



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU  
ročník 18, číslo 35, 2021  
ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

**SSGG****Vedúca redaktorka:**

Daniela Velichová

**Výkonné redaktorky:**

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

**Redakčná rada:**

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsálová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

**Redakcia:** Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

IČO: 31 816 304

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

**Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:**

Redakcia G - SSGG

ÚMF SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

ssgg@ssgg.sk

**Periodicita:** Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.

Evidenčné číslo EV 3228/09

**Informácie a pokyny pre autorov na adresu:** [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)**Tlačí:** ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.**Časopis G je citovaný v:** Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG november 2021, Bratislava

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkol'vek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.

SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU  
SLOVAK JOURNAL FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

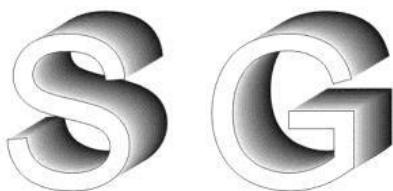
ročník 18, číslo 35, 2021  
volume 18, number 35, 2021



## Obsah – Contents

Chord of conics	5
Tetiva kuželoseček	
Jiří Blažek, Pavel Pech	
Counting perfect star drawings	11
Počítanie kresieb dokonalých hviezd	
Tomislav Došlić	
Geometria, kartografia a fyzika v nových knižných publikáciách Vydavateľstva SPEKTRUM STU	21
Geometry, cartography and physics in new book publications of Publishing house SPEKTRUM STU	
Daniela Velichová, Margita Vajsálová	
Peanova a Hilbertova křivka	27
Peano and Hilbert curves	
Jan Zeman	

# **SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ**



## **PRE GEOMETRIU A GRAFIKU**

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo. Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

---

Spoločnosť SSGG  
Ústav matematiky a fyziky  
Strojnícka fakulta STU v Bratislave  
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR  
e-mail: [ssgg@ssgg.sk](mailto:ssgg@ssgg.sk), URL: [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

# Chord of conics

Jiří Blažek, Pavel Pech

## Abstract

The paper deals with locus of points related to chords of conic sections. Firstly the locus is explored using dynamic geometry software GeoGebra, secondly using computer algebra system CoCoA by elimination the locus equation is derived. The locus is related to well-known theorems and concepts, as Simson line and Frégier point.

**Keywords:** conic sections, chord of conics, dynamic geometry, elimination ideal, Frégier point

## Abstrakt

Článek se zabývá množinou bodů, které se vztahují k tětivám kuželoseček. Množina bodů je nejprve vyšetřována pomocí systému dynamické geometrie GeoGebra. Poté je s použitím systému počítačové algebry CoCoA odvozena rovnice hledané množiny. Množina je v úzkém vztahu ke známým větám a pojмům, jako Simsonova přímka a Frégierův bod.

**Klíčová slova:** kuželosečky, tětiva kuželoseček, dynamická geometrie, eliminační ideál, Frégierův bod

## 1 Introduction

By experimentation in dynamic geometry system we encountered the following problem:

*Let  $UV$  be a chord of an ellipse centered at  $O$  such that  $OU \perp OV$ . Determine the locus of the foot  $P$  of the perpendicular from  $O$  to the chord  $UV$  when  $U$  moves along the ellipse.*

Using the command Locus in GeoGebra which works on numerical basis, it seems that the locus is a circle, Fig. 1.

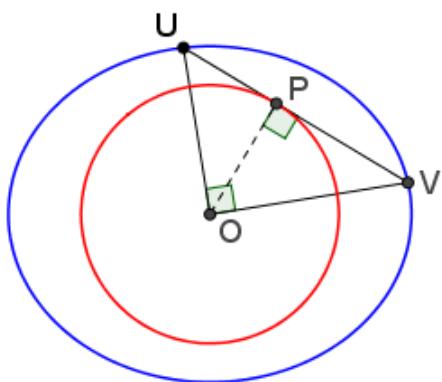


Fig. 1. Determine the locus of  $P$  when  $U$  moves along the ellipse

It turns out that the point  $O$  may not be at the center of a conic. This enables us to use this construction for all conics, Fig. 2.

Moreover if the point  $O$  is inside a conic then we get a circle. If  $O$  is outside a conic, we get only a part of the circle. To avoid it, we have to realize that there are *two* points  $V, V'$  on the conic such that  $OU \perp OV$  and  $OU \perp OV'$ . This leads to two points  $P, P'$  together tracing the locus, Fig. 2.

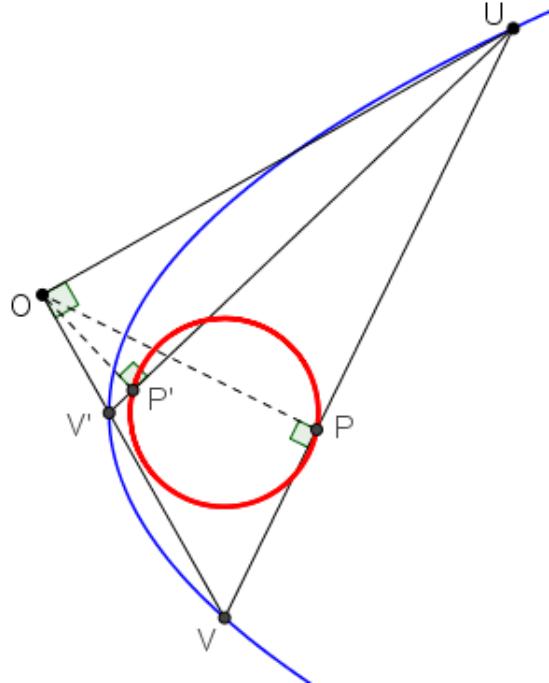


Fig. 2. The locus of  $P$  is a circle

These statements are proved in the following section.

## 2 Chord of conics

Based on previous constructions we formulate the following theorem:

**Theorem 1.** Given a conic  $\kappa$ , a point  $U$  in  $\kappa$  and an arbitrary point  $O$ . Let  $V \in \kappa$  be such that  $OV \perp OU$ . Then the locus of the foot  $P$  of the perpendicular from  $O$  to the line  $UV$  when  $U$  moves along the conic is:

- a) a circle if  $\kappa$  is not an equilateral hyperbola or the pair of mutually orthogonal lines,
- b) a line if  $\kappa$  is an equilateral hyperbola or the pair of mutually orthogonal lines.

**Proof.** Consider a conic

$$\kappa: ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (1)$$

Choose a rectangular system of coordinates such that  $O = [r, s]$ ,  $U = [u_1, u_2]$ ,  $V = [v_1, v_2]$ , and  $P = [p, q]$ , Fig. 3. Then:

$$U \in \kappa \Leftrightarrow h_1 := au_1^2 + cu_2^2 + du_1 + eu_2 + f = 0,$$

$$V \in \kappa \Leftrightarrow h_2 := av_1^2 + cv_2^2 + dv_1 + cv_2 + f = 0,$$

$$OV \perp OU \Leftrightarrow h_3 := (u_1 - r)(v_1 - r) + (u_2 - s)(v_2 - s) = 0,$$

$$OP \perp UV \Leftrightarrow h_4 := (p - r)(u_1 - v_1) + (q - s)(u_2 - v_2) = 0,$$

$$P \in UV \Leftrightarrow h_5 := pu_2 + u_1v_2 + qv_1 - u_2v_1 - pv_2 - qu_1 = 0.$$

Elimination of  $u_1, u_2, v_1, v_2$  in the system  $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_5 = 0$  yields zero

```
Use R ::= Q[a,b,c,d,e,f,p,q,r,s,u[1..2],v[1..2]];
I := Ideal(h1,h2,h3,h4,h5);
Elim(u[1]..v[2], I);
Ideal(0);
```

elimination ideal, see [1]. Let us suppose, that  $U \neq O$ , i.e.  $((u_1 - r)^2 + (u_2 - s)^2)t - 1 = 0$ , where  $t$  is a slack variable. Adding this condition to the ideal  $I$  and eliminating variables  $u_1, u_2, v_1, v_2, t$ , one obtains

$$(a+c)(p^2 + q^2) + (d-2cr)p + (e-2as)q + cr^2 + as^2 + f = 0 \quad (2)$$

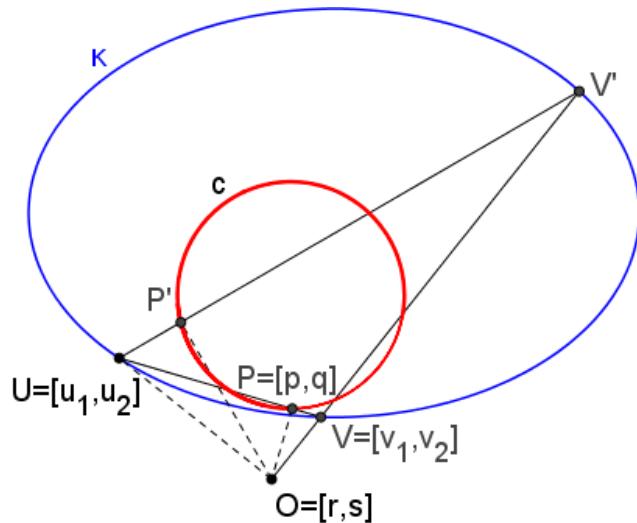


Fig. 3. Determine the locus of  $P$  when  $U$  moves along the ellipse

In (2) we distinguish two cases:

- a) If  $a + c \neq 0$  then (2) is a circle.
- b) If  $c = -a$ , i.e. if  $\kappa$  is an equilateral hyperbola or two orthogonal lines, then the locus equation (2)

$$p(d-2cr) + q(e-2as) + cr^2 + as^2 + f = 0$$

represents a line, Fig. 4.

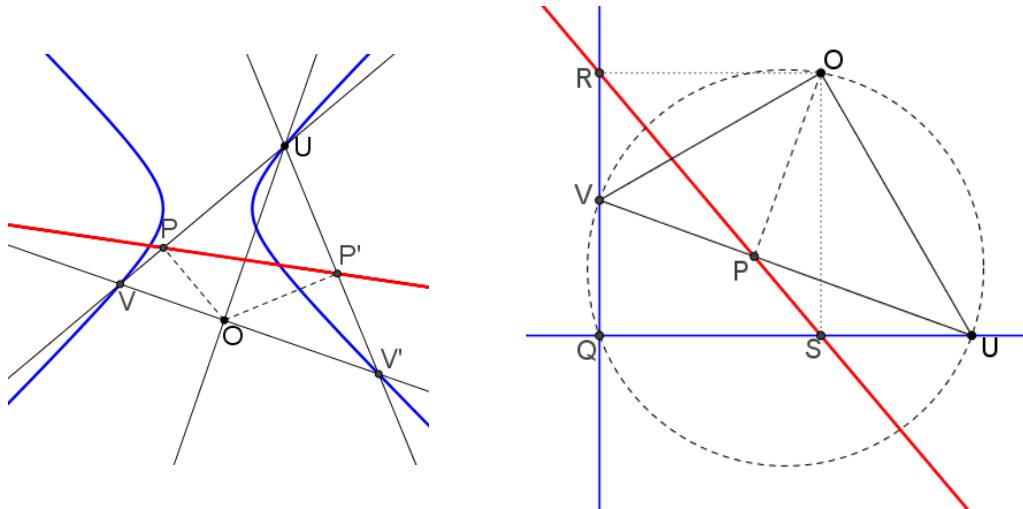


Fig. 4. For equilateral hyperbola or two orthogonal lines the locus is a line

**Remark.** The case with two orthogonal lines can also be proved straightforwardly. Applying the Simson–Wallace theorem on the triangle  $QUV$  and  $O$  on its circumcircle, the points  $P, S, R$  are collinear (the Simson line), Fig. 4 right.

## 2.1 Connection to the Frégier's theorem

About in 1815 M. Frégier published the following theorem [2], [3]:

Given a conic  $\kappa$  and a point  $O$  on  $\kappa$ , then the hypotenuses of right-angled triangles inscribed to  $\kappa$  and having common right-angle vertex  $O$  intersect at one point  $F$ , the Frégier point to  $O$  with respect to  $\kappa$ .

We will prove it using the Theorem 1 when the point  $O$  lies on the conic, Fig. 5. The hypotenuse  $UV$  of the right triangle  $UOV$  intersects the locus circle  $c$  at the points  $P$  and  $F$ .

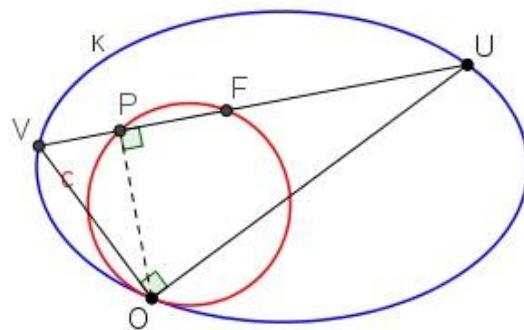


Fig. 5. The point  $F$  is fixed for all positions of  $U$

To show that the point  $F$  is fixed for all positions of  $U$ , realize that since  $P$  lies on the circle  $c$  and hence the segment  $OF$  must be its diameter. Since  $O$  and  $c$  are fixed the Frégier theorem follows.

