prekážka sa v prvej triede istý čas udržuje aj pri vysvetlení sčítania a násobenia ako operácií zväčšujúcich. **Múdra chyba** podľa Salamona či podľa Šklovského knihy **Energia omylu**, nás však nebadane učí. Tri horeuvedené chybné postupy nám objasnili problém a tri algoritmické stratégie, inde nazývané metafory a u Descarta „určité pravidlá“. Po odstupe od vyriešenia triangulácie jednoduchého Pólygonu sa hodí uviesť metakontext. Iterácia, rozdeľuj a panuj, odsekní a hľadá, triedenie, geometrické miesto bodov či zametanie ponúkajú „kinestetické myslenie“ pre mnohé ďalšie riešenia geometrických problémov [20].



Obr. 4. (a) Kontrapríklad, bod v nemusí byť platným koncovým bodom vnútornej diagonály. (b) Fyzikálna metafora s gravitáciou, gumičkou a guľkou zachováva diagonálu resp. diagonály „vnútri“ [15].

5 Energia omylu – prípadová štúdia 2

Hlavnou myšlienkou a cieľom prístupu „*Energia omylu*“ je pristupovať k vzdelávaniu (vo všeobecnosti) ako k spôsobu myslenia a vyhodnocovania faktov a ich súvislostí, a nie ako k obmedzenému obdobiu života venovanému osvojovaniu vopred určenej množiny údajov a postupov a zvládnutiu predpísaných zručností, techník a metód. Vzdelávanie ako také

vnímame ako spôsob pokračujúceho a neustáleho napredovania, rastu a zmeny myslenia; je pre nás neoddeliteľnou súčasťou svetonázoru a myšlienkového nastavenia, kde je zmena bezprostredná a nevyhnutná. Táto zmena prichádzajúca napr. vo forme neznáma, problému alebo úlohy, ktorá je pred nami, nie je vnímaná ako hrozba, ale ako výzva a príležitosť prísť s tvorivými a inovatívnymi nápadmi a postupmi.

Takýto prístup k riešeniu problémov si vyžaduje odvahu a ochotu riskovať – a možno aj –urobiť chybu. Veríme, že skutočná tvorivosť a inovácia buduje na a umožňuje vznik chyby ako fenoménu rastu, alebo presnejšie povedané, skutočná kreativita a inovácie sú často výsledkom úspešne zvládnutých a uchopených chýb a omylov.

Nasledujúca prípadová štúdia prebieha kontinuálne od akademického roka 2015-2016 v rámci predmetu Elementárna teória kvadratických útvarov na FMFI UK s časovou dotáciou 3h týždenne počas trinástich týždňov zimného semestra. Obsahom predmetu je elementárnu teória kvadratických foriem, najmä kužeľosečiek v euklidovskej rovine a kvadrík v euklidovskom trojrozmernom priestore, do informačného listu predmetu je možné nahliadnuť na https://sluzby.fmph.uniba.sk/infolist/sk/2-UMA-207_15.html. Predmet patrí medzi povinné predmety učiteľského štúdia matematiky v kombinácii s iným aprobačným predmetom. Skúška z predmetu pozostáva z písomnej a ústnej časti. Práve pri ústnom skúšaní sme najprv pokusne a potom nastalo zaviedli nasledujúci model vyhodnocovania vedomostí a pochopenia prebraného učiva.

5.1 Vybrané otázky a ich zamýšľaný cieľ

Nasledujúce otázky zoskupujeme ich podľa cieľa resp. typu, uvádzame iba typické príklady. Sú zvyčajne formulované ako úlohy o pravdivosti, čiže študent má najprv rozhodnúť a potom svoje rozhodnutie zdôvodniť. Usporiadavame ich podľa nami vnímanej náročnosti, zo skúsenosti nám veľmi dobre umožňujú rozvrstviť študentov podľa pochopenia a osvojenia prebraného učiva.

Typ 1: Otázky faktografické

Hlavným cieľom je zistiť, či sa študent vôbec pripravoval na skúšku. Otázky sú zamerané na faktografické osvojenie základných definícií. Namiesto zadania Definujte pojem však nechávame študenta rozhodnúť o pravdivosti jednoduchých tvrdení, ktoré môžu viesť k priamočiaremu sporu s definíciou. Pri neuspokojivom zodpovedaní takto položených otázok je jasné, že u študenta absentuje základné pojmoslovie, a teda klásť zložitejšie otázky nie je účelné a efektívne.

- Existuje regulárna kužeľosečka, ktorej osi nie sú na seba kolmé. (spor s definíciou osi)
- Asymptota hyperboly je jej sečnicou. (spor s definíciou asymptoty)
- Existuje kužeľosečka, ktorá je súčasne singulárna a regulárna (definícia singulárnej a regulárnej kužeľosečky je vzájomne sa vylučujúca – Regulárna kužeľosečka je taká, ktorá nie je singulárna).

V tejto časti niekedy kladieme neštandardne formulované otázky, kedy sa priamo pýtame na definíciu, ale iným spôsobom, než bola uvedená na hodine, napr. na všeobecne platné tvrdenie sa pýtame existenčne:

- Existuje kužeľosečka, ktorej os zvierá so smerom s ňou združeným uhol 90 stupňov.
- Existuje regulárna kužeľosečka, ktorej osi nie sú na seba kolmé.

Na otázky je možné odpovedať aj kontrapríkladom, ktorý na vyvrátenie nepravdivého tvrdenia úplne stačí:

- Každá regulárna bodovo reálna kužeľosečka má aspoň dva vrcholy (nie, napr. parabola)
- Kužeľosečka hyperbolického typu je za každých okolností hyperbola (nie, tvrdenia platí, iba ak ide o regulárne kužeľosečky, príkladom singulárnej kužeľosečky hyperbolického typu je dvojica rôznobežiek).

Typ 2: Otázky zamerané na nutné a postačujúce podmienky, modálne otázky („smie/nesmie/musí/môže“)

U študenta sa vyžaduje hlbšie pochopenie súvislostí známych pojmov, kedy okrem memorovania tvrdení a viet zistujeme, či študent získal cit pre význam a dôležitosť predpokladov a či sú mu jasné dôsledky tvrdení.

- Ak má kužeľosečka asymptotický smer, má aj asymptotu (nie, definícia asymptoty vyžaduje nielen asymptotický smer, ale aj prázdny prienik s kužeľosečkou)
- Ak je osou paraboly os x , tak vrchol paraboly vždy leží v začiatku súradnicovej sústavy (nie, vrchol je iba bodom osi, nie nutne musí ležať v začiatku súradnicovej sústavy)
- Imaginárna regulárna kužeľosečka nemôže mať stred s reálnymi súradnicami (nie, príkladom je imaginárna elipsa).
- Kužeľosečka parabolického typu je za každých okolností parabola (nie, pre singulárne kužeľosečky môžeme uvažovať dvojicu totožných priamok).
- Ohnisko regulárnej kužeľosečky môže byť jej vonkajším bodom (nie, rozborom možností pre elipsu, hyperbolu a parabolu uvidíme, že to nie je pravda).
- Singulárna kužeľosečka môže/musí/nesmie obsahovať singulárny bod.

Typ 3: Neúplné otázky

Ide o otázky, kedy úmyselne zamlčíme nejakú časť predpokladu resp. konvencie, a potom sa pýtame na platnosť takto upraveného tvrdenia. Študenta to v ideálnom prípade vedie k tomu, aby si uvedomil, že štandardne sa matematické tvrdenia formulujú najstručnejšie, ako sa dá, čiže neobsahujú nadbytočné požiadavky a údaje, ale zároveň je nutné žiaden z predpokladov nevynechať, inak sa tvrdenie stane nepravdivým.

- Karteziánska súradnicová sústava v rovine je určená bodom a dvoma smermi, ktoré sú navzájom kolmé (chýba požiadavka na dĺžku vektorov s.s.).
- Stred kužeľosečky musí ležať na kužeľosečke (tvrdenie je pravdivé iba pre singulárne kužeľosečky)
- Nech priamka p_1 so smerovým vektorom s_1 je polárne združená so smerom s_2 . Potom priamka p_2 so smerovým vektorom s_2 je polárne združená so smerom s_1 . (Ide zdanlivo o vetu o polárnej združenosti, ale chýba predpoklad, že združujeme vzhľadom na jednu kužeľosečku.)

Samotné dvojhodnotové rozhodnutie pravdivá/nepravdivá môže byť takto správne aj nesprávne zároveň. Keďže niektoré predpoklady, súvislosti, fakty sú zamlčané, v prípade, že si ich študent uvedomí, môže sa zmeniť jeho odpoveď. Tento typ otázok je veľmi užitočný pri nadaných študentoch, ktorým dáva priestor na uvažovanie a umožňuje im napr. uvidieť závažnosť a potrebu predpokladov vo vetách a tvrdeniach. Rovnako majú možnosť si uvedomiť vplyv a úlohu zamlčaných predpokladov, napr. informáciu o tom, či pracujeme v euklidovskom resp. rozšírenom euklidovskom priestore atď. Takto kladené otázky často vedú k podnetnej a užitočnej diskusii pre obe strany.

Typ 4: „Non-sense“ otázky

Niektoré z predchádzajúcich otázok sa dajú preformulovať do zdanlivo absurdných zadaní, ktoré overia, či študent má nadhľad nad problematikou:

- Uveďte príklad kužeľosečky, ktorá je súčasne regulárna aj singulárna.
- Skonstruujte regulárnu kužeľosečku, elipsu, ktorej asymptota je dotyčnicou v niektorom jej vrchole.
- Skonstruujte aspoň jednu asymptotu elipsy.

5.2 Vyhodnotenie a závery

Jednou z výhod uvedeného spôsobu skúšania a celkovo prístupu k osvojovaniu vedomostí je, že umožňuje alebo priamo vyžaduje divergentné spôsoby rozmýšľania, ktoré sú potrebné pre rozvíjanie kreativity a problem-solving kompetencií. Bežne tiež pri riešení problémových úloh nemáme k dispozícii všetky údaje (zadanie je neúplné), resp. si nemusíme uvedomiť, že riešenie je známe (zadanie je preformulované resp. neintuitívne formulované). Taktiež podľa nás mení zaužívaný prístup k omylu a chybe ako k niečomu nežiadúcemu, čomu sa je za každú cenu potrebné vyhnúť a ukazuje, že ak úloha nie je za každú cenu deterministická a nevieme ju ihneď riešiť, tak to neznamená, že sa máme hneď vzdať. Ak používame iba známe postupy na riešenie známych úloh, iba ťažko prideme s niečím novým. Rovnako, nechota myliť sa a robiť chyby vedie k uzavretiu sa voči novému a bráni inovácii a pokroku – veď predsa pokus o riešenie, ktorý nikam nevedie, je iba pokusom o riešenie, ktorý nikam nevedie, a nie hneď zlyhaním. Zásadnou vlastnosťou nových vecí predsa je, že sú nové, a teda nie je k nim návod, a už vôbec nie optimalizovaný, ani nie je k dispozícii presný postup práce. Je veľmi dôležité dať sám sebe aj druhým slobodu myliť sa, aby sme popri všetkých omyloch mali šancu raz za čas urobiť niečo správne.

6 Záver

Metodika SAMR [35] klasifikuje nasadenie AR do výučby v dvoch fázach, transformácia klasickej výučby a jej vylepšenie. Objaviteľské dielo, s ktorým prišiel Pólya [33], ovplyvnilo Altshullerovu teóriu TRIZ [2]. Na budúcnosť vyučovania začína pôsobiť aj hnutie MOOC, najmä najpopulárnejší s online kurzov, Learning How to Learn, ktorý do výučby integruje najnovšie zistenia v oblasti Deep Learning.

Zaviedli sme globálnu a lokálnu zaujímavosť a v dvoch prípadových štúdiách sme nad rámec štandardného kladenia otázok a vysvetľujúcej metaforizácie poukázali na možnosť narábania s neurčitosťou, chybnou metaforizáciou a otáznymi otázkami, čím poukazujeme na implikácie pre plodné prepojenie teórie digitálneho dedičstva (rétorika, engagement) s vyučovaním pomocou rozšírenej reality. Podrobnejší výklad s rozsiahlou bibliografiou vyšiel knižne v slovenčine [27].

