



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 18, číslo 36, 2021
ISSN 1336-524X

G

Slovenský časopis pre geometriu a grafiku

Ročník 18 (2021), číslo 36

ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG

Vedúca redaktorka:

Daniela Velichová

Výkonné redaktorky:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Redakčná rada:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmet'ová

Margita Vajsáblová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuclidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

IČO: 31 816 304

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:

Redakcia G - SSGG

ÚMF SJF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

sogg@sogg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.

Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adrese: www.sogg.sk

Tlačí: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

Časopis G je citovaný v: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG december 2021, Bratislava

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkoľvek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.



Obsah – Contents

Pripravuje sa vydanie prekladu diela Euklides: Základy Edition of the translation of Euclid: The Elements is being prepared Ján Čižmár	5
Zaujímavé konštrukčné prvky v architektúre vytvorené pomocou kružníc Interesting construction elements in architecture generated using circles Michaela Holešová	23
Hermann Minkowski a cesta k časoprostoru Hermann Minkowski and the way to time-space Jakub Poruba, Věra Ferdiánová	41

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu
a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG
Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Pripravuje sa vydanie prekladu diela Euklides: Základy

Ján Čižmár

Abstrakt

Prvý úplný preklad Euklidových *Základov* do slovenčiny ponúka príležitosť znovu sa zamyslieť a zdôrazniť význam tohto diela v školskej praxi, najmä pri písaní učebníc ako aj vo vyučovaní elementárnej geometrie vo vyšších ročníkoch základných a stredných škôl. Pomerne dôkladné oboznámenie sa s podstatou axiomaticko-deduktívnej metódy v elementárnej geometrii je v dnešnej dobe veľmi žiadúcou vedomosťou každého vzdelaného človeka.

Kľúčové slová: viacznačná Euklidova terminológia, axiomaticko-deduktívna metóda

Abstract

The first complete translation of the Euclid's *Elements* into Slovak offers an opportunity to reflect newly the significance of this work in the school practice, especially in the writing textbooks as well as in the teaching elementary geometry in the higher forms of the grammar schools. A relatively profound acquaintance with the essence of the axiomatic-deductive method in the elementary geometry is a very desirable knowledge of every well-educated person nowadays.

Keywords: ambiguous Euclid's terminology, axiomatic-deductive method

Predhovor

V kontexte slovenského vedeckého prekladu sa rodí kultúrna udalosť dejinného významu. Pán Prof. Čižmár preložil Euklida!

Vyššie sto rokov po kritickom vydaní Heibergovom v nemčine a následnom Servítovom preklade do češtiny prekladá nový nositeľ Veľkej medaily sv. Gorazda Euklidove Základy, asi 23 storočí od napísania.

„Poklad ukradnutý olympským bohom“, po Biblii vraj druhá najvydávanejšia kniha v dejinách, axiomatická metóda realizujúca Aristotelov ideál vedy, Euklidove Základy, nadtiaľ stratené, zachránené arabskou matematikou a znovuobjavené pre Európu po stáročíach temna, za daných predpokladov ponad čas platné absolútne pravdy, dostupné nie slepou vierou, ale kritickým rozumom.

Matematika je všadeprítomná a za daných predpokladov všemocná. Doc. Chalmovianský ju kladie na úroveň jazyka. Čokoľvek vieme pomenovať, modelujeme jazykovo, no ak to vieme aj označiť a odmerať, vládne matematickým modelom. V paradigme štyroch univerz model prekladá realitu do počítačovej reprezentácie a konkrétnej implementácie pomocou bodov, topológie, nameraných a vypočítaných čísel a efektívnych vizualizácií, premostňujúcich predovšetkým symbolické a vizuálne myslenie. Modely nám rozlúsknu problémy od zberu dát cez ich vhodné spracovanie až po víťaznú interpretáciu riešenia.

*Hoci Euklides vytvoril viacero diel, iba jedno z nich možno metonymicky nazvať jeho menom, **Základy, Stoicheia, Principia ...** Bud'me v duchu rétoriky logickí, etickí i patetickí. Udalosť historického významu generuje siločiar nezvyčajnosti, už prvý oznam vyvolal desiatky otázok v našej komunite a pán profesor objavil nový žáner – zovšeobecnený rozhovor. S jeho prvou verziou sa oboznámila medzinárodná komunita v Kočovciach v septembri v plenárnej prednáške **Aktuálny odkaz Euklidových Základov** (v zborníku na s. 21-26). Kompletne znenie sprístupňujeme v našom časopise tak, aby vyšlo viac-menej súčasne s dielom i komentármi pána profesora Čižmára v perfektnom vydavateľstve Perfekt. Vydanie podporili Fond pre rozvoj umenia, Univerzita Komenského a Matematický ústav SAV.*

doc. RNDr. Andrej Ferko, CSc.
Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

Úvod

Prvé slovenské vydanie úplného textu Euklidových Základov, najslávnejšej knihy s matematickým obsahom v histórii, ponúka príležitosť oboznámiť celú matematickú komunitu a azda aj širšiu kultúrnu verejnosť na Slovensku s dielom, ktoré si aj po dvadsiatich troch storočiach od svojho vzniku udržiava aktuálnosť a trvalé miesto v kultúrnom dedičstve ľudstva. Zo zachovaných písomných pamiatok antickej gréckej a grécko-helenistickej literárnej tvorby je význam tohto diela v oblasti prírodných a exaktných vied porovnateľný s postavením Homérových eposov *Iliada* a *Odysea* vo sfére krásnej literatúry. Sláva a povest' tohto pamätníka starovekej európskej i svetovej matematiky, oživované a šírené zmienkami a glosami nespočetných amatérskych komentátorov a propagátorov, z ktorých len nemnohí do hĺbky pochopili a ocenili jeho prínos pre vývoj svetovej matematiky, prekrývajú neraz triezve racionálne hodnotenie, vystihujúce reálnu podstatu a význam diela.

Základy boli zostavené okolo roku 300 pred našim letopočtom popredným pracovníkom vrcholnej vedeckej a umeleckej inštitúcie Museion Euklidom v egyptskom meste Alexandria, založenom Alexandrom Veľkým po dobytí Egyptskej ríše a nastolení grécko-macedónskej vlády na území porazenej starovekej veľmoci. Ptolemaios I. (Sóter), prvý panovník ptolemaiavskej dynastie, vládnucej v Egypte v období 306 – 30 p. n. l., založil Museion krátko po svojom nástupe na trón ako štátom zriadenú a financovanú ustanovizeň, ktorá sa v priebehu niekoľkých desaťročí rozrástla na vrcholné vedecko-kultúrne centrum vtedajšieho sveta v oblasti Stredozemného mora a Blízkeho východu.

Euklides bol v čase dokončenia *Základov* zrelou vedeckou osobnosťou, ktorá bola autorom niekoľkých originálnych vedeckých traktátov o aktuálnych problémoch z blízkych odvetví matematiky a z ich aplikačných oblastí. K aplikáciám patrili napríklad jeho spis o kužeľosečkách ako rovinných rezoch rotačnej kužeľovej plochy, práca z optiky o odrazoch v zrkadlách, traktát o astronómii a dielo o hudobných intervaloch. Výrazne geometrickej povahy boli jeho spisy o delení útvarov a o miestach na plochách. Osobitnú zložku jeho tvorby predstavovali spisy metodicko-logického charakteru, ktoré sa vyznačovali originalitou výberu tém, nápadnou odlišnosťou formy a vyššou úrovňou abstrakcie v porovnaní s väčšinou tradičnej dobovej produkcie. Práce tohto druhu reprezentujú *Pseudaria*, *Dedomena* (v latinskom

preklade *Data*) a *Porizmy*. Ich spoločným znakom je polytematickosť predmetného obsahu a zameranie pozornosti na logicko-metodickú stránku prác. Napríklad v spise *Pseudaria*, ktorého názov možno vystihnúť pomenovaním *Chybné úsudky*, sa analyzujú na tematicky rozmanitých príkladoch situácie, v ktorých zdanlivá priehľadnosť a presvedčivosť vzťahov zúčastnených prvkov zvádza k prenáhleným záverom, ktoré v ďalšej dedukcii vedú k nesprávnym následkom. V diele *Dedomena* uvádza Euklides celý rad inšpirujúcich príkladov, ako z daných jednoduchých základných prvkov (body v daných polohách a vzťahoch, úsečky daných dĺžok, uhly daných veľkostí), slúžiacich na konštrukciu útvarov predpísaných vlastností, možno tieto útvary zostrojiť alternatívnymi spôsobmi, resp. použiť obmenu daných prvkov na konštrukciu nových útvarov s požadovanými reláciami k pôvodným útvarom (napr. rovnosť obsahov, prípadne pomer obsahov a pod.).