### 3 Generalization for two lines

In this case of two lines we can generalize the previous Theorem 1 regarding decomposition of the conic into two mutually orthogonal lines:

**Theorem 2.** Given two lines  $p, q$  forming the angle  $\alpha$ , and containing point  $U$  on  $p$  and an arbitrary point  $O$ . Let  $V \in q$  be such a point that the lines  $OV$  and  $OU$  form the angle  $\beta$ . For  $U$  moving along the conic the locus of the foot  $P$  of the perpendicular from  $O$  to the line  $UV$  is:

- a) a circle if  $\alpha + \beta \neq 180^\circ$ ,
- b) a line if  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

**Proof.** First suppose that  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , see Fig. 6.

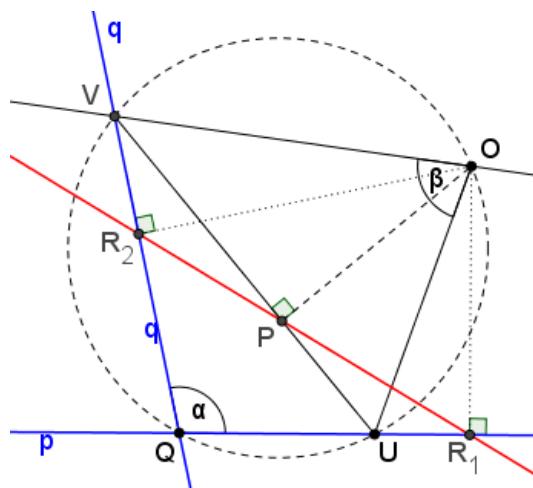


Fig. 6. If  $\alpha + \beta = 180^\circ$  we get a line

This case can be proved straightforward. Realize that the quadrilateral  $UOVQ$  is cyclic. Then  $P$  lies on the Simson–Wallace line  $R_1R_2$  related to the triangle  $VQU$ .

Now suppose  $\alpha + \beta \neq 180^\circ$ , see Fig. 7.

We will show that the angle  $R_2PR_1$  is constant and equal  $\alpha + \beta$ . Realize that the points  $R_1, R_2$  are fixed, depending only on  $p, q$  and  $O$ . We see that  $\angle R_2PV = \angle R_2OV = \delta$ , since the quadrilateral  $POR_2V$  is cyclic. Similarly

$$\angle R_1PU = \angle R_1OU = \varepsilon.$$

As  $OR_1QR_2$  is a cyclic quadrilateral, one obtains

$$\delta + \beta + \varepsilon + \alpha = 180^\circ.$$

Then

$$\angle R_1PR_2 = 180^\circ - \delta - \varepsilon = \alpha + \beta$$

which is the constant and therefore  $P$  lies on the circle.

**Question:** Does the constructions described in Theorem 1 work also for an angle that is not right? What do we obtain?

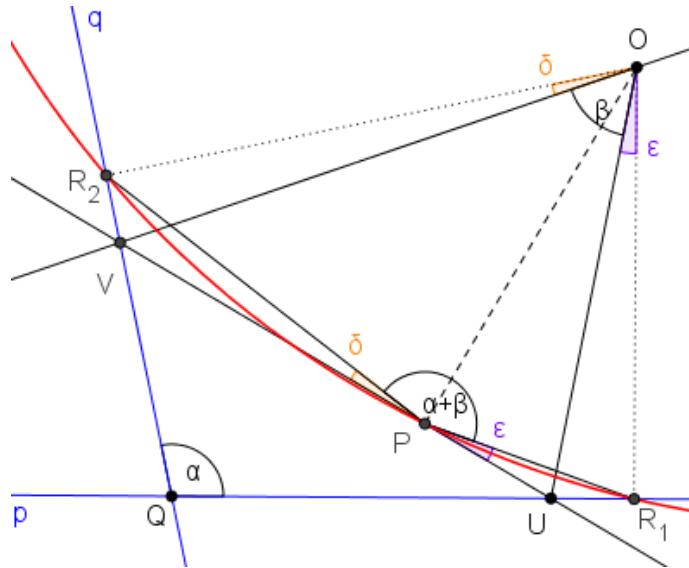


Fig. 7. If  $\alpha + \beta \neq 180^\circ$  then the locus of  $P$  is the circle

## References

- [1] PECH, P. Problems by searching for loci. In *Proceeding of Czech – Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020*, Czech Society for Geometry and Graphics, Pardubice, 2020, pp. 139-146.
- [2] WEISS, G. Frégier points revisited. In *South Bohemia Mathematical Letters 26*, 2018, pp. 84-92.
- [3] WELLS, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin Science, 1992.

---

### Mgr. Jiří Blažek

Department of Mathematics, Faculty of Education  
University of South Bohemia  
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice, Czech Republic  
e-mail: blazej02@pf.jcu.cz

### prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

Department of Mathematics, Faculty of Education  
University of South Bohemia  
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice, Czech Republic  
e-mail: pech@pf.jcu.cz

# Counting perfect star drawings

Tomislav Došlić

## Abstrakt

Diskutujeme o tom, čo robí  $n$ -cípu hviezdu dokonalou, pre aký počet bodov takéto hviezdy existujú a koľko ich je.

**Kľúčové slová:** dokonalá hviezda, pravidelný mnogouholník, hviezdicový mnogouholník.

## Abstract

We discuss what makes an  $n$ -pointed star perfect, for which number of points such stars exist, and how many of them there are.

**Keywords:** perfect star, regular polygon, star polygon.

## 1 Introduction

One quiet evening during Christmas holidays my daughter Marija asked me: “Why can one draw a five-pointed star without lifting pen from paper, while for the six-pointed star this is not possible?” And before I could start answering, she added “That looks like something you are usually playing with”. I understood the question, but pretended otherwise. The truth is, I was stung by the remark about playing, so I decided to earn some dignity for my answer (and for the things I usually play with) by pointing out that questions, even about not very serious things, need to be not only well-thought but also well formulated. So, my immediate answer was, “Why, but we can”! And I proceeded to draw a regular hexagon as in Fig. 1.

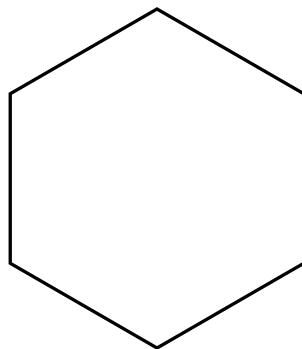


Fig. 1. A 6-pointed star? Or not?

“But this this ... this is not a star!” she protested.

“Why not? What is wrong with it?” I asked.

“Well, it is too blunt, it has no arms, it is simply a hexagon!” were her objections.

“OK, so for you a star must have distinct arms and the arms should have acute angles at the top?”

“Yes, a star must have acute angle at their arms”, she agreed.

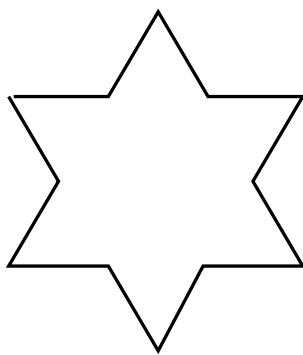


Fig. 2. Another 6-pointed star? Or not?

“Well, there is one for you.” And I made a drawing, without lifting my pencil from the paper, shown in Fig. 2.

“But you are cheating! This is not a proper star, it is just an outline. It has nothing inside! And you are just zig-zagging around its perimeter!” were the objections raised.

“Hmmm. Just an outline, you say? And nothing inside? OK then, but how about this one?” The next drawing I made is shown in Fig. 3. I started it at point  $P$  and proceeded by visiting in turn  $A, C$ , and  $E$ , coming back to  $P$  and then visiting in turn  $B, D$ , and  $F$ , before returning to  $P$ .

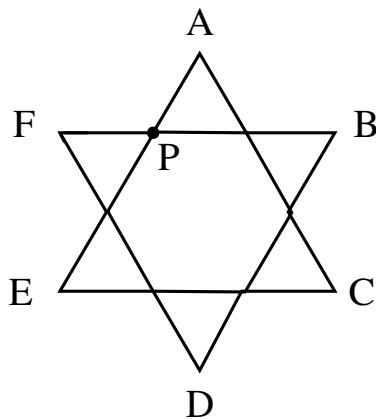


Fig. 3. What’s wrong with this one?

By now it became clear that I did not take the “playing” part lightly, so the protests were not very vigorous: “Well, you started from inside the star, and you were changing directions too many times, and the number of strokes is too big ...”

“Yeah, but I did not know you are so particular about your stars. You want them drawn in six strokes, starting from one of the points and changing directions only at other points?”

“Wee-ell, yes ...”

“Then you will love the next one.” And I produced the drawing of Fig. 4 by starting at  $A$  and coming back to it by visiting  $C, E, B, F$ , and  $D$ , in this order.

“This one is really ugly” was the answer. “It has different angles at its points, different lengths, it looks like it is falling to one side ...”

“But it satisfies all your requirements! And it can be drawn all in one piece, as you asked.”

“Yes, but the usual six-pointed star is beautiful. It is symmetric!”

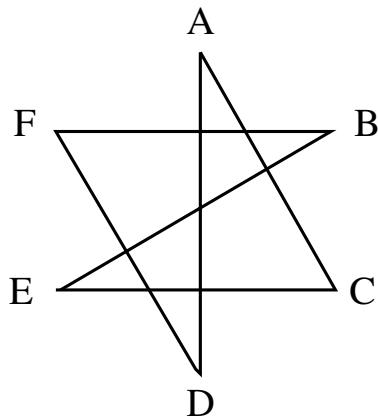


Fig. 4. And with this one? What do you mean by “ugly”?

“This drawing also has some symmetry. For example, you can reflect it across the line passing through its vertices  $F$  and  $C$ . ”

“It might be symmetric, but it is not symmetric enough! I would like it to be as symmetric as possible! For example, all strokes should be equally long, all angles should be equal, ...”

“Well, than you should have said so. If you want it with the maximum possible symmetry, I am sorry, it cannot be done.”

“Exactly as I claimed! But now tell me why?”

Having enjoyed our exchange so far, I tried to bring it to an end with an offhand remark about divisibility and prime numbers:

“I cannot go in too many details now, but it has something to do with five being prime. As you know, six is not a prime number, and hence ... Note that you can also draw a seven-pointed star without lifting your pencil. You see what I mean?”

And she saw it all to well. The tone of her answer had a slightly triumphant note:

“And how do you then explain the fact that I can draw an eight-pointed star in the same way? With all angles acute, with exactly eight strokes, with all symmetry needed to make it beautiful? Eight is not a prime, or is it?”

And I was staring at a beautiful eight-pointed star drawn according to all her requirements, shown in Fig. 5.

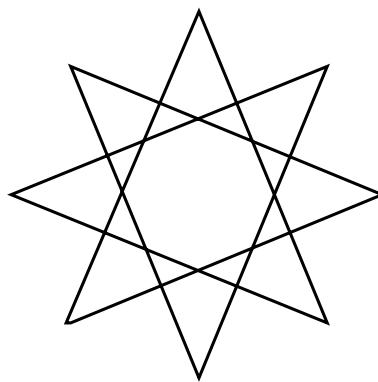


Fig. 5. Eight is not a prime, or is it?

It was clear that my answer would require some more thought and effort. So I conceded a

temporary defeat and withdrew to think about the problem. I started drawing stars, writing down some numbers, crossing out some of them, underlining some others, ... In short, I started playing with things hoping they would lead me to a better answer to my daughter's question.

## 2 Perfect stars

Our first task is to specify what exactly we mean by a star and then, what kinds of stars satisfy the additional requirements. We will call the stars satisfying all the requirements **perfect stars**.

Clearly, any polygon on  $n$  vertices could be considered as an  $n$ -pointed star, although some of them only in a very broad sense. The requirement that all stroke lengths be of equal length translates into equal side lengths, and taken together with the requirement of equal internal angles it forces the  $n$ -gon to be regular. That also takes care of the symmetry requirement. However, the aesthetic requirement on acute internal angles seems to be in conflict with regularity. Indeed, the only regular polygon with acute internal angles at its vertices is the equilateral triangle. That is, if we think in terms of convex or non-self-intersecting regular polygons. If we allow regular polygons to self-intersect, we can also satisfy the aesthetic requirement of acute internal angles.

Hence, we define a **star** as a regular self-intersecting polygon. A **perfect star** is a star with an acute inner angle at its vertices which can be drawn without lifting pencil from paper.