W.P.Thurston vo významnej eseji Mathematical Education [42] v Pólyovom duchu komentuje zaujímavosť: „Vo výučbe matematiky je prirodzená tendencia používať logické poradie a vysvetliť všetky techniky a odpovede pred uvedením príkladov a otázky za predpokladu, že študenti sú vybavení všetkým technikami potrebnými na ich zodpovedanie ... Je lepšie ponechať zaujímavé nezodpovedané otázky a nevysvetlené príklady „vo vzduchu“, či už sú alebo nie sú študenti, učitelia alebo ktokoľvek pripravení odpovedať. Najlepší psychologický

poriadok pre daný predmet v matematike je často úplne odlišný od najefektívnejšieho logického poradia. Ako matematici vieme, že nezodpovedaných otázok nikdy nebude málo. Naproti tomu študenti všeobecne vnímajú matematiku ako niečo, už nakrájané a vysušené – len sa nedostali príliš ďaleko pri trávení. Matematiku by sme mali prezentovať našim študentom spôsobom, ktorý je súčasne zaujímavý a ponáša sa na skutočné situácie, s akými sa študenti stretnú v živote – bez zaručenej odpovede.“

PodĎakovanie

Tento výskum čiastočne podporili dva granty KEGA, 012UK-4/2018 a 060UK-4/2018.

Literatúra

- [1] AAMODT, S., WANG, S. *Welcome to Your Brain*. Bloomsbury, 2009.
- [2] ALTSHULLER, G. *The Innovation Algorithm: TRIZ, systematic innovation and technical creativity*. Technical Innovation Center Worcester, 1999.
- [3] ALTŠULLER, G. S. *Co na to vynálezce?* Vyd. Bohuslav Bušov, VUT Brno, 2008.
- [4] BABINSKA, M., DILLINGEROVA, M., KORENOVA, L. AR application and future mathematics teachers. In Prodomou, T. *Augmented reality in educational settings*. ISBN 978-90-04-40883-8. s. 236-263. Leiden: Brill, 2019.
- [5] BERGER-HALADOVÁ, Z., FERKO, A. Towards augmented reality educational authoring. S. 587-608. In: *E-learning and STEM Education*. Katowice, 2019. ISBN 978-83-66055-11-7.
<https://us.edu.pl/wydzial/wsne/wp-content/uploads/sites/20/2020/01/E-learning-11.pdf>.
[online, cit. 27.novembra 2020]
- [6] BIMBER, O., RASKAR, R. *Spatial Augmented Reality: Merging Real and Virtual Worlds*. A K Peters/CRC Press 2005. <http://complexrhretoric.blogspot.com/2008/09/free-book-download-bimber-and-raskar.html> [online, cit. 27. novembra 2020]
- [7] BLYTHE, M. et al. ed. *Funology, From Usability to Enjoyment*. Springer, 2004.
- [8] BOHDAL, R. Hardware for Augmented & Mixed Reality. History, overview, basic principles & used technology. In Prodomou, T. *Augmented reality in educational settings*. ISBN 978-90-04-40883-8. S. 410-444. Leiden: Brill, 2019.
- [9] BOHDAL, R. *Zariadenia pre rozšírenú a virtuálnu realitu*. FMFI UK Bratislava, 2020.
- [10] BONDER, N. *Jidiše kop*. Knižní klub, 2008.
- [11] CAMERON, F., KENDERDINE, S. *Theorizing digital cultural heritage: A critical discourse*. MIT Press, 2010.
- [12] DRAAISMA, D. *Metafory paměti*. Mladá fronta, 2003.
- [13] FERKO, A., BÁTOROVÁ, M. Questionable questions. Pozvaná prednáška. 17. Konferencia košických matematikov. Herľany 2016.
https://umv.science.upjs.sk/files/Konferencie/Herlany_2016_zbornik.pdf [online, cit. 27. novembra 2020]
- [14] FERKO, A., BÁTOROVÁ, M. Local and Global Interestingness in Virtual Time for Teaching using Wrong Metaphors. Plenárna prednáška. MIDK, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia. Bratislava, 2016.

- [15] FORISEK, M., STEINOVA, M. *Explaining Algorithms Using Metaphors*. Springer 2013.
- [16] GLASSNER, A. *Interactive storytelling: Techniques for 21st century fiction*. AK Peters/CRC Press, 2009.
- [17] HRUBÝ, D., PÓLYA, G. Jak to řešit? Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod. In *Matematika – fyzika – informatika* 26/2017, p. 240
http://mfi.upol.cz/files/26/2603/mfi_260_3_240.pdf . [online, cit. 27.novembra 2020]
- [18] HUGHES, J. F. et al. *Computer Graphics: Principles and Practice (3rd Edition)*. Addison-Wesley Professional, 2013.
- [19] HURON, D. *Music-engendered laughter: an analysis of humor devices in PDQ Bach. Proceedings of the 8th International Conference on Music 2004*. s. 700–704.
- [20] CHALMOVIANSKÝ, P. et al. *Zložitosť geometrických algoritmov*. UK Bratislava, 2001.
- [21] KAHNEMAN, D. *Myšlení rychlé a pomalé*. Jan Melvil publishing , 2012.
- [22] KAUFMANN, H. Construct3d – overview. <https://www.youtube.com/watch?v=QvsN-5GykhA>. [online, cit. 27. novembra 2020]
- [23] KAUFMANN, H., SCHMALSTIEG, D., WAGNER, M. Construct3d: a virtual reality application for mathematics and geometry education. *Education and information technologies*, 5(4): s. 263–276, 2000.
- [24] KOESTLER, A. *The Act of Creation*. Macmillan, 1964.
- [25] KOMENSKÝ, J. A. *Orbis pictus*. Levné knihy Kma, 2001.
- [26] KOREŇOVÁ, L., KOŽUCHOVÁ, M., DOSTÁL J., LAVICZA, Z. Applications of Augmented Reality Apps in Teaching Technical Skills Courses. In Prodromou, T. *Augmented reality in educational settings*. ISBN 978-90-04-40883-8. s. 383–409. Leiden: Brill, 2019.
- [27] KOSTRUB, D., BERGER-HALADOVÁ, Z., BÁTOROVÁ, M., FERKO, A. *Augmented Reality a vyučovanie, výber z teórie a autorských postupov*. FMFI UK Bratislava, 2020.
- [28] KOSTRUB, D., OSTRADICKY, P. A qualitative methodology framework of investigation of learning and teaching based on the USE of augmented reality. *ICETA 2019, 17th IEEE International conference on emerging elearning technologies and applications : Information and communication technologies in learning*, s. 425-440, 2019.
- [29] KRUEGER, M. W., GIONFRIDDO, T., HINRICHSEN, K. Videoplace – an artificial reality. In *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems*, CHI '85, s. 35–40. ACM, 1985.
- [30] LACKO, J. Cultural Heritage Objects in Education by Virtual and Augmented Reality. In *Augmented Reality and Virtual Reality*, s. 175-187. Springer, Cham, 2019.
- [31] LAKOFF, G., JOHNSON, M. *Metaphors We Live By*. University of Chicago Press, 2003.
- [32] PAPAGIANNAKIS, G. Mixed reality gamified presence and storytelling for virtual museums. In: Lee, N. ed. *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*. Springer, 2018.
- [33] PÓLYA, G. *Jak to řešit?* Český překlad O. Kowalski. Praha: MatfyzPress 2016.
- [34] PRODROMOU, T. *Augmented reality in educational settings*. Brill | Sense, 2019.

- [35] PUENTEDURA, R. R. *SAMR: A contextualized introduction*.
<http://hippasus.com/rrpweblog/archives/2014/01/15/SAMRABriefContextualizedIntroduction.pdf>. [online, cit. 27. novembra 2020]
- [36] QVORTRUP, L. ed. *Virtual interaction: interaction in virtual inhabited 3D worlds*. Springer, 2001.
- [37] RIZVIC, S., SADZAK, A., FERKO, A. et al. A piece of peace in sWARajevo: Locally and globally interesting stories for virtual museums. *Digital Heritage* 2, s. 445-445, 2013.
- [38] SALAMON, J. *Praktické riešenia problémov vo veku 6-14 rokov*. SPN, 1984.
- [39] SCHMALSTIEG, D. *Portal ARbook*. <https://arbook.icg.tugraz.at/> [online, cit. 27. novembra 2020]
- [41] SCHMALSTIEG, D. HOLLERER, T. *Augmented reality: principles and practice*. Addison-Wesley Professional, 2016.
- [41] SHNEIDERMAN, B., PLAISANT, C. *Designing the user interface: strategies for effective human-computer interaction*. Pearson Education, 2005.
- [42] THURSTON, W. P. *Mathematical Education*. <https://arxiv.org/pdf/math/0503081.pdf> [online, cit. 27. novembra 2020]

RNDr. Zuzana Berger Haladová, PhD.

Katedra aplikovanej informatiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina, 84248 Bratislava, SR
e-mail: haladova@fmph.uniba.sk

RNDr. Martina Bátorová, PhD.

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina, 84248 Bratislava, SR
e-mail: martina.batorova@fmph.uniba.sk

Doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina, 84248 Bratislava, SR
e-mail: ferko@fmph.uniba.sk

Equidistant sets

Daniela Velichová

Abstract

Basic concept of an equidistant set to a manifold reveals a bundle of problems connected to intrinsic geometric properties of the resulting geometric figure. Interesting problems of classical differential geometry are tasks to find a set of points equidistant to another set, curves equidistant to given curve in plane or on a surface, or to find surfaces equidistant to a given sets of points. A large variety of equidistance definition novelty forms were introduced recently in different applications. Some of these issues are discussed in this paper, and few open questions are addressed, while possible approach ideas how to find their answers are suggested and shortly analysed.

Keywords: equidistant set of points, locus of points, offset, medial axis, median curve, mediatix curve, almost equidistant set

Abstrakt

Základný pojem ekvidistanta variety odhaľuje mnoho problémov súvisiacich s vnútornými geomerickými vlastnosťami výsledného geometrického útvaru. Klasická diferenciálna geometria rieši zaujímavé problémy, ako určiť množinu bodov v rovnakej vzdialenosti od inej množiny, nájsť krivky ekvidistantné s danou krivkou v rovne alebo na ploche, či nájsť plochy ekvidistantné k danej množine bodov. Dnes sa objavuje tiež mnoho nových foriem definície ekvidistantnej množiny v súvislosti s rôznymi aplikáciami. Niektoré z nich sú spomenuté v tomto článku, kde tiež uvedieme zopár otvorených otázok a stručnú analýzu možných prístupov k ich riešeniu.

Kľúčové slová: ekvidistančná množina bodov, miesto bodov, ofset, mediálna os, stredná, takmer ekvidistančná množina

1 Basic meaning of equidistance concept

The adjective "equidistant" originated from Late Latin word *aequidistantem* (*aequī* = equal + *distantem* = distant) and Middle French word *équidistant*. In general, "equidistant" means equally distant from one or more objects, or located at the same distance, occupying a position in equal distance between several objects. An equidistant set (also called *midset*, or a *bisector*) is a set each of whose elements has the same distance (measured using some appropriate distance function) from two or more sets.

Distance of point x from the set A is defined as follows

$$d(xA) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

where $d(x, a)$ is value of a positive real function determining distance of two points.

Let $Z \subset \mathbb{R}^2$ be a compact set. For any $d > 0$ we can define d -border D_d of the set Z as

$$D_d = \{x : \text{dist}(x, Z) = d\}$$

For all, up to countably many d , any component of D_d is a point, regular simple curve arc or a simple closed curve. It was proved that D_d is a one-dimensional manifold for almost all d .

The serious study of the properties of equidistant sets as mathematical objects was initiated only quite recently, in 1970's, see [1, 2]. Set of points equidistant to each other depends on the space dimension, as there are 2 such points on a line, 3 points in a plane, then 4 points in a space, and so on.

Let A and B be two non-empty subsets of the metric space (X, d) . Set of all points $x \in X$ such that $\text{dist}(x, A) = \text{dist}(x, B)$ is the equidistant set of A and B determined by

$$\{A = B\} = \{x \in X: d(xA) = d(xB)\}$$

It was proved that if A and B are continuous subsets of the metric space X that is n -dimensional Euclidean space $\mathbf{E}^n$, then equidistant set of A and B is also a continuous set, [3].

Some authors studied the function that defines distance, $d_A: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$, in order to investigate when does its level set define a manifolds of dimension $n - 1$. If A and B are disjoint closed connected subsets of $\mathbf{E}^2$, then $\{A = B\}$ is a one-dimensional manifold. Analogous result is false in $\mathbf{E}^3$, see [4, 5]. These topological manifolds in $\mathbf{E}^n$ are semi-concave surfaces, because function for calculation of distances $d(x) = \text{dist}(x, F)$ is a difference of two convex functions and it has no stationary points in $\mathbf{E}^n \setminus F$, for closed subsets $F \subset \mathbf{E}^n$, according to [6].