Nezachované rozsiahle dielo *Porizmy*, uvádzané v zmienkach neskorších autorov (Pappos, Proklos) obsahovalo údajne doplnkové konštrukcie k niektorým prvkom a častiam geometrických objektov, ktorých existencia bola zaručená, ale pre novo definované prvky a časti mali konštrukcie charakter existenčného dôkazu. Podľa názoru niektorých autorov sa názov *porizmy* používal neskôr len pre vety týkajúce sa objektov nazývaných v grécko-helenistickej matematike geometrickými miestami (bodov, priamok atď.). Geometrickým miestom sa nazýva jednoznačne definovaný objekt obsahujúci každý prvok s definičnou vlastnosťou, no nie každý prvok geometrického miesta musí mať túto vlastnosť. To znamená: Geometrické miesto prvkov s danou vlastnosťou (v zmysle Euklida) *nie* (vždy) *je množinou všetkých prvkov* s tou vlastnosťou (v zmysle Hilberta). – V preklade *Základov porizmus* znamená obvykle *dôsledok*, zriedkavejšie *vetu* doplnujúcu vyznačený systém viet, alebo *lemu* (pomocnú alebo prípravnú vetu).

Uvedené poznámky naznačujú, že trojica spisov *Pseudaria*, *Dedomena*, *Porizmy* aj bez znalosti chronológie ich vzniku vo vzťahu medzi sebou i vo vzťahu k Základom predstavuje logicko-metodickú nadstavbu k Základom a metodickú logicko-didaktickú propedeutiku k úspešnému štúdiu Základov. Bez ohľadu na časovú následnosť vzniku spomenutých diel je z textu Základov zrejmé, že ich logicko-obsahovú štruktúru mal Euklides dokonale premyslenú pred začiatkom ich tvorby.

Z hľadiska matematického obsahu sú Euklidove Základy *sumarizáciou* temer všetkých významných výsledkov starovekej gréckej teoretickej matematiky od samých začiatkov jej existencie ako exaktnej vedy v prvej polovici 6. storočia p. n. l. Iónske obdobie formovania gréckej matematiky (6. storočie p. n. l. – polovica 5. storočia p. n. l.) sa časovo zhoduje a tematicky hojne prekrýva so vznikom a vývojom niekoľkých ďalších fundamentálnych spoločenských i prírodných vied, ako aj aplikačných disciplín, akými sú filozofia, logika, astronómia, geografia, zememeračstvo a niektoré ďalšie. V matematike, v prírodovedných a v technicko-aplikačných odboroch vychádzali grécki bádatelia z bohatého empirického, príležitostne aj z mierne experimentálneho, no predovšetkým z pragmaticky osvedčeného materiálu vysoko vyspelých blízkovýchodných kultúr (sumerská, egyptská, babylonská, asýrska a ďalšie) a toto bohatstvo kriticky prehodnocovali, pozmeňovali, dopĺňovali a rozširovali bádáním, ktoré sa vymanilo z úzkych hraníc praktikizmu a materiálneho utilitarizmu a vyzdvihlo ako vyšší princíp hľadania objektívne pravdivého poznania *racionalizmus*. V oblasti spoločenských disciplín, osobitne vo filozofii, je to v metaforickom jazyku modernej vedy cesta „od mýtu k logu“. V matematike od prvopočiatkov jej hľadanie vlastností matematických objektov a vzťahov medzi objektmi aj medzi vlastnosťami viedlo cez postupné odhaľovanie jednotlivostí k tvorbe domnienok a následne cestou *logického dôkazu*

bud' k potvrdeniu domnienky ako korektného (pravdivého) poznatku vo forme matematickej vety, bud' k jej vyvráteniu a odmietnutiu pre jej nezlučiteľnosť s už prijatou alebo dôkazmi potvrdenou sústavou výrokov. Je zrejmé, že tento spôsob získavania a formulácie nových matematických poznatkov bezprostredne súvisí s pokrokom formálnej logiky, ktorá bola neodlučiteľne, priam existenčne spätá s matematikou, nachádzajúc v nej bohaté a najvýznamnejšie podnety svojho napredovania a zároveň oblasť svojho širokého a veľmi úspešného a plodného uplatnenia. S istým zveličením možno tvrdiť, že niektoré kardinálne, v jazyku matematiky sformulované problémy, schopné zovšeobecnenia a rozšírenia na ďalšie oblasti poznávania (napr. pohyb, spojitosť, nekonečno atď.) boli urýchľujúcim stimulom pokroku logiky a prispeli k súčasnému sformulovaniu prvých základných pravidiel logiky ako predobrazu axióm v neskoršej Aristotelovej koncepcii metodológie vedy.

Euklides zahrnul do Základov všetky dôležité výsledky, ktoré dosiahli významní grécki matematici od začiatku 6. storočia p. n. l. do konca 4. storočia p. n. l., t. j. zhruba v rokoch 600 p. n. l. – 300 p. n. l., v tzv. klasickej epoche antickej gréckej matematiky. Podľa etnickej príslušnosti autorov, alebo podľa geografického pôvodu poznatkov sa tento časový úsek (staro)gréckej matematiky rozčleňuje na *iónske* obdobie (približne 600 p. n. l. – 450 p. n. l.) a na *aténske* obdobie (asi 450 p. n. l. – 300 p. n. l.), odlišujúce sa navzájom tematikou obsahu tvorby, rozsahom a počtom výsledkov, úrovňou abstrakcie, kvalitou jazyka a postupným zdokonaľovaním metód a prostriedkov bádania i prezentáciou jeho výsledkov. Kým v iónskom období centrami rozkvetu vedy boli bohaté prístavné mestá na západnom pobreží Malej Ázie a na priľahlých väčších ostrovoch, ktoré pred niekoľkými storočiami osídlili iónske kmene vypudené z pôvodných sídel tlakom Dórov, v aténskej etape boli jednoznačným hegemonom v oblasti vedy a umenia Atény, zažívajúce najslávnejší čas rozkvetu svojho mocensko-politického a ekonomického postavenia.

V iónskom období sa pozvoľna hromadili nesystematické objavy v oblasti elementárnej planimetrie zásluhou Tálesa z Milétu, jeho nasledovníkov Anaximandra a Anaximena z Milétskej školy, Pytagora z ostrova Samos a príslušníkov z pytagorovskej školy (napr. Hypasa). Pre rozvoj aritmetiky bol veľmi významný prínos Pytagora a jeho školy v oblasti deliteľnosti prirodzených čísel a v teórii pomerov, ktorými anticipoval niektoré témy neskoršej teórie racionálnych čísel, ako aj objav nesúmerateľnosti istých úsečiek, ktorý bol zárodkom teórie iracionálnych čísel. V učení pytagorovcov sa v súhrne prelínajú hodnotné vedecké výsledky, odhalené a sformulované v duchu sekulárneho iónskeho racionalizmu s mystickými a orfickými predstavami o povahe prirodzených čísel a ich pomerov, o ich postavení a význame v reálnom svete, v živote človeka a v ľudskej spoločnosti.

Druhá etapa formovania klasickej antickej gréckej matematiky – aténske obdobie (približne 450 p. n. l. – 300 p. n. l.) – sa od predchádzajúceho iónskeho obdobia znateľne odlišovala niekoľkými markantnými charakteristikami. Predovšetkým, výrazná väčšina bádateľov-matematikov sa profesionalizovala a v určitej miere špecializovala, t. j. tvorivá práca v matematike a verejná prezentácia jej výsledkov sa stávala prostriedkom existenčnej zábezpeky pracovníka, pričom oblasť jeho originálneho prínosu sa spravidla zužovala len na časť postupne diverzifikovanej matematiky. Čoraz menej vývoj matematiky dopredu posúvali „polyhistori“, ktorých doménou bola obvykle filozofia, a do popredia objaviteľského prúdu sa dostávali profesionálni matematici pôsobiaci v bádateľských a edukačných centrách, dodatočne označovaných ako regionálne školy. Jednou z najvýznamnejších osobností pôvodného razenia bol Demokritos (asi 460 p. n. l. – 370 p. n. l.), ktorý svoju atomistickú koncepciu sveta úspešne aplikoval aj na matematické problémy, ktorým venoval pozornosť v značnom počte spisov zo

svojich zaznamenaných 70 traktátov. Atomistická predstava o hmotnej skladbe plošných matematických objektov a mnohostenových priestorových telies mu umožnila správne stanoviť kvantitatívne vyjadrenie obsahov plošných útvarov a objemov priestorových telies, o. i. objem ihlana a objem kužeľa vo vzťahu k objemom hranola a valca. Ojedinelé zachované fragmenty niektorých Demokritových diel neposkytujú ani náznaky dôkazov správnych výsledkov.