Stars themselves are nothing new; it is well known that there are infinitely many such polygons (see, for example, [7], the corresponding Wikipedia entry). Our goal here is to investigate how the additional aesthetic and connectivity requirements affect their existence for a given number of vertices/points. The first question is, are there any?

### 2.1 Are there any?

A quick look at the Wikipedia entry about star polygons reveals that there seem to be some for (almost) any number of vertices. In fact, for a given number of vertices  $n$ , each number  $1 < k < n/2$  relatively prime with  $n$  gives rise to a star polygon on  $n$  vertices. (The case  $k = 1$  results in a convex  $n$ -gon, so not a star in our sense.) Such polygons are denoted by their Schläfli symbols  $\{n/k\}$  and they can be realized by concatenating  $n$   $k$ -th diagonals of a regular convex  $n$ -gon. Clearly, if  $n$  and  $k$  are not relatively prime, concatenating  $k$ -th diagonals will bring you back to the starting vertex before visiting all  $n$  vertices. An easy way to prove it is to consider addition modulo  $n$ . In order to see how the perfection requirements restrict the number of stars, we need some number-theoretical terminology.

Two integers  $n$  and  $k$  are **coprime** (relatively prime, mutually prime) if the only positive integer that is a divisor of both of them is 1. As mentioned above, an  $n$ -pointed star can be realized by concatenation of  $n$   $k$ -th diagonals of a regular  $n$ -gon if and only if  $n$  and  $k$  are coprime.

A **totative** of a given positive integer  $n$  is an integer  $k$  such that  $0 < k \leq n$  and  $k$  is coprime to  $n$ . The **Euler's totient function**  $\varphi(n)$  counts the number of totatives of a positive integer  $n$ .

Hence, a perfect star on  $n$  points exists if and only if there is at least one totative of  $n$  in the interval  $[\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1]$ . The upper bound is natural, since a totative  $k < n/2$  gives rise to the totative  $n - k > n/2$  and both correspond to the same star. The lower bound takes care of our aesthetic requirement of an acute internal angle. It turns out that, with only two exceptions,

we can always find a totative of  $n$  near the upper border of the considered interval. The following Lemma can be proved by elementary means and we leave the proof to the reader.

**Lemma 2.1.** Let  $m \geq 2$  be a positive integer. Then

- (i)  $m$  is a totative of  $2m + 1$ ;
- (ii)  $2m - 1$  is a totative of  $4m$ ;
- (iii)  $2m - 1$  is a totative of  $4m + 2$ .

The above result can be rephrased in a more compact way as follows:

**Lemma 2.2.** Let  $n \geq 3$  be a nonnegative integer,  $n \neq 4, 6$ . Then  $n$  is relatively prime with the largest integer of the opposite parity which still remains smaller than  $n/2$ .

As a consequence, we have the existence of at least one perfect star for all  $n \geq 3$  with only two exceptions.

**Corollary 2.1.** A perfect  $n$ -pointed star exists for each  $n \geq 3$  except for  $n = 4$  and  $n = 6$ .

This results provides definitive answer to my daughter's question: We cannot draw a nice 6-pointed star without lifting pencil from paper because the number six has too few totatives. In particular, its only totative smaller than 3 is one, giving rise to the convex regular hexagon with Schläfli symbol  $\{6\}$ . The usual six-point star with Schläfli symbol  $\{6/2\}$  is a compound polygon, made of two triangles, and hence cannot be drawn without lifting pencil from paper.

## 2.2 And how many?

In order to answer questions about the number of perfect stars for a given number of vertices, we need information on both the number of totatives and on their distribution. We are interested in lower bounds, since the upper bound  $\varphi(n) \leq n - 1$  is trivial and achieved for all primes. It enables us to give an exact answer for primes, though. We state the prime case first.

**Theorem 2.1.** Let  $p$  be an odd prime. If  $p = 4m + 1$ , then there are exactly  $m$  different perfect stars on  $p$  vertices; if  $p = 4m + 3$ , then there are exactly  $m + 1$  different  $p$ -pointed perfect stars.

The proof follows readily by computing the difference  $\lceil \frac{p}{2} \rceil - 1 - \lfloor \frac{p}{4} \rfloor$ , since each number belonging to  $[\lfloor \frac{p}{4} \rfloor + 1, \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1]$  gives rise to a perfect star on  $p$  vertices.

The prime case can be restated in alternative ways. The first one is more compact.

**Corollary 2.2.** Let  $p \in \mathbb{N}$  be an odd prime. Then there are exactly  $\lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor$  different  $p$ -pointed perfect stars.

The second form, emphasizing  $m$  instead of  $p$ , will be useful later.

**Corollary 2.3.** Let  $p \in \mathbb{N}$  be an odd prime. If  $p$  is of the form  $p = 4m - 1$  or  $p = 4m + 1$ , then there are exactly  $m$  different perfect stars on  $p$  vertices.

Let us now look at a non-prime number of vertices  $n$ . As mentioned above, we are interested in lower bounds on  $\varphi(n)$ . There are several available in the literature. Some of them, for example,

$$\varphi(n) \geq \frac{n}{4 \ln n}, \tag{1}$$

are easy to prove (see, for example, [1], p. 138), but turn out to be too weak. Stronger ones can be obtained by starting from the following result:

**Theorem 2.2.** ([2], p. 267) For each  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^{1-\delta}} = \infty. \quad (2)$$

The idea is to choose a suitable small positive  $\delta$  and find the integer that minimizes the expression  $\frac{\varphi(n)}{n^{1-\delta}}$ . Such an integer must exist, since the considered expression grows without bound. We refer the reader to [5] for the proof of the following lower bound on  $\varphi(n)$ .

**Theorem 2.3.**

$$\varphi(n) \geq 8 \left( \frac{n}{30} \right)^{7/8}. \quad (3)$$

Our next task is to investigate how the totatives of  $n$  are distributed over  $[1, n - 1]$ . We know that they are arranged symmetrically with respect to  $n/2$  — if a  $k < n/2$  is a totative, then  $n - k$  is also a totative. So, half of all totatives are in  $[1, \lfloor n/2 \rfloor]$ , but how are they distributed there? One must be near the upper end, but can the rest of them be crowded, say, in the lowest quartile? The answers can be found in an old paper by Lehmer [3].

For  $k < n$  and  $0 \leq q \leq k - 1$  let  $\varphi(k, q, n)$  denote the number of totatives in the  $(q + 1)$ -st  $k$ -tile. The **excess** of the  $(q + 1)$ -st  $k$ -tile is defined as

$$E(k, q, n) = \varphi(n) - k \varphi(k, q, n). \quad (4)$$

If  $E(k, q, n)$  is positive, it means that the  $(q + 1)$ -st  $k$ -tile contains less than  $\frac{\varphi(n)}{k}$  totatives. Hence the excess measures how far the distribution of totatives deviates from the uniform one. The following result shows that the distribution is symmetric also at finer scales.

**Theorem 2.4.** [3] Let  $n, k$  be positive integers, and  $n > k$ . Then

$$E(k, q, n) = E(k, k - q - 1, n). \quad (5)$$

A non-negative integer  $n$  is **exceptional with respect to  $k$**  if it is divisible by  $k^2$  or by a prime of the form  $kx + 1$ . As we are interested in quartiles,  $k = 4$ , in the rest of this paper exceptional numbers will always be assumed with respect to 4. Hence, a non-negative integer is exceptional if it is divisible by 16 or by a prime of the form  $4x + 1$ .

Theorem 2 and Theorem 4 of reference [3] prove that the distribution of totatives of exceptional numbers is uniform. For our problem, it means the following.

**Theorem 2.5.** Let  $n$  be a non-negative integer divisible by 16 or by a prime of the form  $4x + 1$ . Then there are at least  $2 \left( \frac{n}{30} \right)^{7/8}$  different perfect stars on  $n$  vertices.

This gives us a lower bound for exceptional integers. It remains to look at the non-exceptional ones. We are interested in the number of totatives in the second quartile of  $[1, n - 1]$ . Information about that number can be extracted from information about the excess of the second quartile,  $E(4, 1, n)$ . By combining the symmetry result of Theorem 2.4 with the fact that the sum of all excesses must be zero, one concludes that  $E(4, 1, n) = -E(4, 0, n)$ . Luckily, the right-hand side,  $E(4, 0, n)$ , was determined in [3].

**Theorem 2.6.** [3] Let a positive integer  $n$  be non-exceptional with respect to 4. Then

$$E(4, 0, n) = \begin{cases} -\lambda(n) \theta(n) & , \quad n \text{ odd}; \\ -\frac{1}{2}\lambda(n) \theta(n) & , \quad n \equiv 2 \pmod{4}; \\ 0 & , \quad 4|n. \end{cases} \quad (6)$$

Here  $\lambda(n)$  denotes the **Liouville function** and  $\theta(n)$  is the number of square-free divisors of  $n$ . We refer the reader to any textbook of number theory for precise definitions. They are omitted here since they are not too relevant for our purpose. What is relevant is the fact that  $\lambda(n) \theta(n)$  can be expressed as

$$\lambda(n) \theta(n) = \sum_{\delta|n} \lambda(\delta) \mu\left(\frac{n}{\delta}\right), \quad (7)$$

where the sum is taken over all divisors of  $n$  and  $\mu(n)$  is the **Möbius function**. Again, the precise definition of  $\mu(n)$  is not important; all we need is the fact that its absolute values cannot exceed 1,  $|\mu(n)| \leq 1$ . Since the same is valid for  $\lambda(n)$ , we conclude that the product  $\lambda(n) \theta(n)$  cannot exceed  $d(n)$ , the number of divisors of  $n$ .

$$\lambda(n) \theta(n) \leq d(n). \quad (8)$$

By combining this with Theorem 2.6, it follows that the absolute value of the excess  $E(4, 0, n)$  cannot exceed  $d(n)$ , and hence also

$$|E(4, 1, n)| \leq d(n). \quad (9)$$

Now we have to find a good upper bound on the number of divisors of  $n$  (and hence on the excess of the second quartile). One such bound,  $d(n) \leq 2\sqrt{n}$ , belongs to the folklore – it is reported, for example, in the *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [4], where the sequence  $d(n)$  appears as A000005. With some care, better upper bounds of the type  $d(n) \leq C_\varepsilon n^\varepsilon$  can be obtained for various small positive values of  $\varepsilon$ . Even keeping  $\varepsilon = 1/2$  one can obtain a better upper bound on the number of divisors. We refer the reader to [6] for a proof of the following result.

**Lemma 2.3.** For all non-negative integers we have  $d(n) \leq \sqrt{3n}$ .

This bound is attained for  $n = 12$ . Now we are ready for a non-exceptional number of vertices.

**Theorem 2.7.** Let  $n \geq 48$  be a positive integer. Then there are at least

$$2\left(\frac{n}{30}\right)^{7/8} - \frac{\sqrt{3n}}{4} \geq 1 \quad (10)$$

different perfect stars on  $n$  points.

*Proof.* The claim is clearly valid for exceptional integers  $n \geq 48$ . We know that, for the non-exceptional ones, the excess of the second quartile is bounded from above by the number of divisors of  $n$  and hence by  $\sqrt{3n}$ ,

$$|E(4, 1, n)| = |\varphi(n) - 4\varphi(4, 1, n)| \leq d(n) \leq \sqrt{3n}. \quad (11)$$

This is equivalent to

$$\left| \frac{\varphi(n)}{4} - \varphi(4, 1, n) \right| \leq \frac{\sqrt{3n}}{4}. \quad (12)$$

That means that the actual number of totatives in the second quartile (i.e., between  $n/4$  and  $n/2$ ) cannot deviate from  $\frac{\varphi(n)}{4}$  by more than  $\frac{\sqrt{3n}}{4}$ . In particular,  $\varphi(4, 1, n) \geq \frac{\varphi(n)}{4} - \frac{\sqrt{3n}}{4}$ . But  $\varphi(n)$  is bounded from below by  $8 \left(\frac{n}{30}\right)^{7/8}$ . That means  $\frac{\varphi(n)}{4} \geq 2 \left(\frac{n}{30}\right)^{7/8}$ , and since  $n^{7/8}$  grows faster than  $n^{1/2}$ , the lower bound on  $\frac{\varphi(n)}{4}$  will exceed  $\frac{\sqrt{3n}}{4}$  for big enough  $n$  and hence drag  $\varphi(4, 1, n)$  away from zero. By solving the equation

$$\left(\frac{x}{30}\right)^{7/8} = \frac{\sqrt{3x}}{8} \quad (13)$$

one readily obtains  $x = \frac{675}{32} \sqrt[3]{5} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \approx 47.2648$ . Hence for all non-exceptional integers  $n \geq 48$  there is at least one perfect star on  $n$  vertices.  $\square$

For even integers we can do better than that. If they are divisible by 4, one can see from Theorem 2.6 that they behave in the same way as the exceptional numbers, i.e., they have uniform distribution of totatives.