One of the results that appeared quite recently is the proof of the statement that d -boundary $D_d = \{x: \text{dist}(x, Z) = d\}$ of a compact set $Z \subset \mathbf{R}^2$ are closed absolutely continuous curves for d greater than a specific constant depending on the set Z . It has been also proved in [7] that D_d is the trajectory of solution to the Cauchy problem of a differential equation with a discontinuous right-hand side.

To find a locus of points equidistant to a fixed geometric figure (line, curve, surface or discrete set of points) is a geometric construction technique frequently used in many applications. Median axis (or Bloom topological skeleton) of an object (whose closure is also referred to as the cut locus) is a particular example used in shape analysis.

Basic concept of an equidistant to a manifold reveals a bundle of problems related to intrinsic geometric properties of resulting geometric figure. The study of equidistant sets could be even more interesting in the case of the background metric space as a non-Euclidean space with non-Euclidean metric. To find a curve equidistant to a given curve on a general surface seems to be an interesting problem of classical differential geometry with left open questions. Some of these issues will be addressed in the paper, while possible geometric approach to find answers will be presented with a short analysis of arising theoretical and calculation problems.

Generalisation of the concept of equidistance has been introduced recently, with some new results concerning almost-equidistant sets of points and their cardinality.

2 Equidistant curves in the plane

Conic sections can be defined as equidistant curves to two circles, Fig. 1. Assuming that these circles could be also regarded as degenerated to points or lines, parabola is defined straightforwardly. Equidistant sets (central) can be regarded as a natural generalisation of conic sections, considering multifocal sets instead of circles. Approximative versions of equidistant sets were lately introduced that are of interest for computer simulations, Fig. 2, from [8].

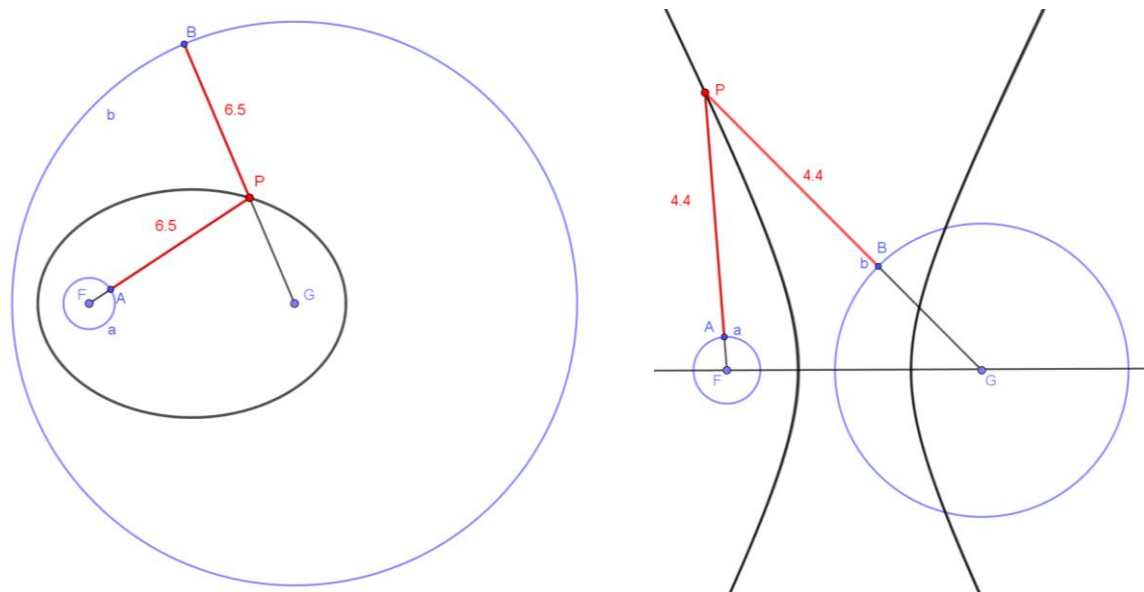


Fig. 1. Ellipse and hyperbola determined as equidistant curves of 2 circles

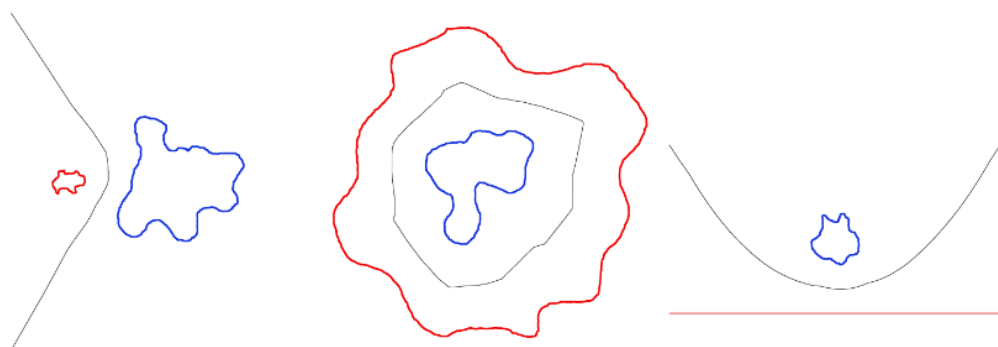


Fig. 2. Generalised conic sections

It was proved that any convex closed planar curve can be given as an equidistant set, i.e. the set of equidistant curves contains the entire class of convex closed planar curves, as published with detailed proofs in [9]. In this sense, the equidistance is a certain generalization of the convexity.

Nice results have been approached in [10], where authors strive to find equidistant curves to particular types of conic sections and a straight line. Full classification with respect to the mutual position of respective conic sections and lines in various positions is presented, and analytic representations of the resulting equidistant curves are derived based on the coordinate geometry methods. Interesting forms of equidistant curves are determined, while some original examples from the paper are presented in Fig. 3. These examples are in accordance with the theoretical proofs declared in [6, 7]. They are confirming the fact that equidistant set of points $\{A = B\}$ is a one-dimensional manifold for disjoint closed connected subsets of $\mathbf{E}^2$. The other fact about d -boundary of a compact set $Z \subset \mathbf{R}^2$, declaring that this is a closed absolutely continuous curve for certain values of d depending on the set Z , can be illustrated here too, for special position of sets – circle A and line B being a tangent to the circle A .

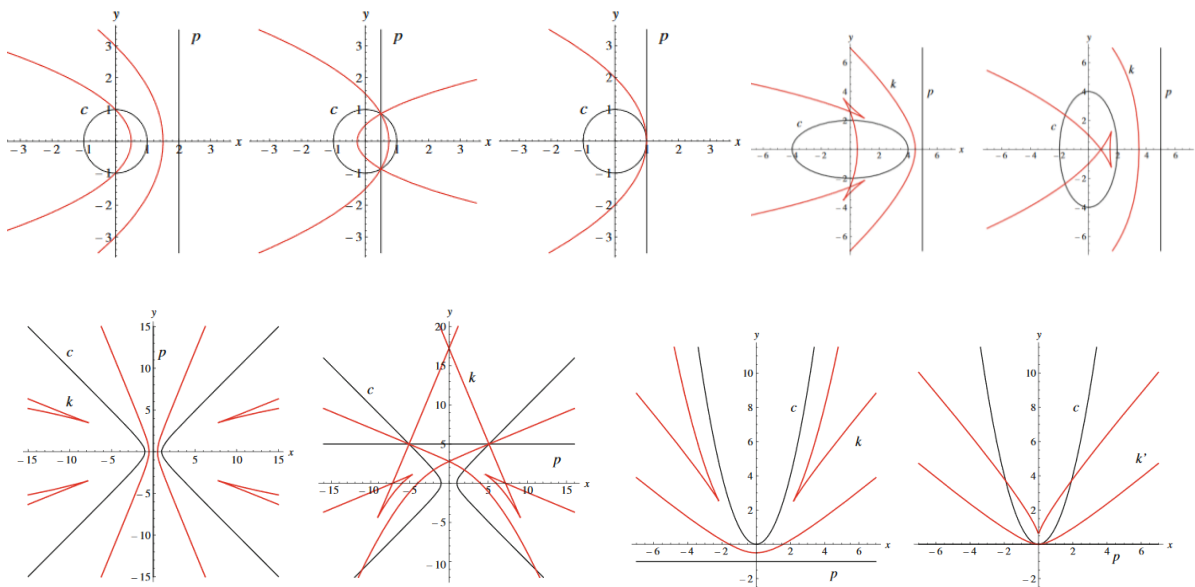


Fig. 3. Figures from the paper published in [9]

Gottfried Leibniz in 1692 considered the curves at a distance $k > 0$ from curve C to be parallel to C . These curves had to be constructed as follows:

- for each point P on C , let n be line perpendicular to tangent t to C at P
- there are 2 points P^* and P' on n whose distance from P is k
- the set of all points constructed in this way forms the 2 parallel curves.

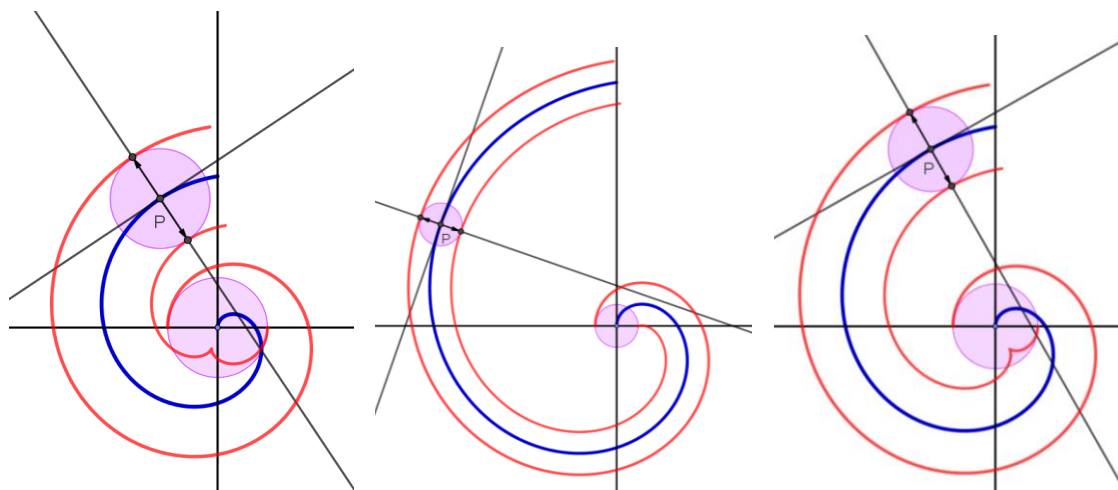


Fig. 4. Parallel curves to spiral

A parallel of a curve is the envelope of a family of congruent circles centered on the curve.

This definition of parallel curve is not entirely equivalent to the first one, stating that it is “curve whose points are at a fixed normal distance from a given curve“, as the latter one assumes smoothness, which the former one does not.

Intrinsic geometric properties of parallel - equidistant curves can be studied by means of differential geometry. Equidistants are regular curves for distance

$$0 < k < \frac{1}{\kappa_{\max}} \text{ and } > \frac{1}{\kappa_{\min}},$$

where $\kappa_{\max}$ is the maximal first curvature

$\kappa_{\min}$ is the minimal first curvature.