Rastúci objem poznatkov o geometrických objektoch roviny, o ich vlastnostiach a vzťahoch, ako aj o ich numerických charakteristikách viedol zákonite k pokusom odhaliť určitý systém v rozdrobených a neroztriedených súvislostiach týchto objektov a relácií. Výsledkom týchto snáh boli súbory príznačne označované názvom *Základy*. Najvýznamnejším dielom tohto druhu v aténskom období boli *Základy* Hippokrata z ostrova Chios, pôsobiaceho v Aténach niekedy medzi rokmi 450 – 400 p. n. l. Obsah tohto diela bol Euklidovi známy a v transponovanej podobe bol zahrnutý do Euklidových Základov. O podobnú sumarizáciu sa usilovali v 4. storočí p. n. l. aj ďalší súčasníci, napr. Neoklides, jeho žiak Leon a ďalej Teudios. Pôvodné verzie diel z tohto obdobia sú neznáme. Fragmentárne úryvky z nich sa nachádzajú v zmienkach niektorých písomností z 2. storočia p. n. l.

V aténskom období sa udial v matematike aj zrod troch kvalitatívne hodnotnejších teórií, ktorých ústredné objekty a operácie vykazovali vyšší stupeň abstrakcie v porovnaní s udomácnenými pojmami, ako aj zreteľne dokonalejšiu formu a literárnu zrelosť. Boli to axiomatizácia teórie pomerov a úmer, metóda exhaustácie a teória kvadratických a bikvadratických iracionalít. Hlavným autorom prvých dvoch teórií bol Eudoxos z Knidu (408 – 355 p. n. l.), autormi rozvinutia a zdokonalenia tretej Teodoros z Kyreny (5. – 4. storočie p. n. l.) a najmä Teaitetos (asi 414 – 369 p. n. l.).

Osobitne priaznivým momentom v komplexe okolností, ktoré prispeli k zrodu Euklidových Základov, bolo dopracovanie koncepcie výstavby teórie určitej vedeckej disciplíny axiomaticko-deduktívnou metódou v podaní Aristotela. Vo vzťahu k tejto koncepcii možno Základy označiť za jej prvú excelentnú realizáciu v konkrétnej špeciálnej vedeckej disciplíne – v matematike.

Ku koncu 4. storočia p. n. l. dozreli v gréckej matematike podmienky, v ktorých sa mohla táto oblasť vedy etablovať ako prvá ucelená teoretická disciplína vybudovaná axiomaticko-deduktívnou metódou. Objektívne podmienky predstavovali na jednej strane zreteľne diferencované, dostatočne široko rozvinuté a s náležitou presnosťou sformulované jednotlivé odbory so špecifickými metódami a prostriedkami. Druhou podstatnou podmienkou bola existencia teoreticky vypracovanej všeobecnej koncepcie a matematika na uvedený účel prakticky použiteľná; bola ňou Aristotelova koncepcia. Priaznivé subjektívne podmienky našla doba v osobnosti Euklida, ktorého všeobecný prehľad v matematike v pozícii učiteľa v Museione, vlastná vedecká produkcia a špeciálne vedecko-pedagogické zameranie potenciálne predurčovali na realizáciu prípadného projektu vytvoriť také súborné dielo.

Euklides sa zhostil tejto historickej úlohy spôsobom, ktorý v každej historickej epoche, vrátane dnešnej, vzbudzoval zaslúžený obdiv a uznanie. V podstate celé teoretické poznanie matematiky svojej doby zhrnul, utriedil, upravil a spracoval tak, že i z pohľadu dnešných komunikačných požiadaviek vykazuje pôsobivú jednotu obsahu a formy. Všetky prezentované matematické poznatky zadelil do trinástich kapitol, tradične nazývaných knihami, v ktorých je obsah tematicky usporiadaný v prirodzenej nadväznosti s premyslenou diferenciáciou a gradáciou odbornovo-vecnej zložky, logického aparátu, jazykovo-terminologických

prostriedkov a didakticko-metodického spracovania. Z hľadiska dnešnej klasifikácie matematických odborov sú geometrii venované knihy 1, 3, 4, 6, 11, 12, 13, aritmetike knihy 5, 7, 9 a algebre knihy 2, 8, 10. (Pravda, názov aritmetika sa udomácnil v grécko-helenistickej matematike až v 3. storočí n. l. a označoval u Diofanta teóriu rovníc, a termín algebra prenikol z arabčiny do stredovekej európskej matematiky až v prvých storočiach 2. tisícročia n. l.)

Kniha 1 obsahuje základy rovinnej geometrie – planimetrie, kniha 3 geometriu kružníc, kruhov a ich častí, kniha 4 teóriu pravidelných rovinných mnohoúhelníkov, kniha 6 podobnosť rovinných a priestorových útvarov, kniha 2 geometrickú algebru (názov pochádza až z konca 19. storočia), kniha 5 základy teórie pomerov a úmer, kniha 7 deliteľnosť prirodzených čísel, kniha 8 spojité úmery (v dnešnej terminológii geometrické postupnosti), kniha 9 aplikácie aritmetických kníh 5, 7, 8, kniha 10 teóriu kvadratických a bikvadratických iracionalít, kniha 11 základy priestorovej geometrie – stereometrie, kniha 12 obsahy rovinných obrazcov a objemy priestorových telies, kniha 13 teóriu pravidelných mnohostenov.

Prihliadajúc na rozsah dobového matematického poznania z hľadiska prínosu k pokroku matematiky nápadnými originálnymi výsledkami nemožno Základy hodnotiť ako výnimočné dielo. Zrejme takým ani nebol prvoradý zámer autora. Jedinečnosť knihy tkvie v mnohorakosti pozitívnych stránok, ktorými jednotlivo, a tým viac v súhrne prevyšuje bežnú i vrcholnú vedeckú publikačnú tvorbu svojej doby, ako aj úroveň diel s podobným cieľom, aký sledovala sama. A má dobové a ďalšie trvalé hodnoty, ktoré možno zaznamenať v nasledovných bodoch:

1. Je temer úplným zhrnutím všetkých podstatných poznatkov starovekej vedeckej gréckej matematiky až po obdobie Euklidovho pôsobenia vrátane.
2. Je systematicky usporiadaná podľa obsahového rozčlenenia matematických odborov na základe charakteristických atribútov matematických objektov, ich vzťahov a súvislostí, so zachytením logickej (a čiastočne aj chronologickej) postupnosti rozvíjajúcej sa a stupňovanej hierarchie.
3. Vyznačuje sa dôslednou metodologickou konzistenciou v uplatňovaní aristotelovskej koncepcie výstavby vedeckej teórie v predmetnej oblasti vedy formuláciou definícií, axiém, postulátov, viet, dôkazov, konštrukcií, dôsledkov a lemm.
4. Zásadne dodržiava pravidlá logiky, uplatňuje dedukciu ako hlavnú metódu získavania a potvrdzovania poznatkov, logické kroky vykonáva presne a podrobne, formálne dôkazy sú úplné a konzistentné.
5. Didakticky zreteľne rozlišuje medzi dôležitými výsledkami, väčšinou explicitne uvedenými a argumentmi dôkladne odôvodnenými, a poznatkami menšieho významu bez prebatej argumentačnej podpory.
6. Nápadne je zvýraznená jednotná forma prezentácie poznatkov i dôkazov, ako aj formálna rekapitulácia výsledku dôkazu ako vyslovené zdôraznenie významu poznatku.