**Corollary 2.4.** Let  $n$  be a positive integer divisible by 4 or by 5. Then there are exactly  $\frac{\varphi(n)}{4}$  different  $n$ -pointed perfect stars. Moreover, their number grows faster than  $2 \left(\frac{n}{30}\right)^{7/8}$ .

If an even integer  $n$  is not divisible by 4, we still can do better, since for such integers the upper bound on  $|E(4, 1, n)|$  is twice smaller than for the odd ones.

**Corollary 2.5.** Let  $n \geq 10$  be an even integer not divisible by 4. Then there are at least

$$2 \left(\frac{n}{30}\right)^{7/8} - \frac{\sqrt{3n}}{8} \geq 1 \quad (14)$$

different perfect stars on  $n$  points.

One can see that the guaranteed number of perfect stars grows rather slowly with  $n$ . For example, the above bounds for odd numbers yield at least two perfect stars for  $n \geq 87$ , at least three stars for  $n \geq 121$  and at least 20 perfect stars for  $n > 700$ . For even numbers the bounds are a bit better, but still not very tight. Nevertheless, the above results imply that the number of perfect stars on  $n$  vertices tends to infinity with  $n$ .

### 2.3 Inverse problems

At the end of this section we look at some inverse problems. Instead of asking how many perfect stars there are for a given number of vertices, we ask, given a non-negative integer  $m$ , are there any  $n$  such that there are exactly  $m$  different perfect  $n$ -pointed stars? More formally, we denote by  $S_m$  the set of all positive integers  $n$  such that there are **exactly**  $m$  perfect stars on  $n$  points. We have shown (Corollary 2.1) that

$$S_0 = \{4, 6\}, \quad (15)$$

and we know that there are no other elements in  $S_0$ . I wrote a small program in Sage computing the number of perfect stars on  $n$  vertices for all  $n \leq 125$ . By looking at its results, I saw that only seven values of  $n$  in the considered range belong to  $S_1$ . By applying the bounds of the previous subsection, one can verify that for all  $n \geq 86$  there must be at least two perfect stars, so the seven values listed below are indeed all elements of  $S_1$ :

$$S_1 = \{3, 5, 8, 9, 10, 12, 14\}. \quad (16)$$

There are several open questions about  $S_m$  for larger values of  $m$ . For example, is it true that  $S_m \neq \emptyset$  for all  $m \in \mathbb{N}$ ? Then, what can be said about their cardinality  $|S_m|$  if they are non-empty? What are their minima and maxima and how large can be their span? Some partial answers are listed below.

**Lemma 2.4.** Let  $m$  be a positive integer such that  $p = 4m - 1$  and/or  $q = 4m + 1$  is a prime. Then  $S_m \neq \emptyset$  and  $\min\{p, q\} = \min S_m$ .

As there are infinitely many odd primes, and each of them is either of the form  $p = 4m - 1$  or  $q = 4m + 1$ , it follows that infinitely many sets  $S_m$  are non-empty.

**Corollary 2.6.**  $S_m \neq \emptyset$  for infinitely many positive integers  $m$ .

Furthermore, as at least one of  $p = 4m - 1$  or  $q = 4m + 1$  is prime for all positive integers less than 14, we have another result.

**Corollary 2.7.**  $S_m \neq \emptyset$  for all  $m \leq 13$ .

The smallest  $m$  for which neither  $4m - 1$  nor  $4m + 1$  is prime is  $m = 14$ , and the next such is 16. It turns out that both  $S_{14}$  and  $S_{16}$  are non-empty; their respective minima are 77 and 99, respectively, and they begin as

$$S_{14} = \{77, 87, 116, 118, \dots\}, \quad S_{16} = \{99, \dots\}. \quad (17)$$

It is clear from the results in subsection 2.2. that all non-empty  $S_m$  will have a finite number of elements. At the moment, we cannot say more on any of the questions raised above.

### 3 Concluding remarks

In this paper we have considered some problems about existence and number of various types of star polygons. It might be interesting to investigate what, and how, changes if we consider the same problem(s) on the sphere and/or on surfaces of higher genus.

We conclude by presenting a graph-theoretic aspect of some of our results. A  **$k$ -circulant graph**  $G(n, k)$  is a graph on the vertex set  $\{0, \dots, n - 1\}$  in which two vertices  $i$  and  $j$  are connected by an edge if and only if  $|i - j| = k \pmod{n}$ .  $G(n, 1)$  is the cycle graph  $C_n$ . Clearly,  $G(n, k)$  and  $G(n, n - k)$  are isomorphic graphs. For each integer  $n \geq 3$ , let  $\mathcal{G}(n)$  denote the family of all  $k$ -circulant graphs on  $n$  vertices. Our perfect stars correspond to connected  $k$ -circulant graphs and this leads us to the following result.

**Corollary 3.1.** Let  $\mathcal{G}(n)$  be the family of all  $k$ -circulant graphs on  $n \geq 3$  vertices. If the only connected graph in  $\mathcal{G}(n)$  is  $C_n$ , then  $n = 3, 4$ , or  $6$ .

## Acknowledgements

I am deeply grateful to my daughter Marija, first for asking an interesting question and then for letting me tell you my version of the story. This paper has been partially supported by the Croatian Science Foundation via research project LightMol (Grant no. IP-2016-06-1142).

## References

- [1] DUJELLA, A. *Number Theory*. Školska knjiga, Zagreb, 2021.
- [2] HARDY, G. H., WRIGHT, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 1938.
- [3] LEHMER, D. H.. *The distribution of totatives*. Canadian J. Math. VII(3), 1955, p. 347-357.
- [4] SLOANE, N. J. A., editor, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, published electronically at <https://oeis.org>
- [5] <https://math.stackexchange.com/questions/301837/is-the-euler-phi-function-bounded-below>
- [6] <https://math.stackexchange.com/questions/3574080/specifying-a-least-upper-bound-for-the-number-of-divisors-as-a-function-of-n>
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Star\\_polygon](https://en.wikipedia.org/wiki/Star_polygon)

---

### Tomislav Došlić

University of Zagreb  
Faculty of Civil Engineering  
Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Croatia  
e-mail: tomislav.doslic@grad.unizg.hr

# Geometria, kartografia a fyzika v nových knižných publikáciách Vydavateľstva SPEKTRUM STU

Daniela Velichová, Margita Vajsálová

## Abstrakt

Informácie o troch zaujímavých knižných novinkách Vydavateľstva SPEKTRUM STU z roku 2021, ktoré sa venujú geometrii, jej aplikáciám v kartografickom zobrazovaní a vo vysvetľovaní fyzikálnych javov.

**Kľúčové slová:** knižné novinky

## Abstract

Information on three interesting new books published by Publishing House SPEKTRUM STU in the year 2021, which are dealing with geometry, its applications in cartographic mappings and in explaining physical phenomena.

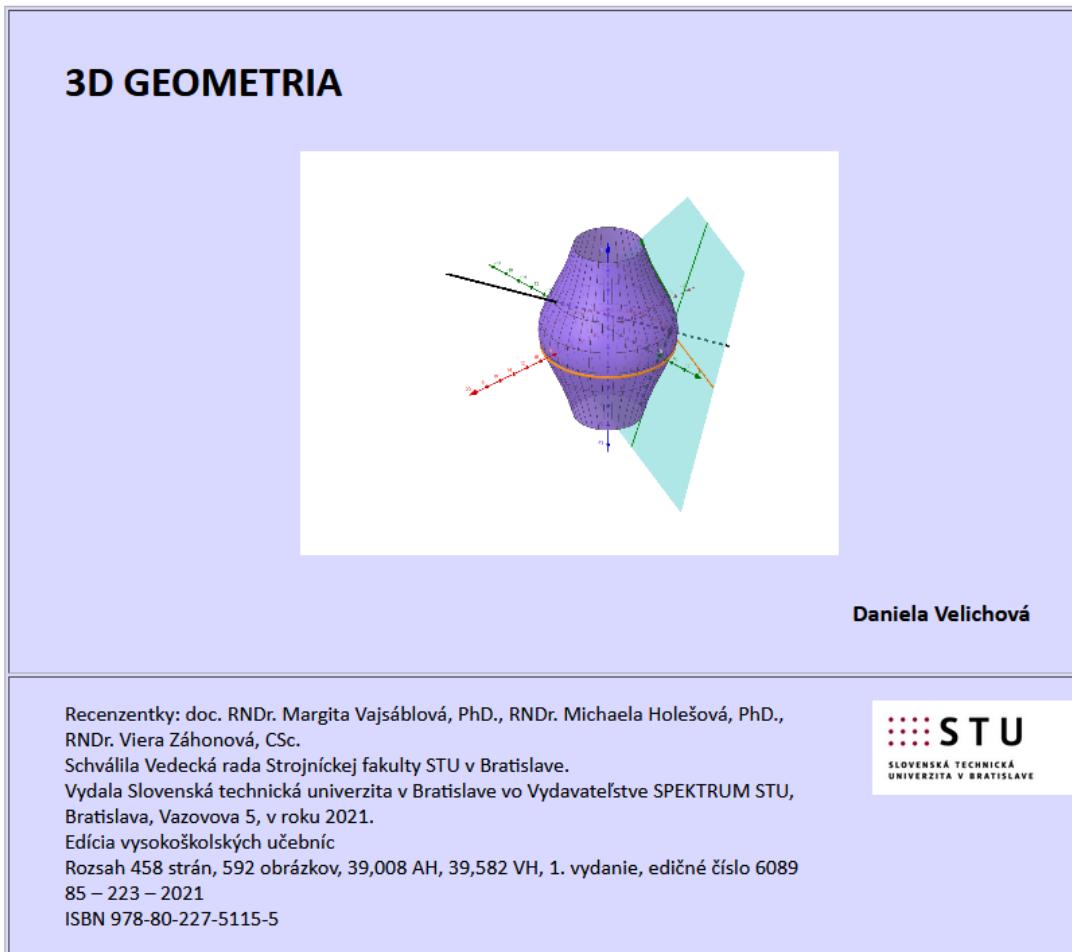
**Keywords:** new books

## 1 Daniela Velichová, 3D geometria

Vo vydavateľstve SPEKTRUM STU vyšla digitálna učebnica geometrie s názvom 3D geometria, ktorej autorkou je doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc., pôsobiaca na Ústave matematiky a fyziky Strojníckej fakulty STU v Bratislave. Cieľom predstavovanej učebnice geometrie, ktorá je pre študentov STU voľne dostupná na internete, je pomôcť študentom technických univerzít rozvinúť a prehĺbiť svoje schopnosti priestorového myslenia a podporiť ich matematickú tvorivosť a kompetencie, ktoré sú často požadované pri riešení problémov z reálnej praxe. Správne vnímanie priestorových súvislostí a vzťahov tiež prispeje k lepšiemu porozumeniu súvislostí a aplikácií matematických pojmov, relácií a vzťahov reprezentovaných pomocou dvoch základných interpretácií - syntetickej a analytickej aj v iných technických a vedných disciplínach, prostredníctvom aktivít uľahčujúcich interpretáciu pojmov a názornú demonštráciu správnosti uvádzaných tvrdení.

Jedným z mocných nástrojov v každej tvorivej vedeckej alebo technickej inžinierskej a dizajnérskej činnosti je geometria trojrozmerného priestoru, ktorá je dôležitou zložkou štúdia matematiky zastúpenou v obsahu predmetov najmä technicky a prírodovedne zameraných študijných programov univerzít. Základné geometrické súvislosti, klasifikácia geometrických objektov, ich vlastnosti a analytické vyjadrenie, zobrazovanie priestorových objektov a riešenie rôznych priestorových úloh sú integrálnou súčasťou matematického vzdelávania. Geometria je považovaná za jednu z najnáročnejších častí matematiky, pričom geometrická a priestorová predstavivosť sú základným predpokladom matematickej tvorivosti a imaginácie. Rozvíjanie priestorovej predstavivosti preto nesporne patrí k dôležitým aspektom vzdelávacieho procesu, najmä z dôvodu praktickej aplikácie nadobudnutých kompetencií v reálnom živote.

Pod priestorovou predstavivosťou rozumieme intelektovú schopnosť vybavovať si objekt priestoru na základe jeho rovinného obrazu, alebo reálne neexistujúci objekt trojrozmerného priestoru na základe jeho slovného či symbolického matematického opisu – rovnicou, vzorcом, vzťahom, a pod.



Obr. 1. Úvodná stránka učebnice 3D geometria

Geometrická predstavivosť sa vo všeobecnosti považuje za širší pojem, ktorý zahŕňa aj priestorovú predstavivosť, chápanú ako súbor predstáv o tvaroch a útvaroch a o vzájomných vzťahoch medzi geometrickými útvarmi priestoru a súbor schopností mentálne manipulovať s geometrickými útvarmi a ďalšími geometrickými predstavami v mysli. Je to schopnosť nielen vidieť v priestore, ale aj vedieť rekonštruovať priestorové objekty z ich rovinných priemetov. Táto schopnosť je dôležitá rovnako profesionálne ako aj pre praktické potreby každodenného života. Dá sa rozvíjať riešením vhodných úloh, a to u kohokoľvek, bez rozdielu rodu či úrovne vzdelania. Možno ju nadobudnúť aj životnými skúsenosťami a praktickými cvičeniami, a v každom veku.