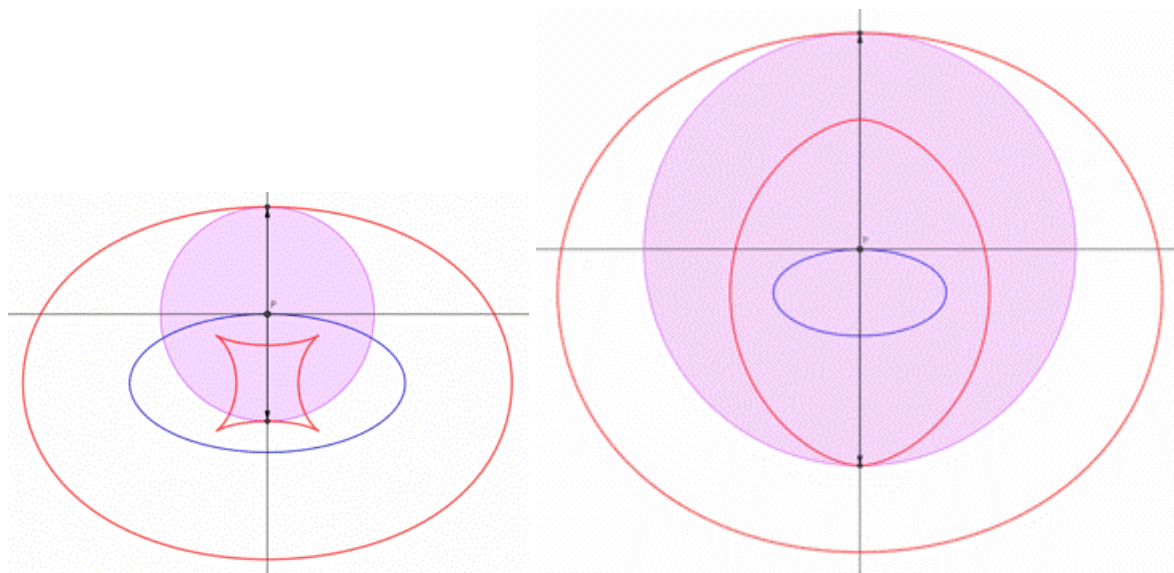


Fig. 5. Equidistant (parallel) curves to ellipse in distance determined as radius of the pink disc

3 Equidistant curves in space and on surfaces

Suppose Leibniz construction be applied to curves in 3-space. Two possible resulting curves parallel to a helix and constructed with respect to Leibniz algorithm are depicted in Fig. 6.

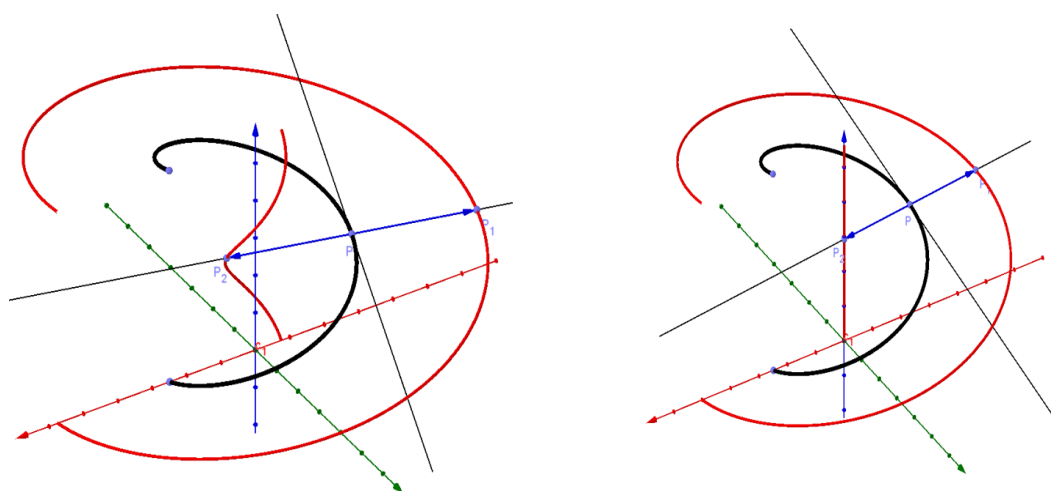


Fig. 6. Curves parallel to cylindrical helix in specific distances

For a smooth parametric curve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ with the regular parameter $t \in \langle 0,1 \rangle$, its parallel curve $\mathbf{r}_p(t)$ in the given distance $k > 0$ is defined by equation

$$\mathbf{r}_p(t) = \mathbf{r}(t) + k \cdot \mathbf{n}(t), \quad t \in \langle 0,1 \rangle.$$

Equidistant set to a space curve C for a given distance d is a tubular surface that is an envelope surface with generating curve C determined by one-parametric set of congruent spheres of radii equal to given distance d and centred on C .

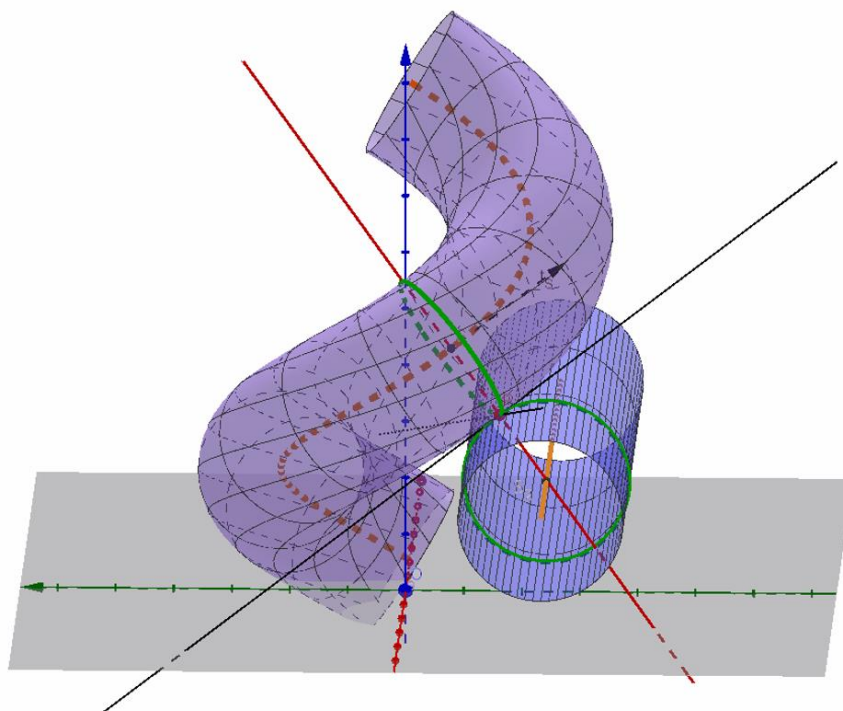


Fig. 7. Point in the minimal distance d_{AB} from the helix and straight line

How can be defined an equidistant set determined by two curves A and B in $\mathbf{E}^3$?

Is this set $\{A = B\}$ necessarily a connected surface for connected space curves A and B ?

How to construct set $\{A = B\}$?

The following two steps can be applied:

1. Find the point x in $\mathbf{E}^3$ which is at the minimal distance to both curves A and B

$$d_{AB} = \min \{ d(x) : \inf \{ d(xa) : a \in A \} = \inf \{ d(xb) : b \in B \} \}$$

2. For any other real positive $d > d_{AB}$ find such points x in $\mathbf{E}^3$, which are in the distance d from both curves A and B . All these points are points of the intersection curve of two tubular surfaces with radius d that are equidistant sets to the space curves A and B . Intersection curve for a specific value of d is a d -level curve, Fig. 8.
3. All d -level curves from the point 2. form one system of curves on the resulting surface that contains the equidistant set of points determined by two curves A and B in $\mathbf{E}^3$.

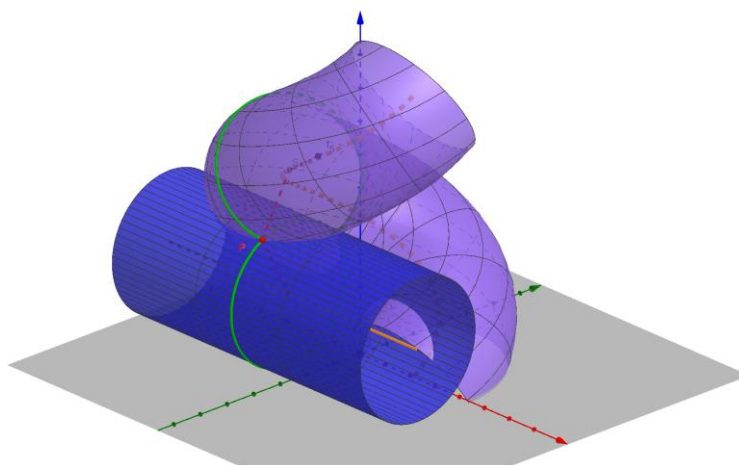


Fig. 8. Point at the distance d greater then minimal distance d_{AB}

It can be a relatively easy task to find equidistant curves to special curves on elementary surfaces such as quadratic surfaces, surfaces of revolution or helicoids. Often these curves belong to one parametric system of curves on the respective surface, see specific examples of surfaces with the net of paranetric curves in Fig. 9. However, this could be a complex problem on general 2-manifolds in E^3 with many open questions. Some results can be seen in Fig. 10.

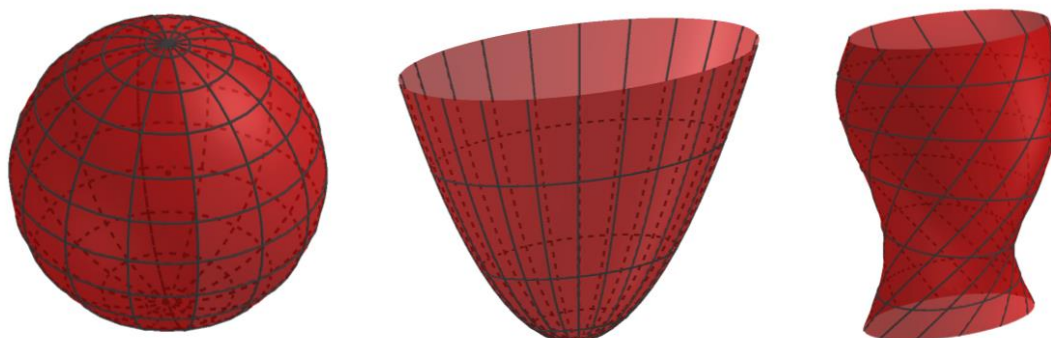


Fig. 9. Parallel circles on sphere, parallel ellipses on elliptic paraboloid, and parallel helices on helicoid.

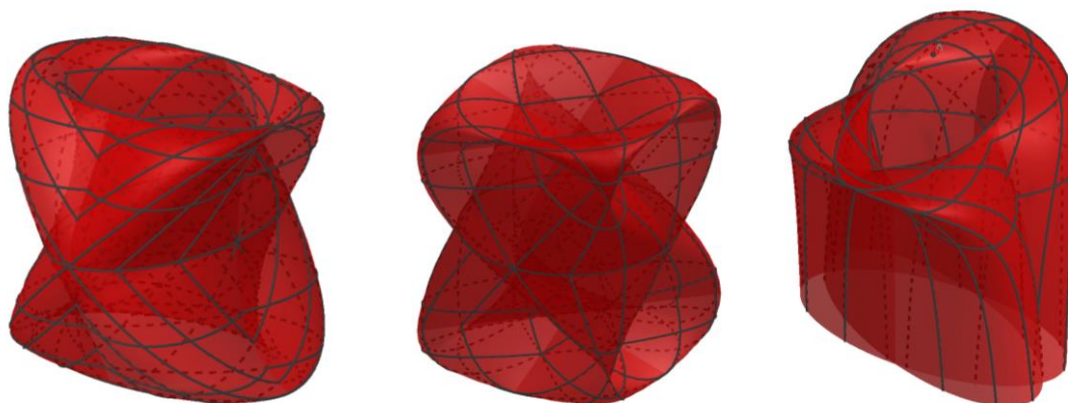


Fig. 10. Systems of parallel curves on general surfaces

4 Other definitions of equidistant sets

Mediatix curve of two sets is the set of points at equal distance from the two sets, while the distance of a point to a set is defined as above, being the infimum of the distances to points in said set. In case of two curves the mediatix curve is in general included in the equidistant curve. Mediatix curve is a basic concept in the mediatix filamentation method, which is an iterative procedure that decomposes image shapes in filaments over their intensity ridgeline along their main direction using perpendicular bisectors. From this decomposition several morphological features can be derived, such as the length along the main direction and thickness of the object and, for curved objects, estimates of its center of curvature and curvature radius, [11].

Medial axis (or Harry Blum topological skeleton) of an object (whose closure is also referred to as the cut locus) is an important tool for many applications including shape detection and analysis, domain decomposition, geometric compression and point cloud modeling with the Medial Axis Transform. It is a set of points equidistant from the object boundaries, few examples can be seen in Fig. 11.