7. Didakticko-metodická úroveň diela celkovou koncepciou i realizáciou všetkých zložiek je príkladná.
8. Pozoruhodné je dôsledné rešpektovanie princípu existenčného dôkazu – formálnologicky alebo konštrukciou.
9. Dielo je vzorovou demonštráciou umenia autora z rozsahom nevelkého základu predmetných výrokov použitím minimálnych logických i jazykovo-terminologických prostriedkov zdanlivo ľahko a jednoducho vybudovať košatú, obsahom a rozsahom bohatú špeciálnu teóriu zachytenú stovkami definícií a propozícií.
10. Po celý čas svojej existencie v trvaní dvetisíc tristo rokov funguje dielo ako etalón výstavby vedeckej teórie, ako nevyčerpatel'ný inšpiračný stimul vedeckej a popularizačnej tvorby a svojím piatym postulátom knihy 1 ako prameň globálnych teórií a ich aplikácií.

Vzhľadom na historickú dobu vzniku Základov sú prirodzené, pochopiteľné a objektívne s porozumením prijímané tie stránky diela, ktoré sú vo svetle dôležitých metodologických princípov budovania modernej vedy v Základoch zastúpené menej úspešne alebo nedostatočne, prípade v nich celkom chýbajú. Opačný prístup k hodnoteniu diela by bol ahistorický, a tým v princípe nesprávny. Námietky a výhrady voči Základom možno v duchu tejto premisy formulovať nasledovne.

1. Výskyt primárnych pojmov v mnohých tzv. definíciách, ich postavenie v súbore prvotných definícií a výrokov a ich jazykové vyjadrenie je v prevažnej väčšine prípadov nejasné, neúplné a nekorektné tak po stránke obsahovej, ako aj logickej. Z hľadiska určitého priblíženia charakteru pojmu prostriedkami prirodzeného jazyka boli v čase svojho vzniku s určitou toleranciou prijímané a používané.
2. Niektoré definície – opisné, nominálne, genetické – formálnou štruktúrou prijateľné, obsahovali nové primárne pojmy, neošetrené v ďalšom postupe žiadnym vysvetlením. Povaha týchto výhrad sa zreteľnejšie prejavuje pri porovnaní Euklidovho textu s metodologickými postulátmi sformulovanými explicitne či implicitne v Hilbertovej axiomatike diela Grundlagen der Geometrie.
3. V úvahách, predstavách, vo formulácií podmienok na konštrukcie, v krokoch dôkazov, v predpokladoch o reláciách, situáciách, vzťahoch a pod. sa neraz pod plášťom prirodzeného jazyka vsúvajú do priebehu deja a do argumentácie zdanlivo bezproblémové a samozrejmé objekty, vlastnosti, vzťahy a akcie, ktorých existencia by mala byť pri kritickej analýze explicitne podložená definíciou, dôkazom alebo axiómou.
4. Väčšina propozícií, či vo forme vety, konštrukcie, alebo dôkazovej úlohy je sformulovaná pre tzv. všeobecný prípad, v ktorom polohové relácie, metrické vzťahy, prípadne usporiadanie nie sú vymedzené konkrétnymi podmienkami. Obvykle chýba analýza,

ktorá by viedla k taxatívnemu výpočtu tzv. špeciálnych prípadov vyžadujúcich osobitné ošetrovanie. Takéto „singularity“ nie sú v Základoch vôbec predmetom úvah.

5. Základy v zásade vylučujú foronomický princíp (t. j. začlenenie pohybu medzi primárne alebo korektne definované pojmy). V dôkazovej praxi však nedokážu dôsledne dodržiavať túto zásadu. V reálnom postupe dôkazu sa niekedy nedokážu vyhnúť premiestneniu, ktoré je neurčitým pohybom založeným na vágnej intuitívnej predstave odvodennej z empirickej aktivity. S tou istou predstavou sa pracuje aj v niektorých genetických definíciách využívajúcich predstavu nejakého geometrického komplexu zaujímajúceho postupne rôzne pozície bez zmeny jeho tvaru a vlastností.
6. Z prostriedkov modernej matematickej logiky chýbajú v Základoch explicitne formulované kvantifikátory a princíp matematickej indukcie. Funkciu existenčného kvantifikátora spĺňa postulát konštrukcie definovaného útvaru. Všeobecný kvantifikátor nahrádza nevyslovený predpoklad o možnosti ľubovoľného výberu určujúcich prvkov objektov, ktoré spĺňajú predpoklady definície alebo propozície. V propozíciách s usporiadanou konečnou postupnosťou objektov preberá úlohu dôkazu ilustrácia platnosti tvrdenia na minimálnom počte prvých n členov postupnosti ($n = 2, 3$, zriedkavo 4). (Dôkaz je obdobný s takými postupmi, akými sa obvykle didakticky argumentuje v ročníkoch nižšieho stupňa sekundárnej školy.)
7. Analogicky sa postupuje aj v propozíciách s nekonečnými usporiadanými spočítateľnými postupnosťami homogénnych objektov, v ktorých sú definované relácie na konečných vybraných postupnostiach týchto nekonečných postupností.
8. Osobitný tematický okruh predstavujú propozície, v ktorých sú predmetom skúmania nekonečné monotónne rastúce zhora ohraničené, resp. nekonečné monotónne klesajúce zdola ohraničené postupnosti homogénnych objektov. (Vyskytujú sa pri skúmaní obsahov, resp. objemov uzavretých ohraničených rovinných, resp. priestorových útvarov.) V podstate ide v týchto propozíciách o stanovenie limít týchto postupností, čo je úloha, ktorá bola uspokojivo teoreticky vyriešená až v európskej matematickej analýze 17. – 18. storočia. V niektorých úlohách objekt, skryto definovaný (v neskorej budúcnosti) limitou takejto postupnosti, nebol ešte v gréckej matematike definovaný. (Príkladom je nulový uhol medzi kružnicou a dotyčnicou kružnice v bode kružnice. Nula sa objavila ako matematický objekt v 6. storočí n. l. v indickej matematike.)
9. Grécka matematika nedefinovala exaktnými prostriedkami spojitosť ako matematický pojem. Z toho je zrejmé, že problém spojitosti nemohol byť riešený v prípadoch, v ktorých sa odhalil ako objekt výskumu v neskorších štádiách historického vývinu matematiky.

Euklidovo dielo Základy ako historicky prvé ucelené systematické spracovanie celej špeciálnej vedeckej oblasti axiomaticko-deduktívnou metódou sa stretlo s intenzívnou odozvou

a s vysokým uznaním už v radoch Euklidových súčasníkov a najbližších historických nasledovníkov a s touto reputáciou pevne zakotvilo na historickej scéne až do našich čias. Svedectvo o tom vydávajú nespočetné vydania kompletného textu v jazyku originálu i v prekladoch do svetových jazykov aj do jazykov menších národov, publikácie vybraných podstatných častí, kompilácie v podobe vysokoškolských a stredoškolských učebníc, komentáre rozmanitého druhu, beletristické spracovania obsahu atď. Najzávažnejším potvrdením vedeckého významu Euklidovho diela je vypracovanie teórií neeuklidovských geometrií v 19. storočí, ktoré je úspešným záverom vyše dvetisícročných snažení najosvietenejších matematických hláv vyrovnat' sa so záhadami a znepokojivými problémami 5. postulátu knihy I Základov.

Na záver sa treba dotknúť dvoch podstatných stránok Základov. Prvou je matematický jazyk, ktorý je totálne rétorický a okrem označovania bodov písmenami neobsahuje žiadne symboly matematických pojmov, ani žiadne náznaky tendencie zmeniť tento úzus. Je teda semioticky krajne nerozvinutý. „Odborná“ matematická terminológia tkvie hlboko v prirodzenom jazyku a niekedy len veľmi pozorné sledovanie textu upozorní, že obyčajné slovo prirodzeného jazyka označuje matematický termín s vyhraneným obsahom, a nie bežný objekt s obsahom stanoveným značne vágne.

Druhou charakteristickou stránkou Základov je skutočnosť, že interpretácia matematických pojmov je totálne geometrická, t. j. že matematické objekty, relácie a operácie medzi nimi sú znázorňované štandardnými grafickými prostriedkami (rysovaním) a slovný opis týchto výkonov sa realizuje takisto geometrickou terminológiou. Táto dominantná vizuálna zložka komunikácie je zdrojom skreslenej predstavy, že Základy sa zaoberajú výlučne geometriou, a teda, že ide o *základy geometrie*. To je všeobecne rozšírený omyl: *Základy* sú základmi celej teoretickej matematiky Euklidovej doby. Interpretačná prax matematiky Euklidovej doby s dominanciou geometrie nie je dôsledkom akejsi iracionálnej záľuby starovekých Grékov v geometrii, ale tkvie v skutočnosti, že v porovnaní s ostatnými odvetvami matematiky jedine geometria disponovala dostatočným arzenálom interpretačných prostriedkov pre všetky odbory. V tom bola prednosť geometrie, ale aj neschopnosť kvalitatívnej diferenciácie, aká bola napr. medzi racionálnymi a iracionálnymi veličinami a v geometrickej interpretácii nebola všeobecne zistiteľná.