Učebnica 3D geometria obsahuje kapitoly venované axiomatike trojrozmerného priestoru (so stručným vysvetlením rozdielu medzi euklidovskou a neeuklidovskou geometriou), geometrickým transformáciám priestoru, ich vlastnostiam a analytickým maticovým zápisom a predstavené sú základné premietacie metódy priestoru do roviny. Nasledujú kapitoly opisujúce lineárne útvary priestoru, krivky a ich vlastnosti, a tiež rozsiahle kapitoly o plochách a telesách euklidovského priestoru. 458 strán učebnice je bohatou naplnenosťou množstvom živých pohyblivých ilustrácií, ktoré sú cenným prostriedkom uľahčujúcim interpretáciu opisovaných objektov a umožňujú predstaviť tieto 3D objekty v priestore, čo je významný nový a nesporne pozitívny fenomén digitálnej paradigmy našej súčasnosti. V učebnici je použitá aj metóda zobrazenia priestoru a objektov priestoru pomocou stereoskopického zobrazenia, rozšírená

realita (augmented reality). Prezentované stereoskopické dvojfarebné (červené a zelené) priemety je potrebné čítať pomocou dvojfarebných okuliarov, čím vzniká ilúzia trojrozmerného priestoru (stereogram). Zobrazený objekt vnímame ako jednofarebný (čierny) trojrozmerný objekt umiestnený v priestore pred priemetrou reprezentovanou obrazovkou počítača. Čitatelia učebnice tak môžu objavovať vo virtuálnom priestore krásy jeho geometrie ukrytej v tajomných dvojrozmerných priemetoch jeho objektov, ktoré magicky ožijú a vystúpia nám v ústrety do priestoru, čím sa stanú odmenou za mentálne úsilie, ktoré bolo potrebné vynaložiť k ich porozumeniu.

Vysokoškolskú učebnicu 3D geometria si študenti Slovenskej technickej univerzity v Bratislave môžu stiahnuť zdarma po prihlásení do Akademického informačného systému STU. Interaktívnu učebnicu si možno objednať na DVD nosiči na stránkach Vydavateľstva SPEKTRUM STU na adrese <https://www.vydavatelstvo.stuba.sk/obchod/3d-geometria>.

## 2 Margita Vajsáblová, Matematické základy kartografie

Vysokoškolská učebnica Matematické základy kartografie je určená pre študentov a odborníkov z oblasti geografie, geodézie, kartografie a katastra nehnuteľností. Priamo nadväzuje na knihu Matematická kartografia, za ktorú autorka získala ocenenie Literárneho fondu SR za rok 2013 v sekcií pre vedeckú a odbornú literatúru a počítačové programy v kategórii Prírodné a technické vedy. Nové poznatky a aktualizácie si vyžiadali rozšírenie a prepracovanie pôvodného obsahu. Autorka doc. RNDr. Margita Vajsáblová, PhD. pôsobí na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave.

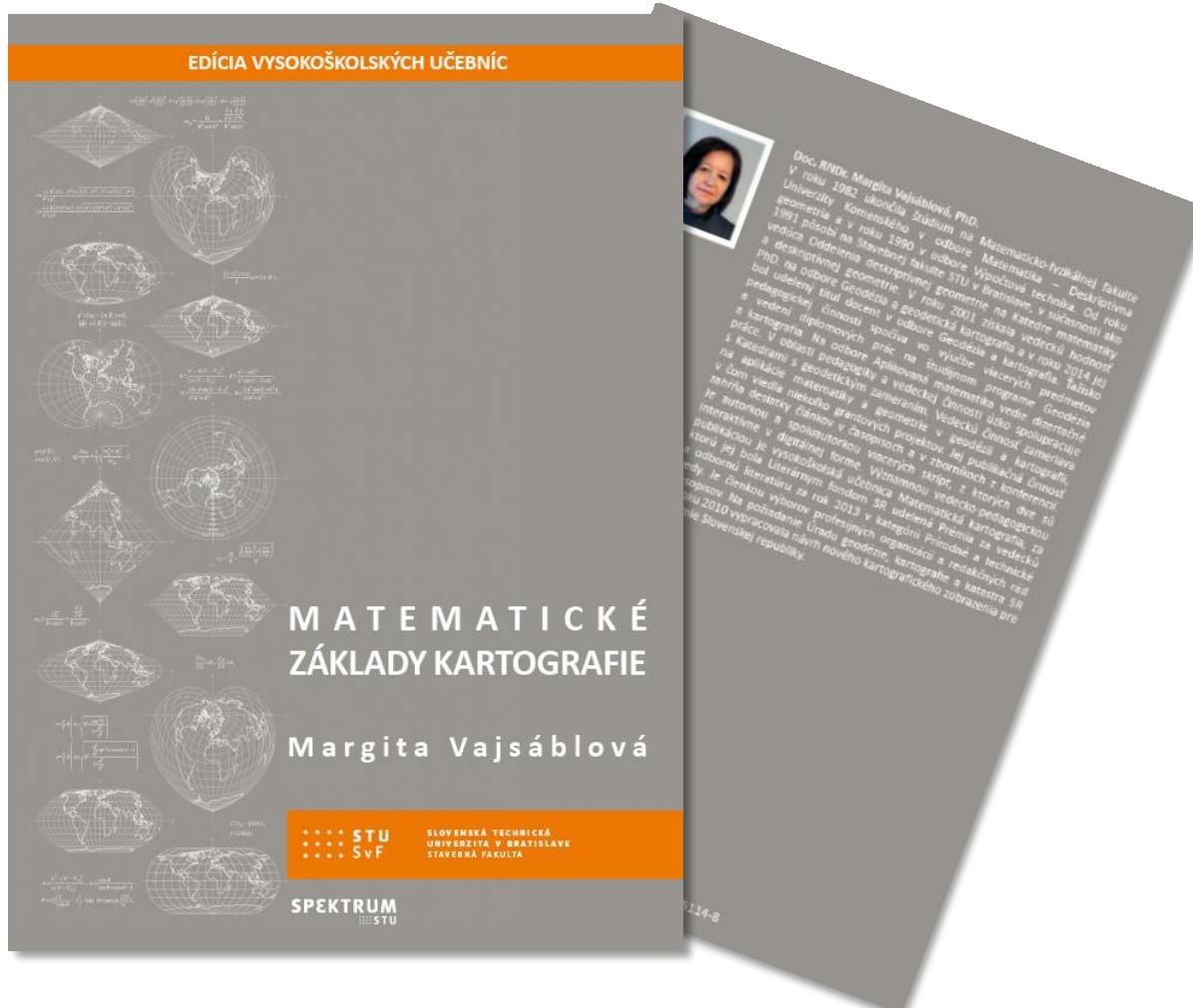
*„Do tejto vysokoškolskej učebnice som vložila svoju matematickú logiku, geometrické oči a kartografické srdce, preto verím, že to čitateľovi pomôže vniknúť do problematiky kartografického zobrazovania.“* Týmito slovami autorka uviedla svoj prístup k tvorbe učebnice.

Text vysokoškolskej učebnice v rozsahu 443 strán študentov oboznamuje s teóriou kartografického zobrazovania, skresleniami mapových prvkov a s aplikáciou v geodetických súradnicových systémoch na území Slovenska aj vo viacerých štátach Európy. Matematická a geometrická podstata kartografického zobrazovania je zdôrazňovaná v každom pojme, vzťahoch a ich vysvetlení. Učebnica obsahuje množstvo názorných obrázkov a odvodení matematických vzťahov. Z dôvodu efektívnejšej orientácie v texte je v závere uvedený tiež register mien a pojmov. Viaceré poznatky uverejnené v tejto učebnici sú vedeckými výsledkami autorky publikované v rámci viacročných riešení grantových projektov, čím svojou odbornosťou presahuje úroveň bežných učebníc.

Kapitoly prvej časti učebnice obsahujú teoretické základy, ako základné pojmy matematickej kartografie, definovanie referenčných plôch, súradnicových sústav, kriviek na týchto plochách a vlastnosti ich obrazu, hlavne s ohľadom na skreslenie v kartografickom zobrazení, a tiež kritériá hodnotenia kartografického zobrazenia. Klasifikácia kartografických zobrazení, ktorá je uvedená podľa viacerých kritérií, je doplnená charakteristikou jednotlivých typov podľa skreslení, zvlášť vlastností obrazu v konformných zobrazeniach. V ďalších kapitolách učebnice sú uvedené matematické a geometrické charakteristiky jednotlivých tried kartografických zobrazení s ilustráciami obrazu zemepisnej siete. V jednoduchých valcových, kužeľových a azimutálnych zobrazeniach sú odvodenia vzťahov pre zobrazovacie rovnice z kritérií na

ekvidištančnosť, ekvivalentnosť a konformnosť zobrazenia. V uvedených typoch zobrazení sú tiež podrobne odvodené vzťahy na výpočet ich parametrov, a to z kritérií na skreslenie vybraných rovnobežiek. V konformných zobrazeniach sú uvedené tiež výpočty parametrov z kritéria na minimalizáciu strednej kvadratickej hodnoty dĺžkového skreslenia na ploche zobrazovaného územia. Z vedeckého hľadiska je zaujímavou tému tvorba konformného variačného a minimálneho zobrazenia, pričom táto náročná téma je v učebnici vysvetlená veľmi zrozumiteľne.

Ťažiskovou tému je podrobňa charakteristika kartografických zobrazení aplikovaných v geodetických súradnicových systémoch na území Slovenska v historickom aj aktuálnom kontexte, a to v civilnom sektore: Faschingovo, Cassiniho-Soldnerovo zobrazenie, stereografická projekcia, Křovákovo, a tiež Lambertovo zobrazenie pre Slovenskú republiku. V ďalších kapitolách je opísaný vývoj a charakteristika zobrazení použitých na topografických mapách: Gaussovo-Krügerovo a Mercatorovo transverzálne valcové zobrazenie, ktoré je používané vo viacerých štátach, a tiež na vojenských mapách vojenského zoskupenia NATO. Z hľadiska praktického využitia sú veľmi logicky uvedené vzájomné transformácie súradníč referenčných systémov (ETRS89, S-JTSK, UTM a ľ.) s uvážením aktuálnych realizácií týchto systémov, kde sú uvedené postupy, schémy a najaktuálnejšie parametre jednotlivých krokov transformácie.



Obr. 2. Obálka učebnice Matematické základy kartografie

V záverečnej časti učebnice sú uvedené kritériá voľby kartografického zobrazenia pre geodéziu či kartografiu, odvodenie triedy zobrazení metódami všeobecnej teórie matematickej kartografie. Kapitola o historickom vývoji matematickej kartografie obsahuje jeho základné momenty s pestrou ukážkou historických máp. V histórii kartografie sú vo veľkej mieri zastúpené aj významné osobnosti matematiky a geometrie, ich vplyv na rozvoj kartografie autorka zdôraznila a výstižne ukázala tento interdisciplinárny kontext.

Vysokoškolskú učebnicu Matematické základy kartografie si študenti Slovenskej technickej univerzity v Bratislave môžu stiahnuť zdarma po prihlásení do Akademického informačného systému STU. Ostatní záujemcovia si môžu knihu objednať na stránkach Vydavateľstva SPEKTRUM STU na adresе

<https://www.vydavatelstvo.stuba.sk/obchod/mathematicke-zaklady-kartografie>.