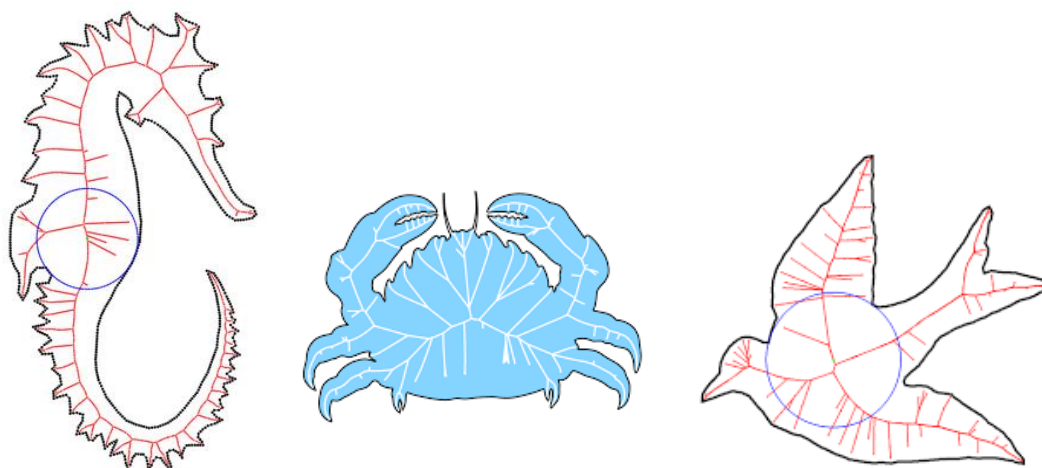


Fig. 11. Various medial axes – source
http://pages.cs.wisc.edu/~csverma/CS558_11/MedialAxis.html

The median curve (diametral) of two curves M_1 and M_2 with a pole P is the locus of the middle of points M_1 and M_2 , while M_1M_2 passes by P , and $M_1 \in M_1$, $M_2 \in M_2$.

The median curve (diametral) of two curves M_1 and M_2 along a line d is the locus of the middle of points M_1 and M_2 , while M_1M_2 remains parallel to d .

Median curve along x-axis of semicircle

$$\mathbf{r}(t) = (-a \tanh t, a / \cosh t), t \in (-\pi, \pi), a \in R$$

and tractrix

$$\mathbf{r}(t) = (a(t - \tanh t), a / \cosh t), t \in (-\pi, \pi), a \in R$$

is a part of curve called syntactrix, which is parametrically determined by vector equation

$$\mathbf{r}(t) = \left(a \left(\frac{t}{2} - \tanh t \right), a / \cosh t \right), t \in (-\pi, \pi).$$

Syntraktrix was firstly considered by Giovanni Poleni in 1729, then named by Ricatti in 1755 (while it is also known as Poleni curve or convict's curve), see in Fig. 12, on the right.

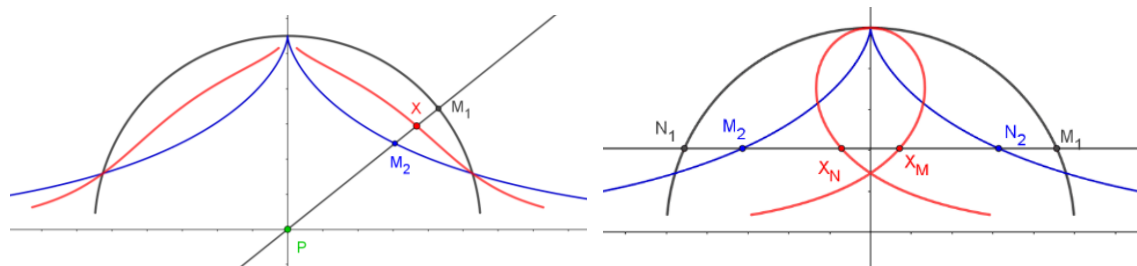


Fig. 12. Median of semicircle and traktrix with pole P (on left), along axis x (on right)

Tractrix is a curve considered by Claude Perrault in 1670, later studied by Newton in 1676, Huygens in 1692 and Leibniz in 1693. It is also called equitangential curve, due to the fact, that a specific line segment on its tangents is constant along the curve. Traktrix can be therefore defined also as tractory C travelled along by a point M of a base curve C_0 (line) travelled along point M_0 , while the line segment MM_0 remains constant and the line MM_0 remains tangent to C , several examples see in Fig. 13. Shape of traktrix can be illustrated as be a part of the trajectory of the back wheels of a vehicle the front wheels of which describe a line, Fig. 13.

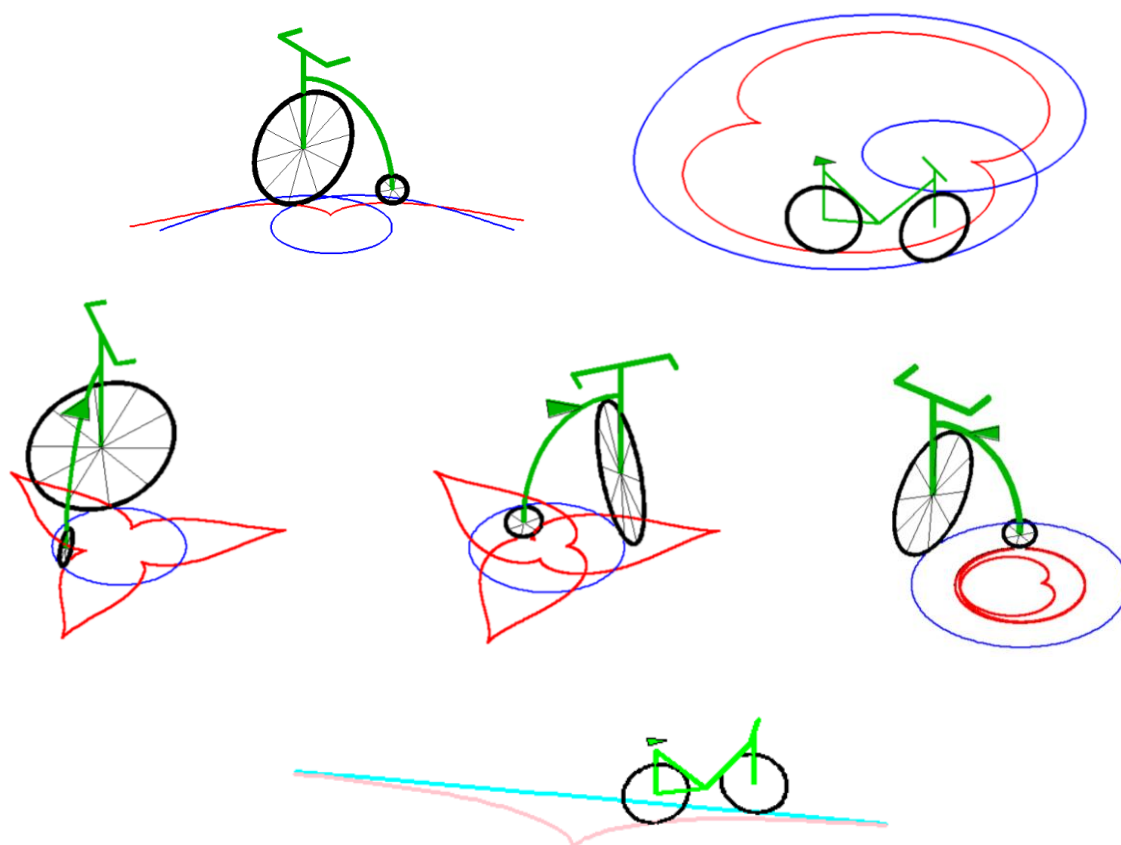
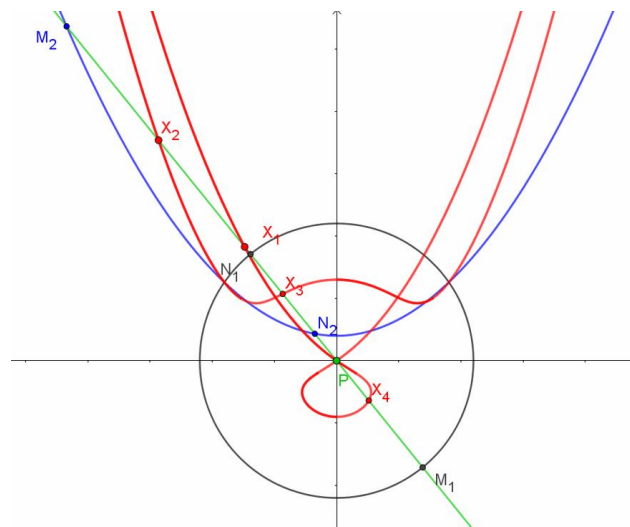


Fig. 13. Nefroid as tractory of Pascal's limaçon (in the first row), tractories of circle (in the middle row), traktrix as tractory of line (in the last row) – source with animated figures <https://mathcurve.com/>.

Fig. 14. Median of circle and parabola with pole P

Sets defined as locus of the points which are at constant distance along the normal vector from the generator curves/surfaces are called offsets. In the field of computer aided geometric design, offset curves and surfaces have got considerable attention since they are widely used in various practical applications such as tolerance analysis, geometric optics, robot path-planning, and others. More specific data on determination and application of offsets can be found in [12, 13].

One possible extension of the basic concept of offset curve is the so called generalized offset determined by a variable offset distance and direction. For a planar case, smooth parametric curve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ with the regular parameter $t \in \langle 0,1 \rangle$, its generalized offset curve $\mathbf{r}_0(t)$ with the offset distance and direction depending on functions $d_1(t)$ and $d_2(t)$ is defined by equation

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}(t) + d_1(t) \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} + d_2(t) \mathbf{n}(t).$$

The generalized offset direction depends on vectors $d_1(t) \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ and $d_2(t) \mathbf{n}(t)$, while the offset distance equals to $\sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t)}$. Properties of generalized offset curves are described in [14], some examples are presented in Fig. 15.

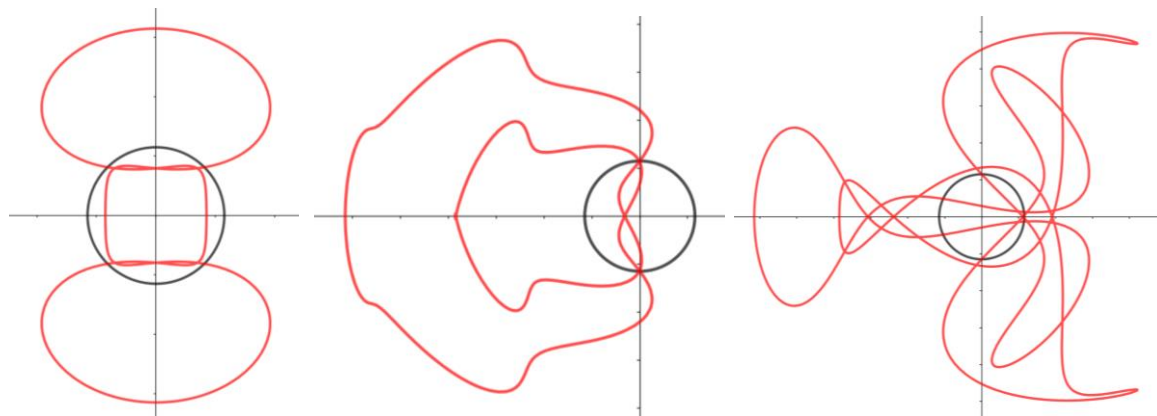


Fig. 15. Generalised offsets of a circle

Extended concept of equidistant set is the almost-equidistant set. A finite set of points in $\mathbb{R}^d$ is called almost-equidistant if among any three distinct points in the set, some two of them are at unit distance. It was proved that an almost-equidistant set in $\mathbb{R}^d$ has cardinality at most $5d^{13/9}$. This novelty results are described in papers [15, 16], while almost-equidistant set of points is the structure presented in Fig. 16, called Moser spindle.