Klasické rysovacie nástroje-pomôcky – lineár a kružidlo – nie sú síce v Základoch explicitne deklarované ako jediné prípustné, ale konštrukčná prax založená na aplikácii prvého a tretieho postulátu (narysovanie úsečky určenej krajnými bodmi a konštrukcia kružnice určenej stredom a polomerom) implicitne indikuje takéto opatrenie. To znamená, že používanie týchto nástrojov zužuje okruh úloh nimi riešiteľných (v neskoršom analyticko-algebrickom vyjadrení) na úlohy lineárne, kvadratické a maximálne bikvadratické. Je zrejmé, že žiadna z troch klasických úloh starogréckej matematiky (trisekcia uhla, kvadratura kruhu, „zdvojnásobenie“ kocky) nie je úlohou niektorého z týchto typov. Pre túto príčinu je absencia týchto úloh v Základoch prirodzene logická.

Geometrické konštrukcie vykonateľné presne pomocou lineára a kružidla sa nazývajú euklidovskými konštrukciami. Starogrécka a grécko-helenistická matematika sa však nevyhýbala pri grafickom riešení problémov ani konštrukciám, ktoré sú z hľadiska „presných“ geometrických konštrukcií empirické a aproximatívne. Takou je napr. konštrukcia hrany „dvojnásobnej“ kocky k danej kocke z Hippokratovho riešenia problému použitím pomerov

a úmer v geometrickej interpretácii Menaichma (4. storočie p. n. l.) pomocou priesečníka kužeľosečiek rôznych od kružnice. Inou neeuklidovskou konštrukciou je napr. Archimedova trisekcia uhla využívajúca aproximatívny (a od vizuálnej skúsenosti riešiteľa závislý) krok *neusis*, ktorým je umiestnenie danej úsečky jej krajnými bodmi na dve dané čiary (dve priamky, alebo priamka a krivka, alebo dve krivky). – To je však už tematika antickej gréckej matematiky mimo tematiky Základov.

Otázky k téme, odpovede, komentáre

1 Axiomaticko-deduktívna metóda

(jej význam, dosah na rôzne odbory matematiky a na iné odbory vedy)

1. Asi je vhodné zaujať k tomuto komplexu problémov stanovisko analýzou prípadov, v ktorých sa v histórii použitie tejto metódy ukázalo užitočné a úspešné. Vcelku možno súhlasiť s hodnotením, že odhliadnuc od niektorých predchádzajúcich neúplných a neuzavretých pokusov je takým všestranným a uspokojivo úspešným prípadom Euklidova aplikácia metódy na (temer) celý obsah matematického poznania okolo roku 300 p. n. l. v dosahu vtedajšej gréckej vedy v oblasti východného Stredomoria.

Tristoročný vývoj gréckej matematiky od Tálesa po Euklida zhromaždil dovtedy nevídané množstvo matematických poznatkov rozmanitej tematiky aj rôzneho stupňa abstrakcie a v prvej polovici 4. storočia p. n. l. prácami Eudoxa a Teaiteta priniesol aj zložitosťou tematiky, náročnosťou technických prostriedkov a kvalitatívne vyššou úrovňou abstrakcie významné teórie zreteľne prekračujúce dovtedajší rozvoj novými smermi a výzvami v matematike a v logike. V takomto štádiu vývoja, keď prílev poznania oslabuje svojou kvantitou prehľadnosť jeho diferenciacie a hierarchizácie, nadobúda na aktuálnosti a naliehavosti úloha systemizovať, resp. resystemizovať celý súbor poznania, čiže – nie celkom presne, ale expresívne výstižne – prejsť od chaosu k usporiadanej štruktúre. V takej situácii dôležitá otázka znie: „Kto je tá osobnosť (alebo skupina osobností), ktorá je schopná zhostiť sa s nadhľadom tohto historického poslania a navodiť do chaosu náležitý poriadok?“ – Historická skúsenosť poučča, že takáto historická úloha nájde skôr či neskôr svojho úspešného riešiteľa. Euklides svojimi osobnostnými kvalitami tejto predstave v prípade zhrnutia celej gréckej matematiky okolo roku 300 p. n. l. výsostne zodpovedal. Predurčovala ho na to jeho široká a mnohostranná erudícia, edukačné pôsobenie v Museione a predovšetkým jeho systematické bádanie a publikovanie v oblasti logicko-metodologickej zložky edukačnej teórie a praxe. Je veľmi pravdepodobné, že realizácia historickej úlohy, ktorú splnil Euklides, by bola vzišla v tej istej historickej epoche z prostredia alexandrijskej, aténskej, alebo niektorej inej poprednej školy gréckeho civilizačného okruhu. Kedy? – To je otázka. V každom prípade by bola mala grécko-helenistická kultúra na to ešte osem storočí čas.

Hodnota, význam a účinnosť axiomaticko-deduktívnej metódy na zvýšenie prehľadnosti a zrozumiteľnosti sprostredkovania matematiky v Euklidovej redakcii boli zrejme už Euklidovým súčasníkom a v histórii sa potvrdzovali vždy a všade, kde sa tematika Základov obnovené dostávala do obzoru pozornosti tvorivých matematikov. Dialo sa tak už v spisoch prvých glosátorov a komentátorov Euklidovho diela v 3. – 1. storočí p. n. l. Osobitne výrazne sa prejavoval tento postoj k Základom v prácach komentátorov v posledných obdobiach oživenia a krátkodobého vzostupu helenistickej matematiky v 3. – 4. a v 5. – 6. storočí, ďalej

v celom období progresívneho vývoja islamsko-arabskej matematiky, v období európskej renesancie a v európskej geometrii 18. – 19. storočia. Vyvrcholením návratov k Euklidovi a úspechom inšpirácie jeho Základmi boli axiomaticky spracované základy elementárnej geometrie na konci 19. storočia v podaní Moritza Pascha a Davida Hilberta. Osobitne Hilbertove *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899 a ich ďalšie vydania až po desiate v roku 1931 boli zdarnou ukážkou aplikácie axiomaticko-deduktívnej metódy zmodernizovanej v duchu filozoficko-metodologických zásad *formalizmu*, ktorých hlavným autorom bol práve Hilbert.

2. Druhým vrcholným vedeckým dielom, vytvoreným v oblasti exaktných vied axiomaticko-deduktívnou metódou, bola matematizovaná verzia fyzikálneho odboru teoretická mechanika, ktorej autorom je Isaac Newton. Jeho klasická monografia *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Matematické princípy prírodnej filozofie) bola prvý raz vydaná v roku 1687, temer dva tisíc rokov po vzniku Euklidových Základov. Je potešiteľné, že v roku 2021 vyšlo toto fundamentálne dielo klasickej fyziky v slovenskom preklade doc. Juraja Šebestu, čím sa slovenčina zaradila na ôsme miesto v počte národných jazykov, v ktorých vyšiel preklad diela.

V priebehu 20. storočia sa hojne rozrástol počet prípadov úspešného použitia axiomaticko-deduktívnej metódy na výstavbu teórie ďalších matematických odborov, ktorých základy boli spravidla vybudované na báze teórie množín. Sama teória množín bola, prirodzene, taktiež axiomatizovaná, a to niekoľkými odlišnými sústavami axióm. Väčšina týchto nových matematických vysoko abstraktných disciplín vyrastajúcich pokračujúcou abstrakciou a zovšeobecneniami spravidla z moderných odborov sformovaných v bezprostrednej minulosti bola temer bez výnimky budovaná axiomaticko-deduktívnou metódou. Takýmito odbormi sú napr. teória algebrických štruktúr, všeobecná topológia, teória kategórií, algebrická topológia a mnohé ďalšie. V nich nebolo štádium axiomatizácie záverom dlhšieho extenzívneho zhromažďovania partikulárnych výsledkov, ale bolo súčasťou cieľavedomého priameho formovania teoretických základov odboru. Ukázalo sa taktiež, že z okruhu axiomatizovateľnosti nie sú vylúčené ani niektoré staršie disciplíny; príkladom je teória pravdepodobnosti.