### 3 Isaac Newton, Matematické princípy prírodnej filozofie

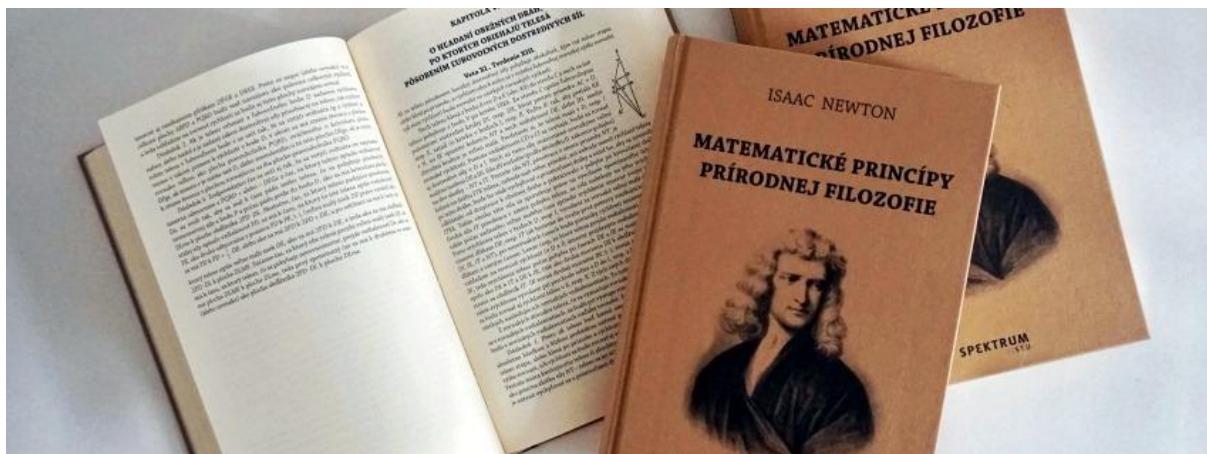
Slovenská verejnosť má po prvýkrát možnosť prečítať si v slovenskom jazyku knihu Isaaca Newtona s názvom Matematické princípy prírodnej filozofie považovanú za "bibliu klasickej fyziky". Jej slovenský preklad, na ktorom pracoval vyše roka doc. RNDr. Juraj Šebesta, PhD. z Katedry teoretickej fyziky a didaktiky fyziky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, vyšiel vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU. Hodnotu tejto výnimočnej publikácie umocňuje aj jej vzhlad. Obálka knihy pripomínajúca plátno a jemne žltý papier jednotlivých stránok evokujú pôvodné historicke spisy Sira Isaaca Newtona. Výnimočnosťou prvého slovenského vydania je aj skutočnosť, že sa nejedná iba o preklad pôvodného diela, ktoré bolo už v čase svojho vzniku považované za výnimočné a postupne významným spôsobom ovplyvnilo vývoj vedy. Pôvodný text je doplnený množstvom poznámok a vysvetlení, ktoré čitateľom pomôžu lepšie pochopiť nielen samotný obsah diela, ale aj dobu, v ktorej bolo toto mimoriadne dielo vytvorené.

Úvod knihy prináša podrobný Newtonov životopis s mnohými poznámkami prekladateľa, ktoré sú dostupné iba v tomto slovenskom vydaní. Hlavnú časť knihy tvoria Matematické princípy prírodnej filozofie – Definície a Axiómy, čiže zákony pohybu. Pri každej definícii Newton presne vysvetľuje, ako k nej dospel, pričom vždy argumentuje vlastnými konkrétnymi pozorovaniami. Ak argumentuje výpočtami alebo geometriou, sú v texte zachované aj všetky kresby a vzorce. Slovenské vydanie obsahuje navyše množstvo poznámok, ktoré priblížujú vtedajšiu dobu a pomáhajú lepšie pochopiť Newtonove argumenty aj pre moderného čitateľa.

Kniha I pojednáva v štrnástich kapitolách všeobecne o pohybe telies, o kvadratických obežných dráhach, o pohybe po zadaných povrchoch, o kmitavom pohybe zavesených telies, o príťažlivých a dostredivých silách a o pohybe veľmi malých telies pôsobením dostredivých síl smerujúcich k jednotlivým časťam veľmi veľkého telesa. Kniha II v deviatich kapitolách opisuje pohyb telies pri odpore, pohyb zavesených telies a kruhový pohyb telies, pričom niekoľko kapitol je venovaných hydrostatike, pojmom hustota a tlak tekutín, ďalej pohybu tekutín a pohybu, ktorý sa šíri tekutinami. Kniha III je rozčlenená na štyri časti: Pravidlá uvažovania vo filozofii, Javy, alebo úkazy, Vety, O pohybe uzlov mesiaca. Záverečnú časť knihy tvorí Systém sveta. V ňom Newton predstavuje čitateľom vývoj vedomostí o vesmíre a o planéte Zem, približuje ich vnímanie v staroveku a postupne prechádza k predkladaniu vlastných zaujímavých a objavných argumentov.

Kniha s rozsahom 472 strán je opatrená tiež vecným a menným registrom a obsahuje prílohu Miery a váhy použité v princípoch.

Slovenský preklad spisov Sira Issaca Newtona Matematické princípy prírodnej filozofie sa dá zakúpiť na stránkach Vydavateľstva SPEKTRUM STU na adrese  
<https://www.vydavatelstvo.stuba.sk/obchod/mathematicke-principy-prirodnej-filozofie>.



Obr. 3. Kniha Matematické princípy prírodnej filozofie Zdroj  
<https://www.facebook.com/vydavatelstvo.stuba>

## Literatúra

- [1] NEWTON, I. *Matematické princípy prírodnej filozofie*. 1. vyd. Vydavateľstvo SPEKTRUM STU, Bratislava, 2021, 472 str. ISBN 978-80-227-5095-0.
- [2] VAJSÁBLOVÁ, M. *Matematické základy kartografie*. 1. vyd. Vydavateľstvo SPEKTRUM STU, Bratislava, 2021, 443 str. ISBN 978-80-227-5114-8.
- [3] VELICOVÁ, D. *3D geometria*. 1. vyd. Vydavateľstvo SPEKTRUM STU, Bratislava, 2021, 458 str. ISBN 978-80-227-5115-5.

---

**doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.**  
Ústav matematiky a fyziky  
Strojnícka fakulta STU v Bratislave  
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovenská republika  
e-mail: daniela.velichova@stuba.sk

**doc. RNDr. Margita Vajsáblová, PhD.**  
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie  
Stavebná fakulta STU v Bratislave  
Radlinského 2766/11, 810 05 Bratislava, Slovenská republika  
e-mail: margita.vajsablova@stuba.sk

# Peanova a Hilbertova křivka

Jan Zeman

## Abstrakt

V tomto článku představíme pojem Peanovy křivky, tj. prostor vyplňující křivky, jež dokázala možnost spojitého zobrazení úsečky na plochu. Uvádíme Hilbertovu interpretaci a jeho korespondenci s H. Minkowskim k tomuto tématu. Význam křivky nastíníme v kontextu teorie množin a předchozích nespojitých zobrazení, objevených G. Cantorem.

**Klíčová slova:** prostor vyplňující křivky; Peano, Hilbert

## Abstract

In this contribution, we present the concept of the space-filling Peano curve which proved the possibility of continuous mapping of a line to a part of plane. We present Hilbert's interpretation and his correspondence with H. Minkowski on this topic. We present the importance of the curve in context of set theory and Cantor's previous non-continuous mappings.

**Keywords:** space-filling curves; Peano, Hilbert

## 1 Úvod

Tento článek se týká konceptu *Peanovy křivky* (též *prostor vyplňující křivky*), uvedené roku 1890. Nejdříve názorně na obrázcích představíme dva algoritmy pro konstrukci takové křivky, která vyplní celý čtverec – PEANŮV původní algoritmus a algoritmus HILBERTŮV. Potom komentujeme vlastnosti této křivky. Nakonec představíme historicky předcházející CANTOROVA alternativní zobrazení, která uvedl v kontextu svého oboru teorie množin.

## 2 Jak křivky vypadají?

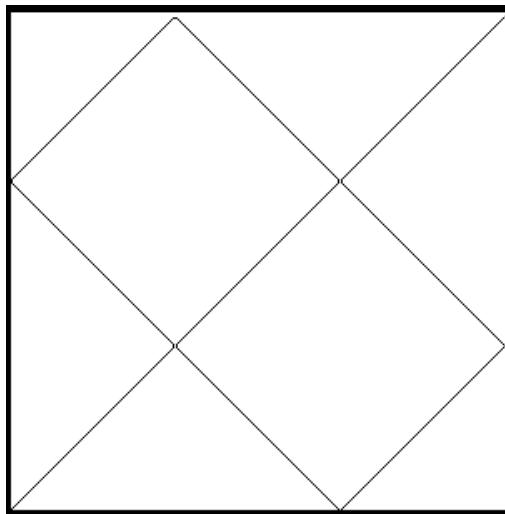
Problém se týká spojitého zobrazení křivky na část plochy (nebo obecně na jakýkoliv  $n$ -rozměrný útvar) a jeho nejnázornější motivací je otázka:

Je možné spojitě zobrazení každý bod křivky na jistý bod čtverce, a tak získat nepředstavitelnou křivku, která prochází všemi body čtverce?

Ano. GIUSEPPE PEANO (1858–1932) byl prvním, kdo uvedl takové spojité zobrazení, a celá třída křivek s touto vlastností je po něm obecně pojmenována jako *Peanovy křivky*. Existují jiné algoritmy než PEANŮV, které budou vytvářet jiný tvar výsledné křivky, ale obecně je pouze důležité, že tato křivka vyplní celý čtverec, a její přesný tvar nehráje velkou roli. Představíme dva takové algoritmy.

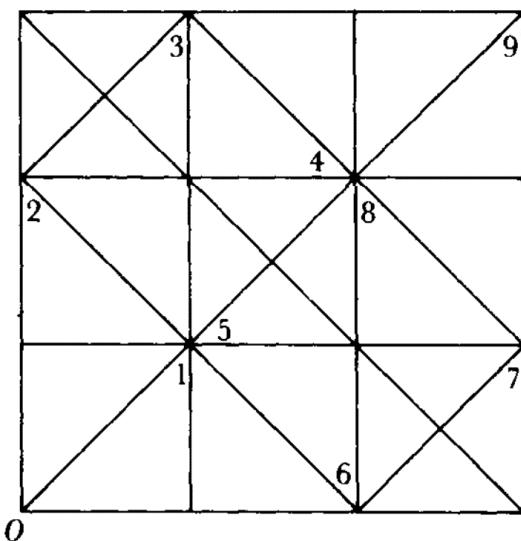
## 2.1 Peanův původní algoritmus

PEANO v práci [8] popsal zobrazení ve vzorcích, formou iterujících funkcí.<sup>1</sup> Zde projdeme tuto metodu pouze názorně. PEANOVU křivku samotnou dostáváme pouze na samém konci v limitní iteraci.



Obr. 1. PEANOVA konstrukce – 1. iterace

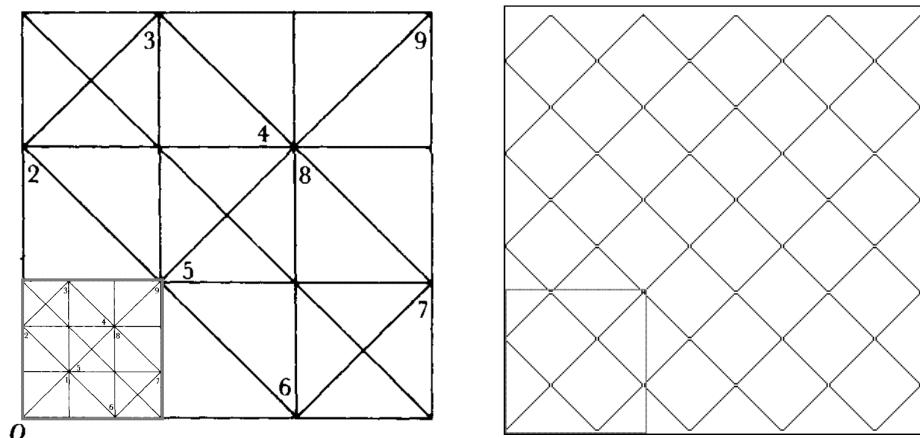
Tento tvar (Obr. 1) je křivou, která reprezentuje první iteraci v PEANOVĚ konstrukci. Nechť se čtenář nenechá zmást, že by šlo o spojnice levého dolního vrcholu čtverce s pravým horním, která by protínala nakloněný obdélník. Na obrázku je ve čtverci pouze jediná křivka. Je vedena jedním tahem, jehož průběh je zřejmější z (Obr. 2).



Obr. 2. PEANOVA konstrukce – 1. iterace (viz [4, s. 1018])

Původní čtverec rozdělíme na 9 menších a spojíme diagonálou vrcholy těchto malých čtverců podle uvedeného číslování. Ve druhé iteraci pak nahradíme každý z oněch devíti menších čtverců zmenšenou podobou křivky z první iterace (Obr. 3).

<sup>1</sup>Pro jejich konkrétní tvar viz [5, s. 95nn] a také [3, s. 235].