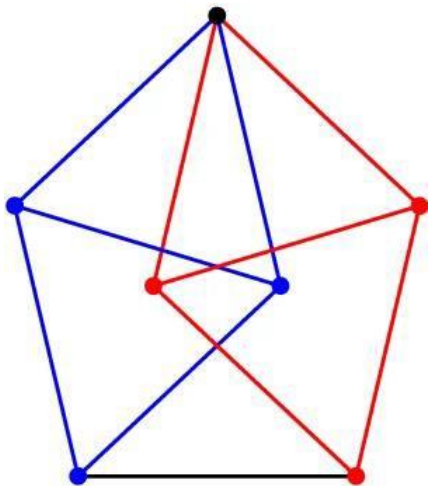


Fig. 16. Moser spindle

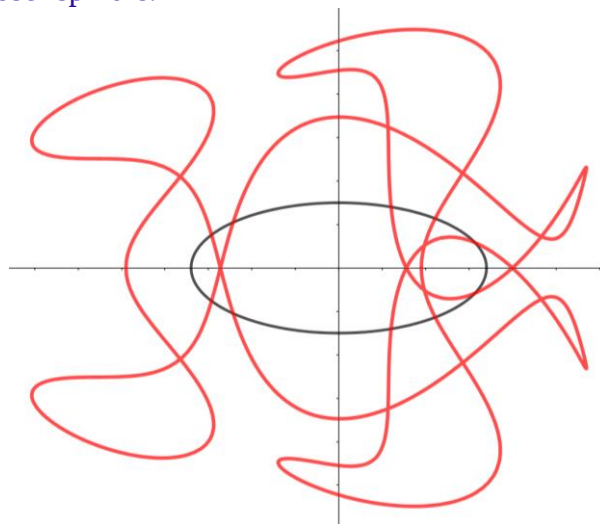


Fig. 17. Generalized offset of an ellipse

5 Summary

The adjective "equidistant" is widely used in geometry and in many related subjects. Original meaning has acquired many variations resulting in numerous interesting applications. On the other hand, some of the easily articulated tasks are leading to complex problems with unforeseen solutions. Concept of equidistance provides a wide field for further investigation and theoretical research, in addition to numerous practical applications. Among other, the concept of generalized offset curve in particular, as it serves as an extremely flexible modelling tool for curve shaping in computer art and design, see example in Fig. 17.

Note

This article is updated and extended version of the paper published in Slovak language in Proceeding of the Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020, [17]. Video recording of the paper contents was part of the on-line presentations at the conference organized in Czech Republic, Pardubice, September 7 – 10, 2020 before its publication in the proceedings.

References

- [1] BROWN, M. Sets of constant distance from a planar set. In *Michigan Mathematical Journal*. Vol. 19 (1972), pp. 321-323.
- [2] GARIEPY, R., PEPE, W. D. On the level sets of a distance function in a Minkowski space. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 31 (1972), pp. 255-259.

- [3] WILKER, J. B. Equidistant sets and their connectivity properties, In *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 47, No. 2 (1975), pp. 446-452.
- [4] FERRY, S. When ε -boundaries are manifolds. In *Fund. Math.* Vol. 90 (1976), pp.199-210.
- [5] LOVELAND, L. D. When midsets are manifolds. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 61 (1976), pp. 353-360.
- [6] FU, J. H. G. Tubular neighborhoods in Euclidean spaces. In *Duke Mathematical Journal*, Vol. 52 (1985), pp. 1025-1046.
- [7] PIKUTA, P. On sets of constant distance from a planar set. In *Topological Methods in Nonlinear Analysis – Journal of the Juliusz Schauder Center*, Vol. 21 (2003), pp 369-374.
- [8] PONCE, M., SANTIBÁÑEZ, P. On equidistant sets and generalized conics: the old and the new. In *The American Mathematical Monthly*. **121** (1), 2014, 18-32.
- [9] VINCZE, C. On convex closed planar curves as equidistant sets. In *Metric Geometry* (2017), n. pag.
- [10] ŽLEPALO KATIĆ, M., JURKIN, E. Equidistant sets og conic and line. In *ICGG 2018 – Procedings of the 18th International Conference on Geometry and Graphics*, Milan, Italy. Advances in Intelligent systems and Computing, Springer. Vol. 809, n. pag.
- [11] BOM, C. R., MAKLER, M., de ALBUQUERQUE, M. P. Mediatrix method for filamentation of objects in images. In *Instrumentation and methods for Astrophysics*. arXiv:1212.1799 [astro-ph.IM].
- [12] KRASAUSKAS, R., PETERNELL, M. Rational offset surfaces and their modeling applications. In *Nonlinear Computational Geometry*. Vol. 151 (2010), pp. 109-135.
- [13] BRECHNER, E. General tool offset curves and surfaces. In *Geometry Processing for Design and Manufacturing*, SIAM, 1992.
- [14] CHEN, X., LIN, Q. Properties of generalised offset curves and surfaces. In *Journal of Applied Mathematics*. Vol. 2014, Article ID 124240. available on-line at the address <http://dx.doi.org/10.1155/2014/124240>
- [15] BALKO, M., PÓR, A., SCHEUCHER, M., SWANEPOEL, K., VALTR. P. Almost equidistant sets. In *Graphs and Combinatorics* **36** (2020), pp. 729-754. available on-line at the address <https://doi.org/10.1007/s00373-020-02149-w>
- [16] POLYANSKII, A. On almost equidistant sets. In *Linear Algebra and its Applications*, 563 (2019), pp. 220-230.
- [17] VELICHOVÁ, D. Ekvidistanty. In *Proceedings of the Czech - Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020*, Pardubice, ČR, pp. 187-194.

doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.

Slovak University of Technology in Bratislava
Faculty of Mechanical Engineering
Institute of Mathematics and Physics
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia
e-mail: daniela.velichova@stuba.sk

On Reconstructions of Dürer's Polyhedron

László Vörös

Abstract

In Albrecht Dürer's engraving Melencolia I, a solid carved from stone is depicted, often called polyhedron by the several authors who have been dealt with possible reconstructions of this form based on supposed parameters and measurements in the picture. Most of the results cannot be justified satisfactorily or are not complete. The paper introduces some applicable geometric constructions and examinations in order to the verification of different reconstructions and the results of experiments based on new parameters or prescriptions.

Keywords: reconstruction, carved solid, Melencolia I, geometry and art

Abstrakt

V medyritine Albrechta Dürera Melencolia I je zobrazené teleso vytesané z kameňa, často označované za mnohosten autormi, ktorí sa zaoberali jeho rekonštrukciou. Väčšina autorov sa venovala rekonštrukcii tohto geometrického útvaru so zámerom zistiť jeho pravdepodobné rozmery na základe parametrov získaných meraním v obraze. Väčšinu týchto úvah však nemožno dostatočne odôvodniť, a niektoré sú neúplné. V článku uvádzame niekoľko použiteľných geometrických konštrukcií a výsledky experimentov použitím nových parametrov alebo postupov.

Kľúčové slová: rekonštrukcia, vytesané teleso, Melencolia I, geometria a umenie

1 Introduction

A solid carved from stone can be seen in Albrecht Dürer's engraving Melencolia I from the year 1514 (Fig. 1) [1]. It has two triangular and six pentagonal faces as it is depicted also in a preparatory sketch drawn by Dürer (Figure 2) [2]. It is generally accepted to regard it as a cut rhombohedron, i.e. a polyhedron with six congruent rhombic faces (rhombic hexahedron) cut by two planes perpendicular to the rotational axis of this shape. The congruent regular triangles are rotated around the axis in 180° , the congruent pentagons have a symmetry axis, one of the diagonals of the initial rhombus, usually the longer one. The reconstructions of the solid or polygon depicted in the engraving take in consideration different parameters, one of them is the acute angle of the pentagons used generally for characterization of the results advised up to now by several contributions. Summaries can be read in [3], [4] and [5]. This paper deals not detailed with these reconstructions but introduces some applicable geometric constructions in order to find or examine different solutions.

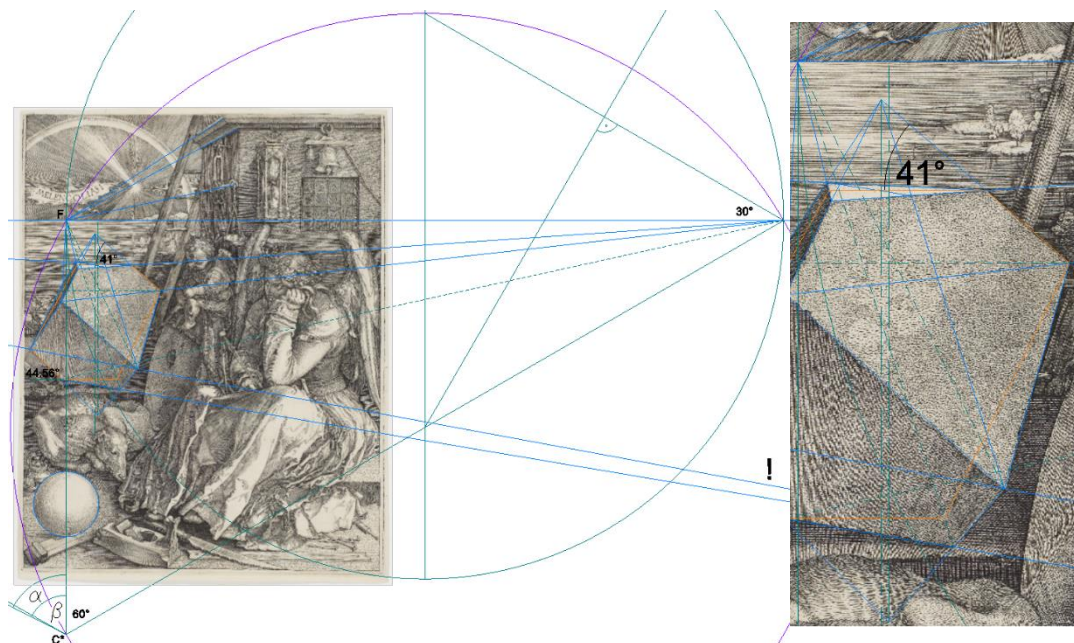


Fig. 1. Albrecht Dürer's engraving Melencolia I and the studied solid with additional editing lines according to the perspective depiction

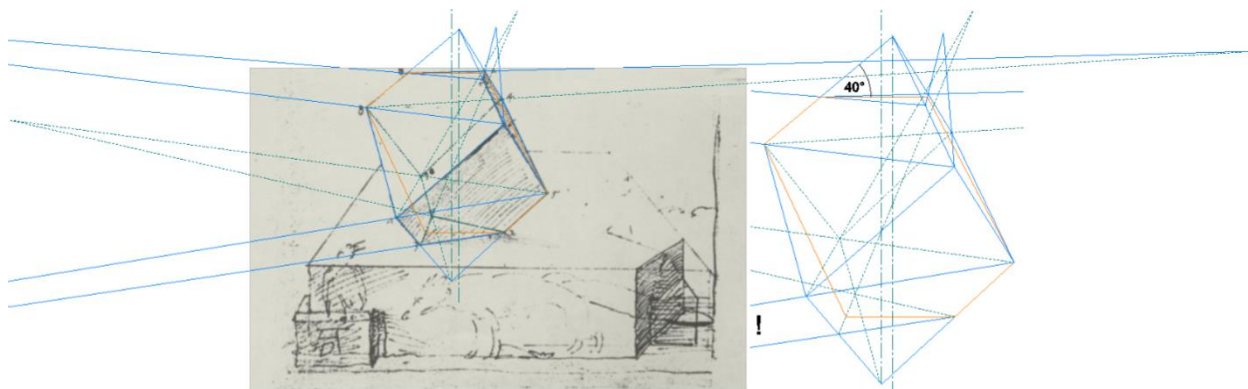


Fig. 2. Preparatory sketch drawn by Dürer to the solid depicted in the engraving and additional examination lines to the approximately perspective depiction

2 Geometric Constructions

Fig. 3 shows the geometric construction of a rhombic hexahedron (green coloured) based on a given rhombic face (black coloured and characterized by α) or on the angle β of an upper or bottom edge related to a plane perpendicular to the rotation axis of the polyhedron (blue construction lines).