3. Osobitnou kapitolou v histórii vývoja matematiky v 20. storočí je projekt a realizácia programu skupiny francúzskych matematikov Bourbaki, v ktorom axiomatizácia hlavných matematických disciplín mala ústredné postavenie.

4. K nahliadnutiu do problému možnosti vybudovať axiomaticko-deduktívnou metódou teóriu niektorej disciplíny inej skupiny vied, než je matematika, resp. matematicko-fyzikálna skupina, treba si jasne uvedomiť nevyhnutné a dostačujúce podmienky, ktoré musí disciplína spĺňať. Zistenie týchto podmienok je výsledkom analýzy a zovšeobecnenia poznatkov z fungovania tých systémov, ktoré sa vytvorili historicky ako axiomaticko-deduktívne systémy konkrétnou, sčasti možno aj experimentálnou genézou v sledovanej primerane rozvinutej časti niektorej oblasti vedy. Prvou podmienkou je vytýpanie tried kvalitatívne odlišných primárnych objektov zachytávajúcich v súhrne celú rozmanitosť objektov danej oblasti, zistenie hlavných špecifických relácií medzi objektmi v jednotlivých triedach i medzi objektmi rôznych tried, stanovenie základných operácií v triedach i medzi triedami a formulácia terminologicky ošetrených základných výrokov o všetkých týchto základných prvkoch zoskupených do jednotlivých skupín podľa rozlišujúcich atribútov a prijímaných ako platných (pravdivých) bez formálnych dôkazov všeobecne platnými logickými prostriedkami. – To predstavuje *sústavu axióm* danej oblasti ako základ, z ktorého sa špecifickými prostriedkami vytvárajú ďalšie

výroky akceptované v danej oblasti ako objektívne platné poznatky rozširujúce systém poznatkov sprostredkovaných axiómami.

Druhou podmienkou budovania teórie axiomaticko-deduktívnou metódou je prijatie *metódy* tvorby nových poznatkov z axióm a z ďalších poznatkov touto metódou už *odvodených* (*prijatých*). V užšom zmysle sa pod termínom *deduktívna metóda* rozumie metóda odvodzovania podľa pravidiel formálnej logiky, čo v dnešnom zúženom ponímaní znamená *matematickú logiku*. Je zjavné, že podľa tohto vymedzenia sú axiomaticko-deduktívne vybudované sama matematická logika, v ktorej axiómami sú základné logické pravidlá, ďalej axiomaticko-deduktívne vybudované matematické disciplíny a aplikované disciplíny matematizované na základe axiomaticko-deduktívne vytvorenej matematickej disciplíny (napr. klasická mechanika).

Je zrejmé, že väčšina vedeckých disciplín, osobitne prírodovedných a technických, „odvodzuje“ svoje poznatky *indukciou* (v zmysle Aristotela). K predstave o možnosti „axiomatizácie“ niektorej disciplíny – pod čím sa obvykle myslí možnosť axiomaticko-deduktívnej výstavby – zvädza často skutočnosť, že v mnohých disciplínach naozaj možno nájsť alebo doplniť sústavu téz fundamentálnej povahy platných (uznávaných) vo všetkých partikulárnych teóriách danej oblasti; väčšinou však chýba všeobecná platnosť *odvoditeľnosti* z tejto množiny výrokov. Môžu byť však základňou *paradigmy* tejto oblasti.

Dodatok

1. Axiómy musia byť podľa Aristotela bezprostredne zrejmé (apodiktické). Musia byť dostačujúce (spolu s tvrdeniami podľa nich už dokázanými) na dôkaz všetkých tvrdení deklarovaných v danej teórii ako pravdivé.
2. Výstavba teórie axiomaticko-deduktívnou metódou nie je zárukou vedeckosti teórie. Metóda je *forma*; o vedeckosti *obsahu* nevydáva svedectvo.

2 Euklides ako matematik a ako autor *Základov*. Aktuálny význam jeho diela

Z niekoľkých nesystematických poznámok v predchádzajúcom súvislom texte o živote a diele Euklida, odvolávajú sa na zmienky Archimeda (3. storočie p. n. l.), Pappa (4. storočie) a Prokla (5. storočie) o činnosti a o výsledkoch Euklida v matematike, možno považovať za hodnoverne potvrdené Euklidovo pôsobenie v postavení učiteľa, vedeckovýskumného pracovníka (v dnešnom ponímaní) a autora vedeckých a didaktických traktátov v alexandrijskom Museione v čase panovania faraóna Ptolemaia I. (Sótera). Proklos uvádza, že Euklides vyložil v *Základoch* mnohé (miesta) z Eudoxových objavov, doplnil nemálo (vecí) neúplných v Teaitetových prácach, navyše uviedol úplné dôkazy tých tvrdení, ktoré nedokázali definitívne jeho predchodcovia. Toto Proklovo hodnotenie dopĺňa závery, ku ktorým dospela historiografia analýzou Euklidových prác, osobitne *Základov* a ďalších spisov s výrazne didakticko-metodologickým zameraním, ako bola o tom zmienka v predchádzajúcom súvislom texte.

Na adresu *Základov* sa vyjadruje B. L. van der Waerden, jeden z najvýznamnejších algebríkov a historikov matematiky 20. storočia, vo svojom diele *Ontwakende Wetenschap* (Prebúdajúca

sa veda) z roku 1950 týmito slovami: „Na konci 4. storočia p. n. l. bola celá matematika v tej podobe, v akej sa vyučovala v Platónovej škole (t. j. v aténskej Akadémii), zhrnutá v Euklidových prácach, a pritom tak, že dielu bolo prisúdené stať sa vzorom na celé tisícročia. Euklidove Základy si vydobyli jeden z najväčších úspechov vo svetovej literatúre: celý svet sa podľa nich učil geometriu. Dokonca aj dnes sa vyučuje geometria v anglických školách podľa učebnice, ktorá je prepracovaním Základov v angličtine a v Anglicku sa nazýva jednoducho *Euklides*. A skutočne, Euklides si vydobyl zaslúžene túto slávu vďaka svojmu výnimočnému didaktickému majstrovstvu. Je najväčším školským učiteľom, akého len história matematiky pozná.“

Na inom mieste citovanej knihy sa vyjadruje van der Waerden o Euklidovi menej pochvalne: „Euklides, samozrejme, nepatrí medzi veľkých matematikov. Najvýznamnejšie a náročné časti Základov prevzal od iných autorov, najmä od Teaiteta a Eudoxa. ... Vedecká úroveň Euklida je zrejme určená vedeckou úrovňou jeho vzorov. ... Euklides je predovšetkým pedagóg, nie však tvorivý génus.“

Takéto posúdenie významu diela a autora nemožno hodnotiť inak než ako jednostranne subjektívne. Zakladá sa na stanovení neporovnateľných kritérií a na hodnotení prezentovaných výsledkov rôznych kategórií podľa nich. Základy boli zjavne koncipované ako „vysokoškolská“ učebnica najvyššej úrovne, prinášajúca informácie o najnovších výsledkoch v základných i špecializovaných disciplínach matematiky, do istej miery už diferencovanej. Zostavené sú majstrovsky, originálne a v duchu základného didaktického zámeru geniálne, rešpektujúc (temer) všetky hlavné didaktické princípy, objavené a explicitne formulované v didaktickej teórii až o mnohé storočia neskôr a aktuálne skúmané aj dnes. – Konečným posudzovateľom významu, hodnoty, ceny a trvanlivosti je história. Kto dnes z ľudí žijacich sa matematikou (vedci, inžinieri, učelia, pracovníci v oblasti informačných technológií atď.) pozná meno Euklida, kto pozná meno Teaiteta a kto čo pozná o ich tvorbe? Akú úlohu zohrali základné idey a koncepcie ich diel v čase ich vzniku a v histórii matematiky? Je nepochybné, že Eudoxova teória pomerov a úmer a exhaustačná metóda, ako aj Teaitetova teória kvadratických a bikvadratických iracionalít výrazne prevyšovali v čase Euklidovho aktívneho pôsobenia úrovňou abstrakcie ostatné zložky Euklidových Základov a predstavovali „raziaci štít“ dobového abstraktného matematického myslenia. Je však rovnako pravdepodobné, že temer výlučnú zásluhu na oboznamovaní dnešnej generácie matematikov s týmito teóriami, v čase ich vzniku a prvého rozkvetu nesporne pozitívne ovplyvňujúcimi pokrok matematiky, má ich umiestnenie v Základoch. Tieto teórie boli vývojom dávno prekonané, buď pohltené ďalekosiahlejšími zovšeobecneniami, alebo zaradené ako partikulárne úseky v teóriách širšieho rozsahu pôsobnosti.