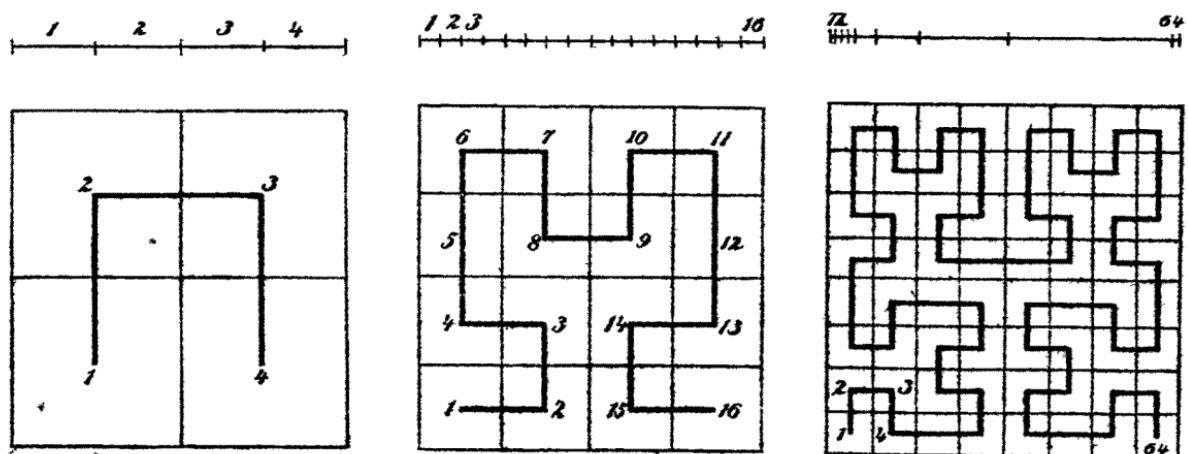


Obr. 3. PEANOVA konstrukce – 2. iterace (vlevo konstrukce, vpravo výsledek)

A pokud opakujeme tento postup do nekonečna, obdržíme v limitní iteraci křivku, která prochází každým bodem čtverce.

## 2.2 Hilbertova křivka

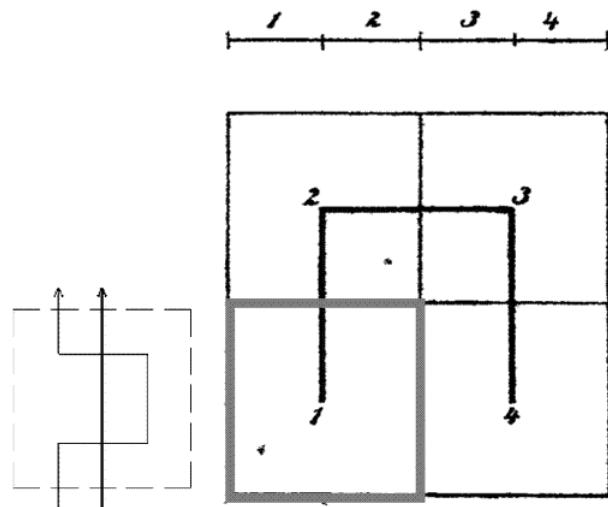
HILBERT uvedl v [2] tři obrázky (Obr. 4) a svůj algoritmus vysvětlil názorně, geometricky:



Obr. 4. HILBERTOVA konstrukce (viz [2])

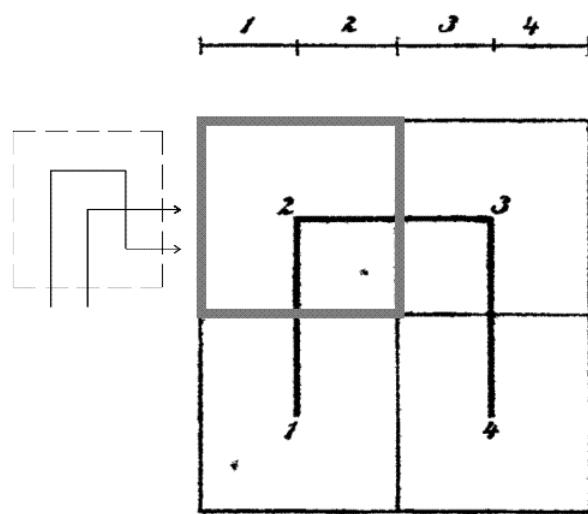
Křivku, kterou máme zobrazit, například úsečku délky 1, rozdělíme nejdříve na čtyři stejné části 1, 2, 3, 4 a určitý kousek plochy, kterou budeme předpokládat v podobě čtverce o straně délky 1, rozdělíme dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři stejné čtverce 1, 2, 3, 4 (Obr. 4 vlevo). Následně rozdělíme každou z úseček 1, 2, 3, 4 zase na čtyři stejné části, takže na původní úsečce dostaneme šestnáct úseček 1, 2, 3, ..., 16. Současně rozdělíme každý ze čtyř čtverců 1, 2, 3, 4 zase na čtyři stejné čtverce a takto vzniklých šestnáct čtverců popíšeme následně čísla 1, 2, 3, ..., 16, přičemž je však nutno zvolit takové pořadí čtverců, že se každý následující čtverec bude jednou stranou dotýkat čtverce předcházejícího [2, p. 459].

Zaměřme se na substituce, prováděné na určitém kousku křivky mezi následujícími iteracemi. Úsek křivky v levém dolním čtverci, který je přímý, substituujeme ve druhé iteraci lomenou čarou (Obr. 5).



Obr. 5. Jeden typ substituce úseku křivky pro následující iteraci

Oproti tomu v levém horním čtverci substituujeme křivku tvaru na Obr. 6.

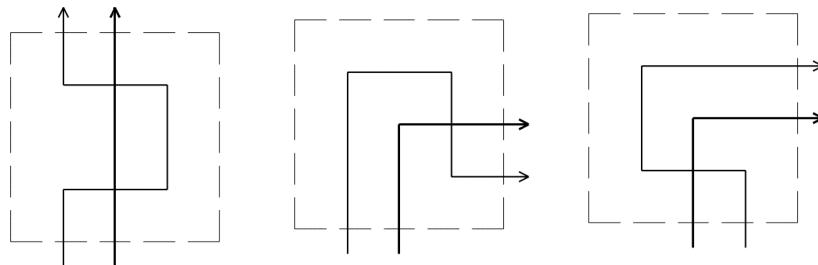


Obr. 6. Jiný typ substituce

Tím jsou však možnosti pro různé typy substituce prakticky vyčerpány (Obr. 7).

Poslední dvě se liší pouze v tom, kterou stranou šipka do čtverce vchází a kterou z něj vychází, méněno vzhledem k úseku křivky z předcházející iterace. A znovu, pokud opakujeme uvedený postup do nekonečné iterace, získáme HILBERTOVU křivku, která vyplňuje čtverec. Tvar HILBERTOVY křivky je dnes rovněž nejlépe známou podobou PEANOVOY křivky.

HILBERT neuvedl vzorce pro zobrazovací funkce. Nakonec však v článku poznamenává, že zobrazovací funkce jsou v každém svém bodě spojité, a lze je tedy podle WEIERSTRASSOVY věty

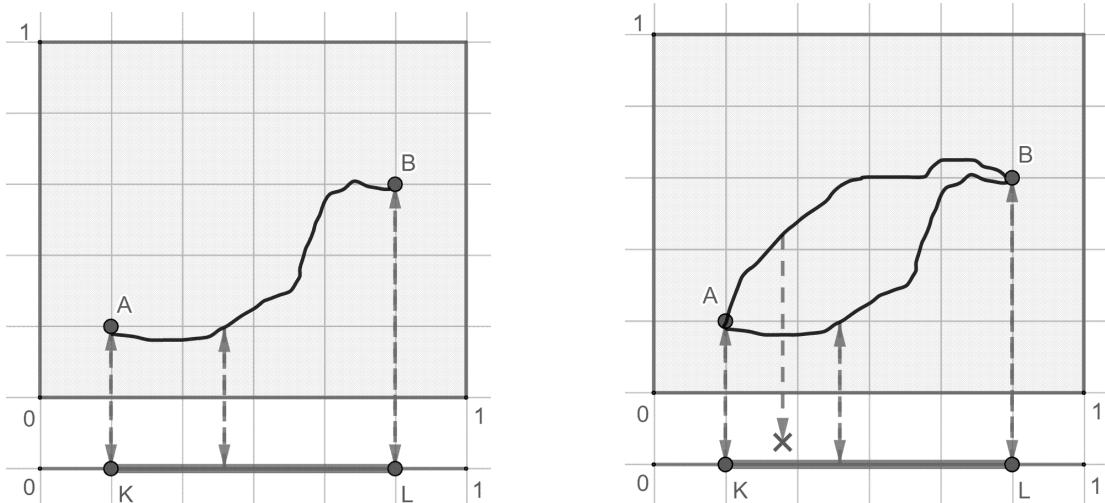


Obr. 7. Všechny možné substituce

rozvinout do nekonečných posloupností polynomiálních funkcí, které stejnoměrně konvergují na celém intervalu. Uvádí zároveň, že takto definovaná limitní funkce, ačkoliv všude spojitá, nemá nikde derivaci.

### 2.3 Inverzní zobrazení

Naše zobrazení přitom nejsou bijektivní, a jsou proto víceznačná. Byly podány důkazy toho, že mezi jednorozměrným a  $n$ -rozměrným kontinuem neexistuje zobrazení, které by bylo spojité a bijektivní (tedy homeomorfismus). Nejnázornějším důkazem je:

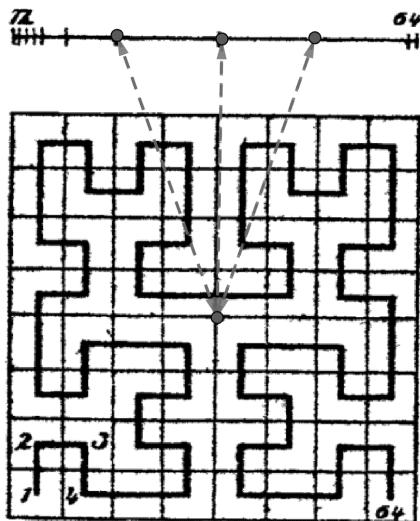


Obr. 8. Důkaz, že jednorozměrná úsečka nemůže být spojité a bijektivně zobrazena na dvojrozměrný čtverec

*Důkaz.* Uvažujme nyní opačný směr než dosud a zobrazujme body čtverce na úsečku. Bod  $A$  ve čtverci zobrazme na  $K$  na úsečce a bod  $B$  ve čtverci na bod  $L$  na úsečce. Poté spojitě zobrazme libovolnou křivku  $AB$ , která leží ve čtverci, na úsečku  $KL$  na úsečce (Obr. 8 vlevo). Nyní chceme zobrazit zbylé body čtverce na zbylé body naší úsečky.

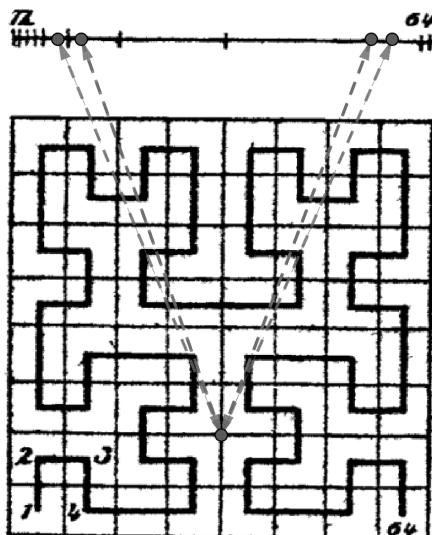
Ať však vezmeme už jen libovolnou jinou křivku, která spojuje body  $A$  a  $B$  (Obr. 8 vpravo),  $A$  musí vždy být tak jako tak zobrazeno na  $K$  a  $B$  na  $L$ . Obraz této druhé křivky  $AB$  na úsečku proto musí procházet intervalom  $KL$ , což však není možné, neboť tento interval byl už přiřazen křivce na obrázku vlevo.  $\square$

Pokud je řeč speciálně o HILBERTOVĚ křivce, HILBERT tvrdí, že zobrazení inverzní přiřadí každému bodu čtverce 1, 2 nebo 4 body úsečky, tj. je nejvýše trojznačné. HILBERTŮV přítel HERMANN MINKOWSKI, který je dodnes především znám v oboru fyziky pro definici MINKOWSKÉHO časoprostoru (srov. [10] a [11]), však v dopise z 22. 12. 1890 vyjadřuje pochybnost a neví, proč by určitým bodem čtverce měl pohybující se bod projít více než dvakrát [6, s. 41n]. Pravdu měl však HILBERT, jak dokázal SIERPINSKI [9, s. 210]. Bod ve čtverci, kam se pohybující se bod vrátí třikrát, je přesně uprostřed čtverce. Proto bude mít při inverzním zobrazení také tři obrazy na původní úsečce (Obr. 9).



Obr. 9. Jediný bod v celém čtverci, který má 3 obrazy na úsečce

Jiné body o obou souřadnicích tvaru  $\frac{n}{2^m} < 1$ ,  $(n, m \in \mathbb{N})$ , tj. body vrcholů menších čtverců, budou mít na úsečce čtyři obrazy (Obr. 10). Zbylé body budou mít obraz jeden nebo dva.