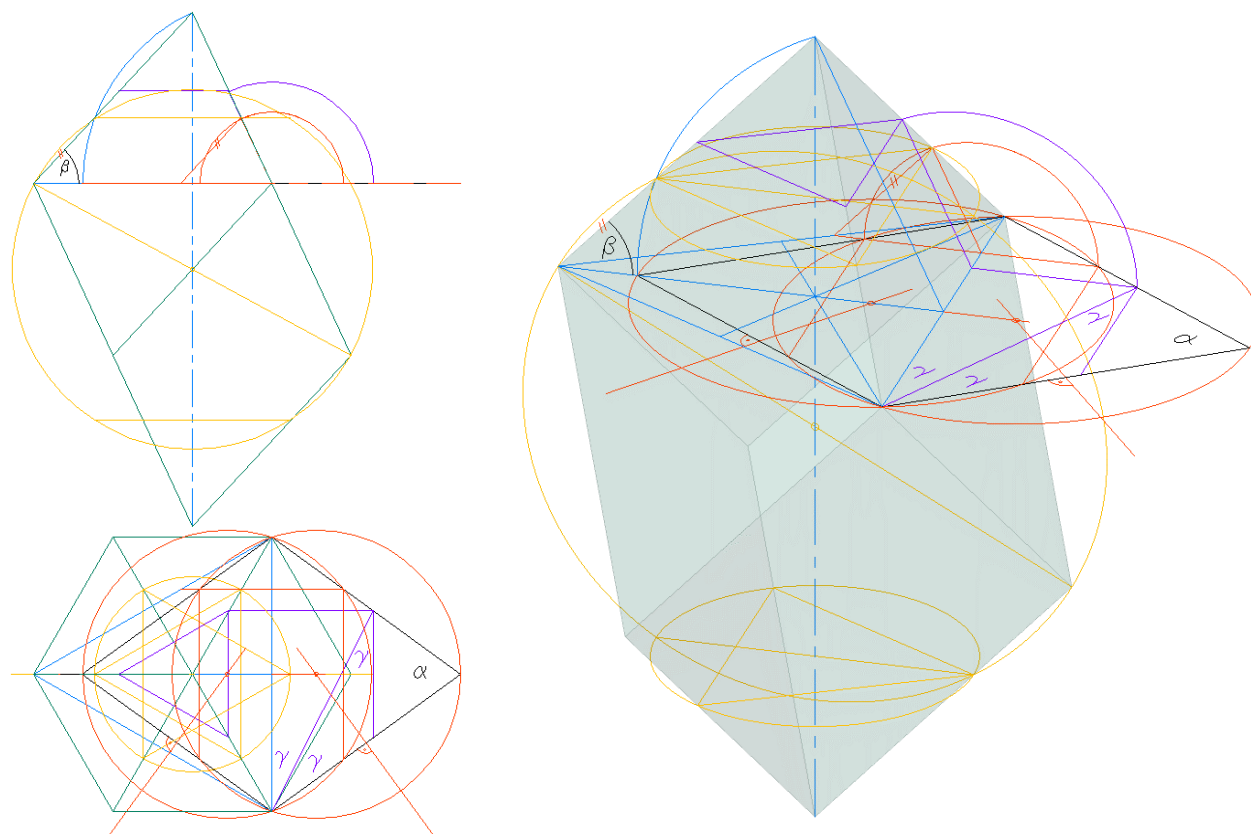


Fig. 3. Geometric constructions of truncated rhombic hexahedrons according to different parameters in front and top views as well as in orthogonal axonometric projection

Some authors suppose that Dürer tried to find a polyhedron inscribed in a sphere. The intersection point of two diagonals of the rhombohedron is the centre of the sphere. This and a not cut vertex define the radius. The plane of this vertex and of the rotation axis cuts out from the sphere a main circle (yellow). The circle and edges joining the former plane intersect each other in two vertex points of the triangular faces drawn with yellow lines. The red lines show the construction based on a pentagonal face cut out from the given rhombus and inscribed in a circle since its plane has to cut out this circle from the sphere joining the vertices of the polyhedron. It follows from the former constructions that a vertex of a triangular face replaced in this special way can be defined also as the intersection point of the following two elements. One of them is the circular path (blue arc) of the rotated vertex of the given rhombus, the other one is the polygon edge joining the plane of the path. Purple lines show how to construct the pentagon if the three short sides have to have the same length. The bisector of the angle between the diagonal and the side of the rhombus has the same angle γ related to the diagonal of the rhombus and to the short sides of the pentagon.

In Fig. 4 can be followed a construction usable for some reconstruction experiments. It is possible to model a cut rhombic hexahedron, specified in the introduction, with two Archimedean truncated tetrahedrons if these touch each other at hexagonal faces. All vertices of the combined solid join a rotation ellipsoid. This can be noticed easier and it helps to follow further constructions if the copy of this solid is rotated with 180° around the axis connecting the midpoints of the upper and bottom regular triangles. There are three planar sections consisting of the above axis and the vertices. If one of them is parallel to the image

plane of a front view then an axial orthogonal affinity can be followed. That means, the ellipsoid is pressed together with the solid along its major axis and it can become a sphere. The axis of the affinity is line **a**. Line **f**, connecting the common centre point and the midpoint of edge **e** has to be perpendicular to the line of **e**. It can be obtained using the Thales circle **t**. The major axis of the rotated ellipse can be constructed by application of the affinity in opposite direction. In similar way can be pressed a rhombohedron into a cube.

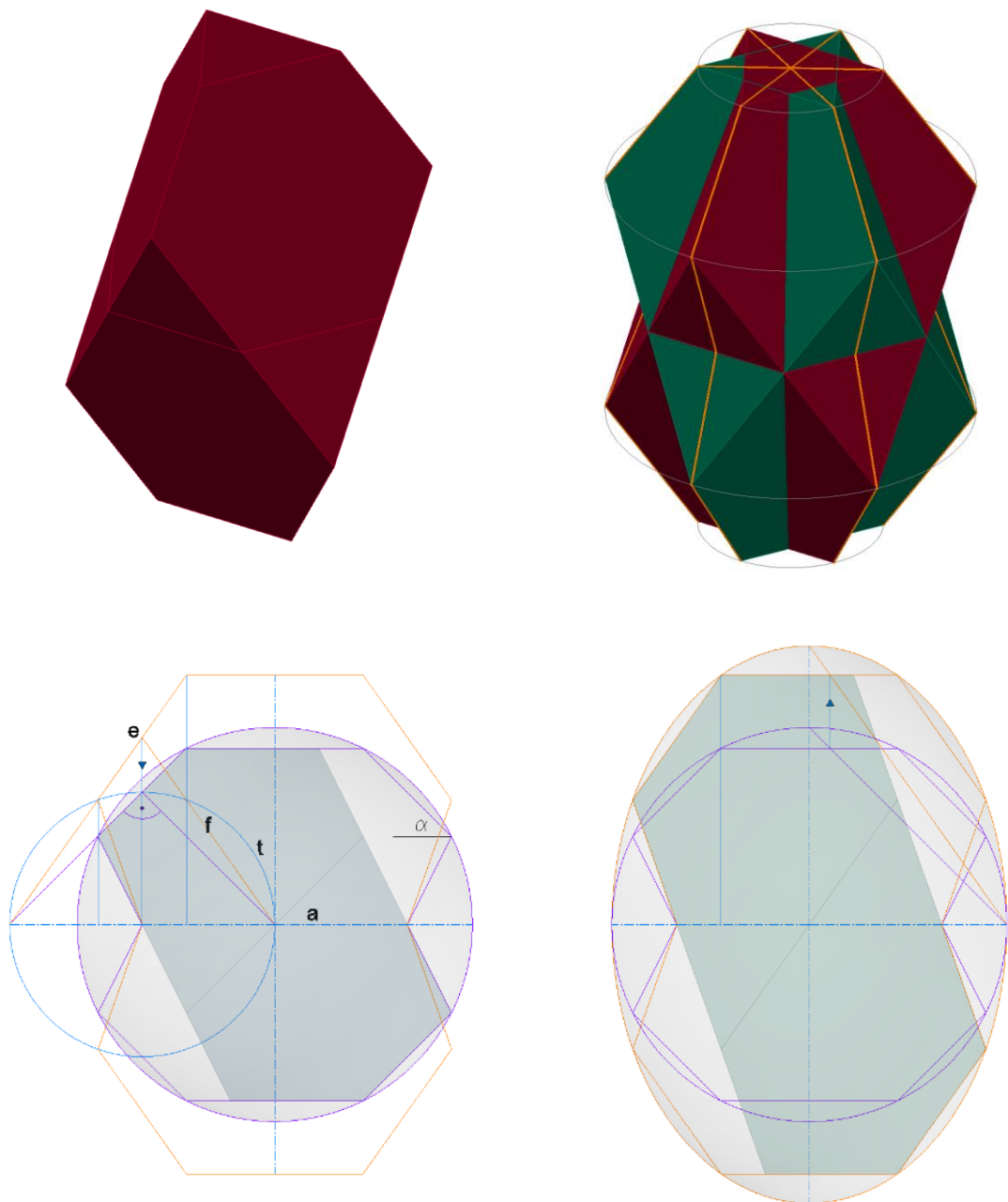


Fig. 4. How to get a cut rhombohedron inscribed in a sphere based on a general one which is modelled here with two Archimedean truncated tetrahedrons

3 Experiment for a New Reconstruction

Hans Weitzel deals detailed with Dürer's sketches found in the library of city Nürnberg [3], [4]. One of them can be seen in Fig. 5(a) as well as in Fig. 5(b) with annotations.

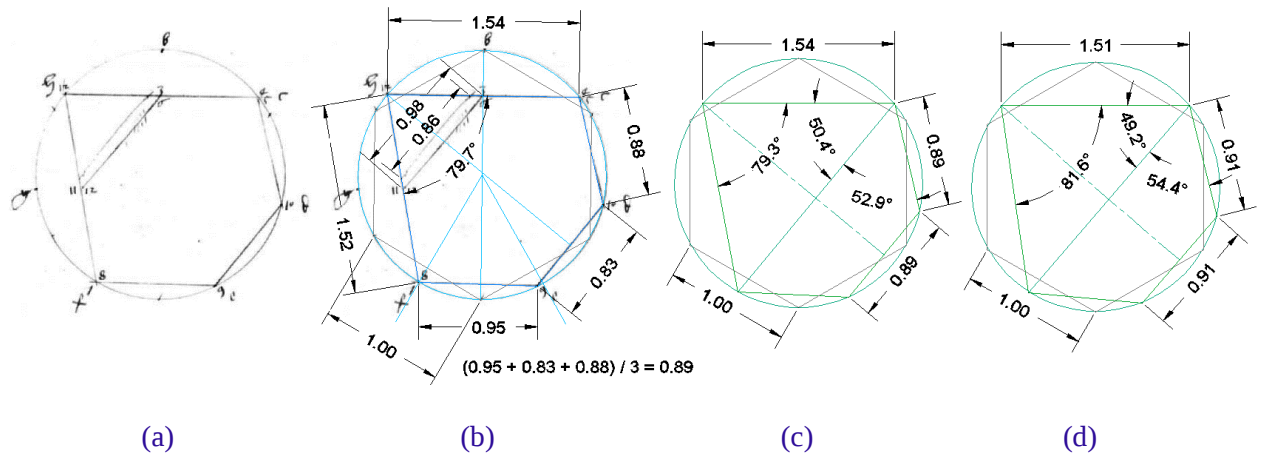


Fig. 5. An early sketch from Dürer dealing presumably also with the pentagonal face of the polyhedron (a) the original figure, (b) additional annotations, (c) the reedited shape, (d) examined result

The vertices are numbered by Dürer as if it would be the figure of a truncated tetrahedron but the circle cannot be neither the contour of the circumscribed sphere nor the circumscribed circle of the view if the depicted object is an Archimedean solid. The line erased by Dürer with crossing short lines should be the common edge of the triangular and hexagonal faces according to a real view but this segment would not have the same length with the parallel size of the hexagon in the given sketch. The improved other line want to fulfil this parameter. The vertices of the regular hexagon are only marked. Weitzel suppose that the figure shows the pentagonal face of Dürer's cut rhombohedron and accepts, based on the measured approximately 79° of the acute angle, a former reconstruction. Although the depicted pentagon cannot be completed to a rhombus. Fig. 5(c) shows an edited pentagon that try to save the parameters of the original picture, supposed that Dürer wanted to find the equal length of the three short sides by iteration. Fig. 5(d) shows a pentagon with the acute angle based on the examination described in the last section.

It can be seen that the depicted pentagons with short sides of the same length cannot be inscribed in a circle if its acute angel is fixed accidentally and had to be cut out from a rhombus.

Related to a cut rhombic hexahedron, a new pair of parameters, i.e. prescriptions can be if the short sides of the pentagonal faces have the same length, equal to this one of the triangular faces and the vertices of the polyhedron join a sphere. The geometric model needed to the computations is depicted in Fig. 6 in axonometric projection as well as in front and top views.