3 Historický význam *Základov* pre vývoj vedy, špeciálne pre vývoj matematiky. Neeuklidovské geometrie

Azda najdôležitejším dôsledkom zostavenia Základov bolo poznanie, že Aristotelova koncepcia výstavby axiomaticko-deduktívne teórie špeciálnej vednej disciplíny je realizovateľná. Že sa to udialo v alexandrijskom Museione v konkrétnom čase, je udalosť, ktorá sa zrodila zo šťastnej lokálnej a časovej koincidencie mnohých priaznivých historických okolností. Bol to predovšetkým rozsiahly súbor tematicky a metodologicky diferencovaných a diverzifikovaných matematických poznatkov, zhromažďovaných gréckymi vedcami na báze osvojenia dedičstva predchádzajúcich kultúr v oblasti východného Stredomoria v časovom

rozpätí troch storočí od 6. storočia p. n. l. po začiatok 3. storočia p. n. l. Koncentrácia značnej časti dobovej matematickej elity, vybavená poznaním najhodnotnejších starších i najnovších výsledkov a metód bádania, musela dospieť k úlohe navodiť systém v záľahe roztrieštených poznatkov rôzneho pôvodu, tematiky a úrovne. Stimulmi, ktoré mohli posilňovať zámer realizovať túto úlohu, boli vo vcelku priaznivom prijatí Hippokratových *Základov* pred vyše storočím a najmä v lákavej výzve vyskúšať Aristotelovu koncepciu axiomaticko-deduktívnej výstavby teórie na nastolenie systému v neprehľadnom zhľuku nejasných súvislostí. A rozhodujúcim šťastným, zdanlivo náhodným priaznivým momentom bola prítomnosť Euklida, celou predchádzajúcou vedeckou a pedagogickou praxou pripraveného na úspešné splnenie tejto úlohy v duchu Aristotelových postulátov, akokoľvek nejasne a neúplne stanovených z hľadiska neskorších historicky odhalených a explicitne sformulovaných princípov.

Druhou, mimoriadne dôležitou okolnosťou, sprevádzajúcou uvedenie Základov do verejného používania, bolo ich všeobecne priaznivé prijatie širokou matematickou komunitou, uznanie ich novátorského významu a pochopenie formy ich spracovania ako vzoru prezentácie nejakého uceleného rozsiahleho odboru vedeckej disciplíny. Euklidov spôsob výberu primárnych pojmov, ich vzťahov, základné výroky (axiómy, postuláty, všeobecné pojmy), usporiadanie tematických celkov (kníh), stupňovanie abstrakcie a zložitosti objektov, relácií a konštrukcií, systemizácia, klasifikácia, usporiadanie výsledkov boli vykonané spôsobom, ktorý vytvoril z obsahu Základov koherentný a kohézny systém. Písomné traktáty, akými boli prepracované časti Základov, učebnice odvodené z nich, komentáre častí dôležitých pre všeobecné vzdelávanie v matematike, ako aj komentáre abstraktne náročných a štylisticky zložitých častí, popularizačné spracovania a dokonca aj beletristické variácie celých dvadsaťtri storočí od vzniku Základov zamestnávali minimálne desaťtisíciky tvorivých matematikov rôznej úrovne v mnohých regiónoch Zeme a v mnohých kultúrach výkladom, interpretáciou, napodobňovaním, kritikou, opravami oprávnenými či domnelými, revíziou obsahu či foriem a ďalšími zásahmi a úpravami. Veľké časti obsahu Základov sú v dobovom didaktickom prispôbení trvalo prítomné vo vzdelávacích programoch matematiky vo väčšine všeobecnovzdelávacích škôl primárneho a sekundárneho stupňa štandardne rozvinutých krajín sveta.

Osobitnou kapitolou v dejinách Euklidových Základov sú aktivity súvisiace s problematikou 5. postulátu prvej knihy, všeobecne známou pod skráteným názvom *teória rovnobežiek*. Pomerne komplikovaná formulácia tohto základného výroku je zdanlivo v rozpore s požiadavkou apodiktickosti výroku tohto druhu. (Túto požiadavku Aristoteles síce explicitne neformuloval, ale neskoršia analýza koncepcie axiomaticko-deduktívnej teórie ju z podstaty koncepcie extrahovala ako bezpodmienečnú.) Zložitosť formulácie postulátu-axiómy vzbudzovala (a dodnes u horlivých „amatérov“ vzbudzuje) lákavú nádej, že ide o dokázateľný (t. j. odvoditeľný) výrok, teda vetu. Tejto domnienke podľahli už niektorí blízki historickí nasledovníci Euklida a po nich určite tisíce ďalších (i našich súčasníkov). Určite stovky vetu „dokázali“, desiatky triviálnych i sofistikovaných „dôkazov“ sú literárne zaznamenané. A autormi „dôkazov“ sú neraz aj špičkoví matematici svojej doby. Ironickým príkladom takého „úspešného“ riešiteľa je aj veľký matematik 18. – 19. storočia Lagrange. Je skutočne veľký, lebo prefikane skrytú chybu vo svojom „dôkaze“ si objavil sám.

Pozitívnym dôsledkom mylných dôkazov 5. postulátu bolo objavenie celého radu výrokov s ním ekvivalentných, ktoré boli spravidla v priebehu „dôkazu“ doň bez dôkazu vpašované ako

samozrejme argumenty bez potreby dokazovania. V 18. storočí bolo uverejnených niekoľko obširných spisov sumarizujúcich desiatky typických i raritných chybných pokusov o dôkaz 5. postulátu, ktorých neúspech posilňoval presvedčenie, že 5. postulát je *nezávislý* od ostatných postulátov Základov. Objavilo sa však aj niekoľko prác zaoberajúcich sa hypoteticky problémom, ako by vyzerala lineárna geometria, v ktorej by bola postulovaná negácia 5. postulátu (napr. Saccheri, Lambert). Takúto geometriu systematicky spracovanú náležitou vedeckou formou publikovali tlačou N. I. Lobačevskij (1829) a J. Bolyai (1832). To sú nezávislí autori prvých systémov *neeuclidovskej (hyperbolickej) geometrie*. Často k nim mnohí historici priradujú C. F. Gaussa. Gauss však žiaden ucelený systém neeuclidovskej geometrie nevypracoval, ani nepublikoval. Jeho súkromné zápisky a príležitostné poznámky v súkromnej korešpondencii svedčia o vynikajúcom a potenciálne tvorivom ovládaní predmetnej problematiky, ale systematického spracovania teórie na túto tému uňho niet.

Čo sa týka vzťahu Euklidovej (resp. euklidovskej) geometrie a neeuclidovských geometrií, obrazne možno povedať, že nevyslovené proroctvo o budúcich neeuclidovských geometriách zaznievalo z kolísky, v ktorej si voľkalo novorodeniatko-Euklidova geometria. Reálny a potenciálny súvis neeuclidovských geometrií a modernej fyziky 20. a 21. storočia je v princípe daný povahou týchto vied v duchu ich chápania meniacou sa filozofiou a metodológiou vedy v tom istom čase. Niet pochyb o tom, že zrod neeuclidovských geometrií v 19. storočí a ich úporne vybojované zaradenie do sústavy uznávaných plnohodnotných vied bolo jedným z najpôsobivejších stimulov, ktoré na prelome 19. a 20. storočia radikálne prispeli k zmene vedeckého obrazu sveta a k zmene názorov na úlohu a interakciu jednotlivých vied v tvorbe tohto obrazu.