Obr. 10. Jeden z bodů, které mají 4 obrazy

### 3 Alternativní zobrazení

#### 3.1 Zobrazení pomocí desetinných rozvojů

MINKOWSKI na Hilbertovu křivku však ve stejném dopise reaguje dále takto:

[...] Co vlastně máte proti onomu principiálně jednoduššímu příkladu, kdy je čas, jdoucí od 0 do 1, vyjadřován desetinným rozvojem a pouze se ze sudých a lichých pozic vytvoří dva další desetinné rozvoje, které budou potom vyjadřovat pravoúhlé souřadnice bodu v onen konkrétní čas? Spojitost pohybu je zde přece zaručena ve zcela stejném smyslu [6, s. 41n].

Bod na úsečce: $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \underline{70710678} \dots$ $\Downarrow$ Bod ve čtverci: $x = 0, 7707 \dots$ $y = 0, 0168 \dots$
---

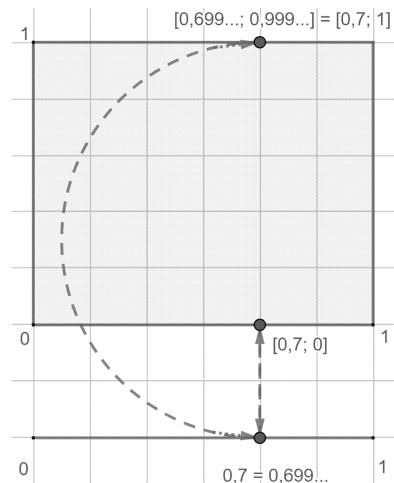
MINKOWSKI není autorem tohoto algoritmu, opakuje zde tedy v podstatě CANTORŮV důkaz z roku 1877, že čtverec, potažmo libovolný  $n$ -rozměrný útvář, má mohutnost kontinua (CANTOR se na rozdíl od MINKOWSKÉHO nevyjadřuje v časových a pohybových analogiích). Takové požadované zobrazení je oproti MINKOWSKÉHO domněnce nutně nespojitě.

Navíc však zobrazení nevykazuje ani vzájemnou jednoznačnost, kterou požadoval CANTOR sám. Dokud je řeč o iracionálních číslech, algoritmus funguje, protože mají nekonečný, neperiodický desetinný rozvoj. Racionální čísla s konečným desetinným rozvojem však lze zapsat

1. buď s nekonečným počtem nul na konci,
2. nebo se zmenšenou předchozí číslicí a periodou  $\bar{9}$ .

Pokud potom uvažujeme souřadnice výsledného bodu ve čtverci jako desetinné rozvoje, vytvořené ze sudých a lichých pozic původního, dostaneme v obou případech odlišné výsledné body, jako v následujícím příkladě.

$0,7 = 0,6\bar{9}$ $\Downarrow$ 1) $0, \underline{7000} \dots$ $x = 0, 7$ $y = 0$  2) $0, \underline{69999} \dots$ $x = 0, 6999 \dots = 0, 7$ $y = 0, 9999 \dots = 1$
---



V tomto případě by řešením bylo prostě přijmout jeden zápis a zamítnout druhý. Problém by však přetrval pro některá racionální čísla na úsečce. Např. ta s periodou  $\overline{0c}$  nebo  $\overline{c0}$ , kde  $c$  je

číslice, se potom zobrazí do bodu čtverce, jehož jedna souřadnice bude s periodou  $\bar{0}$ . To CANTOR vylučuje i proto, že se do téhož bodu čtverce zobrazí i číslo se zmenšenou číslicí před periodou  $\bar{c9}$  nebo  $\bar{9c}$ . Jelikož nemůžeme snadno zakázat všechny takové možnosti, nelze celý problém tímto způsobem řešit.

$$0,28\bar{29} = 0,\underline{28}\underline{29}\underline{29}\dots$$

↓

$$x = 0,2222\dots$$

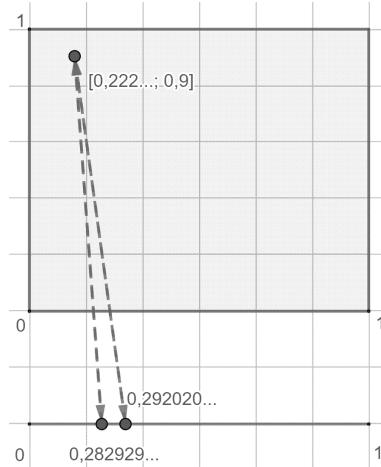
$$y = 0,8999\dots = 0,9$$

$$0,29\bar{20} = 0,\underline{29}\underline{20}\underline{20}\underline{20}\dots$$

↓

$$x = 0,2222\dots$$

$$y = 0,9$$



### 3.2 Zobrazení pomocí řetězových zlomků

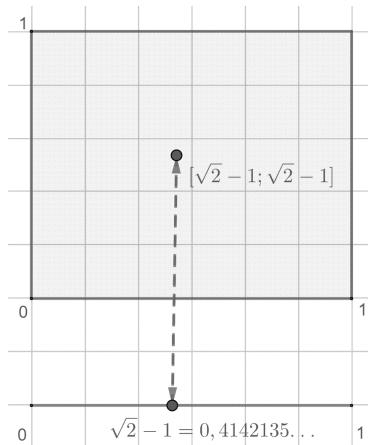
CANTOR poté uvedl nový a zcela odlišným důkaz ekvivalence jednorozměrného a  $n$ -rozměrného kontinua, využívající řetězové zlomky. Myšlenka je však tatáž jako výše: pouze se ze sudých a lichých pozic v rozvoji řetězového zlomku vytvoří dva další řetězové zlomky, které budou vyjadřovat souřadnice.

$$\begin{aligned} \sqrt{2}-1 &= [\underline{2}, \underline{2}, \underline{2}, \underline{2}, \underline{2}, \dots] = \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}} \end{aligned}$$

↓

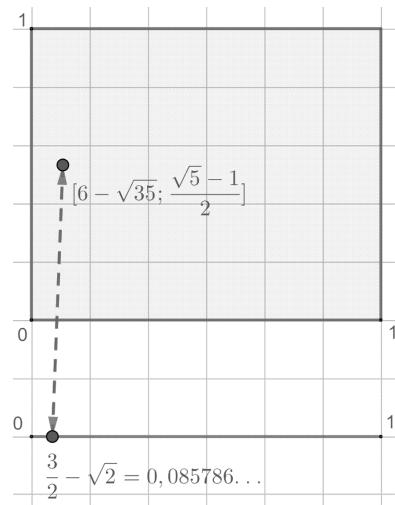
$$x = [\underline{2}, \underline{2}, \underline{2}, \dots] = \sqrt{2}-1$$

$$y = [\underline{2}, \underline{2}, \underline{2}, \dots] = \sqrt{2}-1$$



V tomto případě jsou souřadnice stejné, což však nehráje roli. Abychom se vyjádřili názorněji, uveďme jako jiný příklad řetězový zlomek čísla  $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$  a výsledek zobrazení.

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} - \sqrt{2} &= [11, \overline{1, 1, 1, 10}] = \\
 &= [\underline{11}, 1, \underline{1}, 1, \underline{10}, 1, \underline{1}, 1, \underline{10}, \dots] \\
 &= \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \dots}}}}}} \\
 \Downarrow \\
 x &= [11, \overline{1, 10}] = 6 - \sqrt{35} \\
 y &= [1, 1, 1, \dots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}
 \end{aligned}$$



Oproti zobrazení pomocí desetinných rozvojů je pro iracionální čísla toto zobrazení vzájemně jednoznačné. Ekvivalentnost jednorozměrného a  $n$ -rozměrného kontinua dokázal CANTOR ve druhém kroku pomocí ekvivalentnosti množiny iracionálních čísel a množiny reálných čísel [1].

## 4 Závěr

PEANOVA křivka je výsledkem jistého algoritmu pro spojité zobrazení úsečky na čtverec, které však není vzájemně jednoznačné (viz Tabulka 1).

	vzájemně jednoznačné	spojité
zobrazení pomocí desetinných rozvojů		
zobrazení pomocí řetězových zlomků	x	
PEANOVA a HILBERTOVA křivka		x

Tab. 1. Rozdíly v zobrazeních

V oboru teorie množin byl PEANŮV článek velmi významný, neboť především ukázal, že zobrazit křivku na plochu spojitě je skutečně možné.

Poznamenejme, že algoritmy pro konstrukci PEANOVÝCH křivek jsou součástí výuky programování na VŠ a demonstruje se na nich využití rekurence. Ačkoliv PEANOVA křivka nepatří do oboru aplikované matematiky, své aplikace v informatice má – všude tam, kde je nutno linearizovat diskrétní  $n$ -rozměrný prostor alternativním způsobem vůči zřejmému uspořádání bodů nejdříve pomocí souřadnice  $x$ , poté podle souřadnice  $y, \dots$ . To nastává v aplikacích, které renderují obraz, v geografických informačních systémech nebo v multimedialních serverech (viz [7]).

## Literatura

- [1] CANTOR, G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. In *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84, 1878, pp. 242–258. Also In CANTOR, G. *Gesammelte Abhandlungen*.

- lungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Ernst Zermelo, ed., Springer-Verlag, 1932. Reprint Olms-Verlag, 1966, s. 119–133.
- [2] HILBERT, D. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. In *Mathematische Annalen* 38, 1891, s. 459–460.
- [3] HYKŠOVÁ, M. Fraktály a objektově orientované programování. In *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 46, 2001, s. 232–253.
- [4] KLINE, M. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Vol. 3. Oxford Univ. Press, 1972.
- [5] KOUDELA, L. *O pojetí křivky*. OPS, 2013.
- [6] MINKOWSKI, H. *Briefe an David Hilbert*. Lili Rüdenberg, Hans Zassenhaus, eds., Springer-Verlag, 1973.
- [7] MOCKBEL, M., AREF, W. Space-filling Curves. In SHEKAHR, S., XIONG, H. *Encyclopedia of GIS*, Springer-Verlag, 2008, s. 1068–1072.
- [8] PEANO, G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. In *Mathematische Annalen* 36, 1890, s. 157–160.
- [9] SIERPINSKI, W. O krzywych, wypełniających kwadrat. In *Prace matematyczno-fizyczne* 23, 1912, s. 193–219.
- [10] ZEMAN, J. David Hilbert na univerzitě v Göttingen a jeho okruh přátel a kolegů. In *Kuděj* 19, 2018, s. 43–63.
- [11] ZEMAN, J. Geometrické pojetí teorie forem v přednášce Hermanna Minkowského. In BASTL, B., LÁVIČKA, M. *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2018*, Plzeň, 2018, s. 165–170.

---

**Ing. Jan Zeman, PhD.**

Centrum pro teoretická studia  
Společné pracoviště UK a AVČR  
Husova 4, 110 00 Praha, Česká republika  
e-mail: zeman@cts.cuni.cz

# SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



## PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

### SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective  
to stimulate scientific research and teaching methodology  
in the fields of geometry and computer graphics  
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

---

#### SSGG

Institute of Mathematics and Physics  
Faculty of Mechanical Engineering  
Slovak University of Technology in Bratislava  
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR  
e-mail: [ssgg@ssgg.sk](mailto:ssgg@ssgg.sk), URL: [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

# Abstracts

## **J. Blažek, P. Pech: Chord of conics**

The paper deals with locus of points related to chords of conic sections. Firstly the locus is explored using dynamic geometry software GeoGebra, secondly using computer algebra system CoCoA by elimination the locus equation is derived. The locus is related to well-known theorems and concepts, as Simson line and Frégier point.

## **T. Došlić: Counting perfect star drawings**

We discuss what makes an  $n$ -pointed star perfect, for which number of points such stars exist, and how many of them there are.

## **D. Velichová, M. Vajsálová: Geometry, cartography and physics in new book publications of Publishing house SPEKTRUM STU**

Information on three interesting new books published by Publishing House SPEKTRUM STU in the year 2021, which are dealing with geometry, its applications in cartographic mappings and in explaining physical phenomena.

## **J. Zeman: Peano and Hilbert curves**

In this contribution, we present the concept of the space-filling Peano curve which proved the possibility of continuous mapping of a line to a part of plane. We present Hilbert's interpretation and his correspondence with H. Minkowski on this topic. We present the importance of the curve in context of set theory and Cantor's previous non-continuous mappings.

**G**

Slovak Journal for Geometry and Graphics

Volume 18 (2021), No. 35

ISSN 1336-524X

Edited by:

Slovak Society for Geometry and Graphics

**SSGG**

**Editor-in-Chief:**

Daniela Velichová

**Managing Editors:**

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

**Editorial Board:**

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmet'ová

Margita Vajsálová

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

**Editorial office:** Slovak Society for Geometry and Graphics

IČO: 31 816 304

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

**Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:**

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

**Frequency:** One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per

volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

**Information and instructions for authors are available at the address:** [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

**Printed by:** ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

**G is cited in:** Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG November 2021, Bratislava

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific

[www.ssogg.sk](http://www.ssogg.sk)