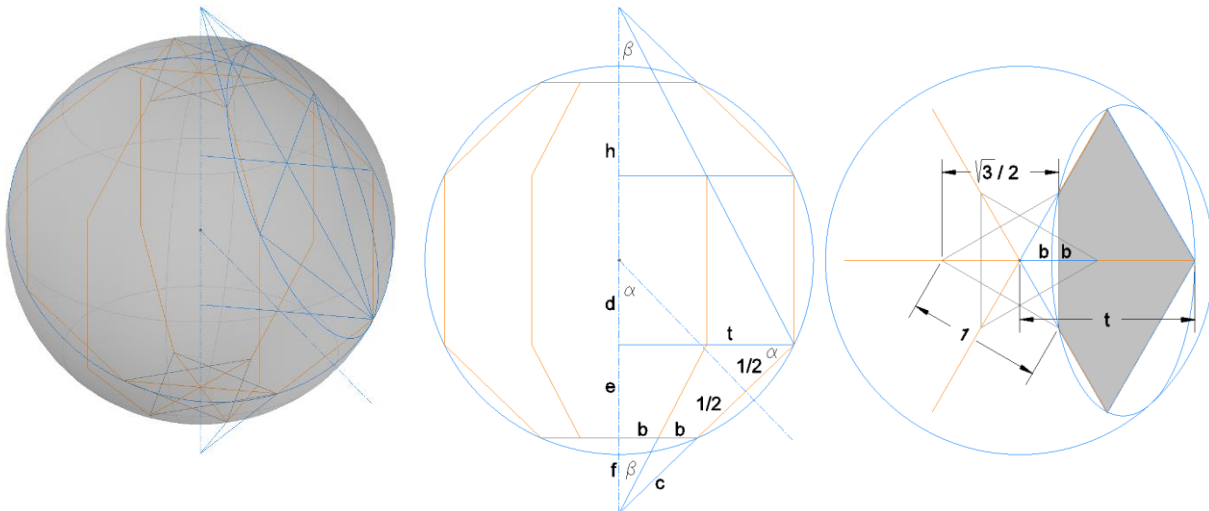


Fig. 6. The axonometric projection as well as the front and top views of the experimental model.

Explanations based on the front view in Fig. 6:

$$\cos \alpha = \frac{t}{c+1} \rightarrow t = \cos \alpha (c+1);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{2b} \rightarrow f = \operatorname{tg} \alpha 2b; \sin \alpha = \frac{e}{1} \rightarrow e = \sin \alpha; h = d + e + f$$

The explanation of $\operatorname{tg} \beta$ is possible in two different ways:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{f} = \frac{t}{2h - e - f} \rightarrow t = \frac{b(2h - e - f)}{f} = \cos \alpha (c+1)$$

After substitutions according to the above explanations:

$$\frac{b(2h - \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha 2b)}{\operatorname{tg} \alpha 2b} = \cos \alpha (c+1) \rightarrow 2h - \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha 2b = 2 \sin \alpha (c+1)$$

Explanations based on the front view in Fig. 6:

$$\sin \alpha = \frac{c+0.5}{h} \rightarrow h = \frac{c+0.5}{\sin \alpha}; \cos \alpha = \frac{2b}{c} \rightarrow c = \frac{2b}{\cos \alpha}$$

The former equation after substitutions according to the above explanations:

$$\frac{\frac{4b}{\cos \alpha} + 1}{\sin \alpha} - \sin \alpha - 2b \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 4b \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \sin \alpha$$

Multiplied by $\sin\alpha$ then by $\cos\alpha$:

$$\frac{4b}{\cos\alpha} + 1 - \sin^2\alpha - 2b \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = 4b \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + 2\sin^2\alpha$$

$$4b + \cos\alpha - \sin^2\alpha \cos\alpha - 2b\sin^2\alpha = 4b\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha \cos\alpha$$

$$3\sin^2\alpha \cos\alpha + 6b\sin^2\alpha - \cos\alpha - 4b = 0$$

The explanation of b based on the top view in Fig. 6:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

So the former equation is:

$$3\sin^2\alpha \cos\alpha + 1.732\sin^2\alpha - \cos\alpha - 1.155 = 0$$

$$3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) + 1.732(1 - \cos^2\alpha) - \cos\alpha - 1.155 = 0$$

$$3\cos\alpha - 3\cos^3\alpha + 1.732 - 1.732\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1.155 = 0$$

$$-3\cos^3\alpha - 1.732\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 0.577 = 0 \rightarrow \cos\alpha = 0.72$$

$$\rightarrow \alpha = 43.95^\circ$$

The third order equation shows that the geometric construction would need iteration.

4 Geometric Examinations

Fig. 1 shows the engraving Melencolia I and the studied solid with additional editing lines according to the perspective depiction. An upper and a bottom edge are perpendicular to the horizon and the planar section of the solid (yellow lines) is parallel to the image plane and perpendicular to these edges. So it should have real shape. The images of parallel straight lines have to be parallel or intersect each other on the horizon. The segment between the focal point and the right vanishing point of the triangle sides have to be seen in 60 degrees. So the centre point of the perspective can be found with help of the purple coloured circle of 60° angle of vision in the horizon plane rotated here into the image plane. The complex redrawing of the editing lines of the perspective shows that the image of the upper part of the solid is depicted with very good approximation. Even the angle α between the directional line of the left vanishing point of the triangle sides and the segment of points C^* and F is 63° near to the exact 60°, despite the fact that the lines defining the remote vanishing point intersect each other in quite acute angle. It can be seen that the perspective construction of the sketch in Fig. 2 is not exact enough for a spatial reconstruction. The image of the solid in the engraving is the mirrored pair of those in the sketch and it is remarkable that two faults (?) are repeated. The upper and bottom vertices are not on the same vertical line as well as the images of a base edge and the diagonal of the cut rhombus parallel to this edge had to intersect each other in a vanishing point on the horizon line but these converge to each other in the opposite direction

(! signs in the figures). However the vanishing point of the diagonal can be reconstructed almost exactly in the engraving, the angle β is 60.6° in Fig. 1. The upper edge of the solid parallel to the image plane has the real angle 40° in the sketch and 41° in the engraving related to the horizontal line of the planar section. The question arises if this angle was fixed based on former results. The same angle of the bottom edge is 44.56° in the engraving. Could have the above torsions the goal to mark this dissonant parameter as a reference of another experiment? Without examination, the torsion is not noticeable easily because the habitual view of the right bottom sloped edge shows very great perspective shortening, related to the other ones, looking the solid in this direction. Based on the angle 41° between the upper rhombus edge and the horizontal side of the planar section of the solid, the construction showed in Fig. 3 results in 81.6° for the acute angle of the pentagonal faces. The ratio of the axial orthogonal affinity, transforming the cube to the rhombic hexahedron, having this parameter, is 1.23. The ratio of the truncation can be given by the lengths of the remaining and cut off segments of the initial rhombus side. It is 4:5 and 4.2:5 regarding the upper and bottom parts of the image of the solid based on Fig. 1. The lengths of the remaining segment and of the side of the triangular face have the ratio 0.61. May be only here can loom the golden mean. The vertices of this solid do not join the surface of a sphere. The last step is the geometric examination of the existing reconstructions giving some parameters similar to the above ones.

Hideko Ishizu deduces also with historical documents and based on construction methods used by Dürer as well that the polyhedron in the engraving can be obtained by vertical enlargement of a truncated cube and the ratio of this affinity corresponds to the solution of the Delian problem [5]. Cube root 2 is 1.26 near to the value 1.23 based on the construction in Fig. 1. This stretching would result in 80.57° related to the acute angle of the rhombic faces. Ishizu does not deal with the ratio of the truncation.

According to Eberhard Schröder's analysis [6], [7] the acute angle of the initial rhombus is 81.8° , near to the above 81.6° . If the image plane of the front view is parallel to this one of Dürer's perspective pictures then the vertices of the side view of the solid, constructed with this parameter, join the intersection points of the net of a magic square like the depicted one in the engraving. The oblique segments of this view have the angle 45° related to the horizontal ones. It is near to the above 44.56° but in the front view. The angle 41° results here in 40.9° , however the ratio of the truncation should be 1:1 instead of the above got 4:5.

Franz Deckwitz finds the value 76° for the acute angle of the pentagonal faces by models as well as nets and measurements extended to the whole engraving [5], [8]. Constructing the solid with this parameter, the angle of the bottom oblique edges related to the ground plane is 44.7° near to this angle in Fig. 1. But the ratio of the truncation is approximately 1:1 and the vertices can almost join a sphere according to the pentagon depicted by Deckwitz.

The attempt for a new reconstruction described in this paper resulted in the angle 43.95° , angle α in Fig. 6. It is comparable with the angle 44.56° marked in Fig. 1. The ratio of the truncation is 5:4 reverse of 4:5 and the solid is inscribed in a sphere.

Dürer's sketches can refer to his intent to construct his polyhedron that way that it could be inscribed in a sphere and he studied especially the Archimedean truncated tetrahedron [3], [4]. Based on the above examinations, it can be regarded also as a new reconstruction experiment if the truncated rhombic hexa-hedron is modelled with two Archimedean solids (3;6;6) and it

is pressed into its affine pair inscribed in a sphere (Fig. 4). The angle α of the short edges of the pentagonal faces related to the horizontal lines of the planar sections is 45° near to 44.56° . The acute angle of the pentagonal faces is 75.5° near to 76.2° according to the reconstruction based on the angle 44.56° . The ratio of the truncation is 1:1.

References

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I#/media/File:Albrecht_D%C3%BCrer_-_Melencolia_I_-_Google_Art_Project_\(AGDdr3EHmNGyA\).jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I#/media/File:Albrecht_D%C3%BCrer_-_Melencolia_I_-_Google_Art_Project_(AGDdr3EHmNGyA).jpg)
- [2] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Preparatory_sketch_for_the_polyeder_in_Melencolia_I_by_Albrecht_D%C3%BCrer.PNG
- [3] WEITZEL, H. "Zum Polyeder auf A. Dürers Stich Melencolia I — ein Nürnberger Skizzenblatt mit Darstellungen archimedischer Körper", *Sudhoffs Archiv*, Bd. 91, H. 2 (2007), pp. 129-173, Published by: Franz Steiner Verlag, <https://www.jstor.org/stable/20778062>
- [4] WEITZEL, H. "A further hypothesis on the polyhedron of A. Dürer's engraving Melencolia I", *Historia Mathematica*, Vol. 31, Issue 1, February 2004, pp 11-14 <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086003000296>
- [5] ISHIZU, H. "Another Solution to the Polyhedron in Dürer's Melencolia: A Visual Demonstration of the Delian Problem", *Aesthetics* No. 13, 2009, The Japanese Society for Aesthetics, http://www.bigakukai.jp/aesthetics_online/aesthetics_13/text/text13_ishizu.pdf
- [6] SCHRÖDER, E. *Dürer – Kunst und Geometrie*, Birkhäuser, 1980, ISBN 978-3-0348-6326-1.
- [7] ZIEGLER, G. M. "Three giants, five stars, some mistakes", *Vortrag anlässlich "500 Jahre Dürer's Melencolia*, in english, 2014, https://www.youtube.com/watch?time_continue=2928&v=8Gw_SgnlSdk&feature=emb_title
- [8] DECKWITZ, F. *Dürer's Melencolia*, Map, 1978, <https://auctionet.com/en/631439-mapp-franz-deckwitz-durer-s-melencolia-with-compasses-and-ruler-signerad-och-numrerad-82-100>

László Vörös

Institute of Architecture

University of Pécs

Vasvári Pál Utca 4, 7622 Pécs, Hungary

e-mail: vorosl@mik.pte.hu

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective
to stimulate scientific research and teaching methodology
in the fields of geometry and computer graphics
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

SSGG

Institute of Mathematics and Physics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Abstracts

Z. Berger Haladová, M. Bátorová, A. Ferko: Asymptotes to ellipse?

... global and local interest in teaching not only geometry

Our goal is an attempt to explain selected interesting communication situations using theory and experience from the virtual cultural heritage. We illustrate the approach on selected topics of geometry and augmented reality (AR).

D. Velichová: Equidistant sets

Basic concept of an equidistant set to a manifold reveals a bundle of problems connected to intrinsic geometric properties of the resulting geometric figure. Interesting problems of classical differential geometry are tasks to find a set of points equidistant to another set, curves equidistant to given curve in plane or on a surface, or to find surfaces equidistant to a given sets of points. A large variety of equidistance definition novelty forms were introduced recently in different applications. Some of these issues are discussed in this paper, and few open questions are addressed, while possible approach ideas how to find their answers are suggested and shortly analysed.

L. Vörös: On Reconstructions of Dürer's Polyhedron

In Albrecht Dürer's engraving Melencolia I, a solid carved from stone is depicted, often called polyhedron by the several authors who have been dealt with possible reconstructions of this form based on supposed parameters and measurements in the picture. Most of the results cannot be justified satisfactorily or are not complete. The paper introduces some applicable geometric constructions and examinations in order to the verification of different reconstructions and the results of experiments based on new parameters or prescriptions.

Edited by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

Editor-in-Chief:

Daniela Velichová

Managing Editors:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Editorial Board:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsáblová

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics

IČO: 31 816 304

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

Frequency:

One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

G is cited in: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG December 2020, Bratislava

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific

www.ssgg.sk