4 Práca na preklade (a všeličo okolo toho)

Keď som v roku 2015 definitívne skončil s aktívnou pedagogickou činnosťou, mal som v úmysle dokončiť v priebehu roku-dvoch pokročilo rozpracované dejiny matematiky a potom do dvoch rokov zvládnuť základy klasickej gréčtiny v takej miere, aby som sa mohol pustiť do prekladu Euklidových Základov. Nejasný zámer s týmto cieľom sa krčil v kútiku tajnej komnaty mojich skrytých túžob dobrých 30 – 40 rokov – od čias, keď som pri štúdiu literatúry z dejín matematiky a v styku so zahraničnými kolegami čoraz ťaživejšie pociťoval chýbajúci preklad Euklidovho diela do slovenčiny ako dlhodobý pretrvávajúci deficit pozornosti nášho národa voči jednému zo skvostov svetového kultúrneho dedičstva. Bolo mi jasné, že nemám kvalifikáciu na pokus podujat' sa zlikvidovať tento handicap. A spomedzi mne známych kolegov sa jediný nádejný typ do práce na preklade nepriberal. – Už pominul čas, v ktorom by bol mal šancu.

Pomohla náhoda. Profesorka Martina Bečvářová – a to je **nejaká** autorita v oblasti dejín matematiky – ma poučila, že obvyklý, priam štandardný spôsob prekladania Základov do národných jazykov sa deje prekladaním renomovaných kritických verzií Euklidovho textu, zostavených J. L. Heibergom v klasickej gréčtine a latinčine, preložených do svetových jazykov. Azda najväčšiu dôveru v tejto kategórii prekladov požíva anglický preklad T. L. Heatha, jedného z najlepších znalcov starovekej gréckej a helenistickej matematiky, autora dvojdielnej monografie o dejinách tejto matematiky. Jeho trojdielny anglický preklad Základov, vydaný pod názvom *The Thirteen Books of The Elements*, obsahuje okrem prekladu Euklidovho textu komentáre ku všetkým textom, ukážky gréckeho textu, historické poznámky a register gréckych termínov.

Štruktúrou i kvalitou veľmi blízky k Heathovmu prekladu je ruský preklad D. D. Morduchaja-Boltovského *Načala Jevklida*, odlišný od Heathovho prekladu menším rozsahom historických poznámok, umiestnením komentárov do osobitných blokov a miestami aj ich väčšou kvalitou.

Nemecký preklad R. Hallera neobsahuje komentáre, má však pri mnohých algebrických a aritmetických propozíciách ilustračné numerické príklady s konkrétnymi číselnými údajmi.

Modernizovaný anglický preklad R. Fitzpatricka s ojedinelými doplňujúcimi poznámkami vysvetľujúceho charakteru je zaujímavý paralelným uvádzaním úplného gréckeho textu Základov.

Letmo som nazrel aj do latinského prekladu, ktorý vyhotovil v 13. storočí Giovanni Campano a vyšiel v Benátkach v roku 1482 ako prvé vytlačené vydanie tohto diela. Takisto som sa bežne oboznámil s francúzskym prekladom Francois Peyrarda z roku 1814.

Voľba hlavného prameňa na preklad nebola problémom: od prvého oboznámenia sa s relevantnou literatúrou bolo zrejme, že to bude Heathov preklad s krížovou kontrolou pomocou Morduchaja-Boltovského a v prípade väčších pochybností s nahliadnutím do gréckeho textu u Fitzpatricka. Český preklad F. Servíta s kolektívnymi úpravami v redakcii Petra Vopěnku sa taktiež často používal v role porovnávacieho materiálu, z hľadiska terminologického nevelmi vhodného.

Heibergov grécky text ako základný prameň prekladu neprichádzal do úvahy: klasickú ani modernú gréčtinu neovládam. S latinskou verziou pri dostatku času bol by som možno našiel odvahu popasovať sa s textom. – Zišlo z toho; nebolo to potrebné.

Základná dilema koncepcie prekladu znela: čo najväčšia vernosť originálu – alebo maximálna možná zrozumiteľnosť pre čitateľa. Voľba druhej alternatívy by bola znamenala nutnosť prepísať text s použitím dnešných pojmov a terminológie. So zavrnutím tejto alternatívy nebolo treba dlho váhať. Závažných príčin takéhoto rozhodnutia bolo niekoľko, no tou najdôležitejšou bolo úsilie popri kvalitnom odbornom tlmočení obsahu diela verne zachytiť aj Euklidov jazykový spôsob prezentácie, sprostredkovať jeho štýl spojenia matematiky, logiky a odborného jazyka tých čias do tej miery, aby sa na základe porovnania s inými relevantnými textami dalo s vysokou pravdepodobnosťou usúdiť, či to napísal Euklides, alebo to nemohol napísať.

Hlavným problémom pri prekladaní Euklidových Základov nebola ich syntaktická náročnosť a pomerne nadmerná komplikovanosť ich formulácií – hoci ani túto ich stránku nehodno prehliadať – ale nerozvinutosť ich terminológie, prejavujúca sa nevyhranenosťou mnohých pojmov, aj základných, nedostatočnou jazykovou diferenciáciou homonymných, no obsahom rôznych termínov, a vágnym obsahovým vymedzením primárnych pojmov tzv. definíciami, čo bolo neprípustné už v Euklidových časoch podľa princípov tvorby teórie sformulovaných Platónom a Aristotelom. Najmä v tejto poslednej činnosti sa zrejme odrazil vplyv tradície založenej niektorými uznávanými Euklidovými predchodcami v skorších pokusoch zostavovania „Základov“. Nie sú hodné rešpektu niektoré domnienky o neskorších vloženiach takýchto pasáží do textu Základov.

Vôbec, v niektorých prameňoch, začínajúc prekladmi, pokračujúc komentármi a končiac dielami o dejinách, filozofii a metodológii Základov, sa často operuje pojmami a domnienkami, o ktorých v texte Základov niet explicitnej zmienky. A netýka sa to len druhotriednych a ešte slabších publikácií. Vzťahuje sa to aj na najrenomovanejšie preklady, napr. Heathov a Morduchaja-Boltovskeho; napr. Heath používa vždy termín *polomer* namiesto originálneho spojenia *priamka zo stredu* a termín *nekonečný*, keď ide o počet väčší než *akýkoľvek daný* alebo *dosiahnutý*, ako je to obvykle napísané v origináli.

Euklidova terminológia je výrazne poznamenaná dvoma okolnosťami. Po prvé, je úzkostlivo spätá s prirodzeným jazykom a vyhýba sa tvorbe špecifických odborných novotvarov, pokiaľ to nie je nevyhnutné. Po druhé, výlučná geometrická interpretácia objektov má za následok silné zastúpenie názornosti v grafickej ilustrácii aj v jazykovom vyjadrení objektov, vzťahov a činností (úkonov). Táto stránka jazyka Základov je zachytená v slovenskom preklade a v tomto smere má veľmi blízko k historicky nedávnej školskej praxi vo výučbe aj v tvorbe učebníc až po druhú polovicu 20. storočia. Až zámerná, organizovaná a sofistikovaná tvorba odbornej terminológie v matematike, špeciálne v geometrii, vyzdvihla ako postulát náhradu niektorých tradičných, názorných a v živom hovorovom prejave obvyklých používaných pomenovaní a spojení menej expresívnymi výrazmi a obrazmi.

Objektívne hodnotiac, jazyk Základov ani v modernom, v rámci možností vernom preklade s nepodstatnými odchýlkami od dnešnej normy (napr. miestami s odlišným slovosledom) nepôsobí archaicky. Jazykovú výstavbu dôkazu – okrem stereotypných floskúl (ktovie, či výstižne preložených alebo vôbec preložiteľných) – možno bez zveličenia označiť za (temer) zhodnú s postupom dokazovania v ktorejkoľvek matematickej oblasti našej súčasnosti. Treba však poznamenať, že rešpektovanie návrhov jazykových korektorov na dôslednú úpravu textu podľa najnovších noriem v určitej miere oslabuje atmosféru starobylosti, ktorou by text Základov predsa len mal trochu pôsobiť.

Slovo na záver

Na cestu k slovenskému čitateľovi sa vydáva dlho avizovaný a očakávaný preklad naj-najslávnejšieho diela svetovej matematickej histórie – Euklidových *Základov*. Turbulentné časy máajúceho chaosu a rozvratu poznačené pandemickým príznakom COVIDu sotva vytvárajú priaznivé prostredie na hlbavé vnímanie atmosféry prastarého, no obsahom, duchom a posolstvom stále živého a atraktívneho diela, hlboko zakoreneného v histórii a trvale aktuálneho v prítomnosti svetovej matematiky. Nech si čitateľ aj v tejto pohnutej dobe nájde chvíľu pokoja a sústredenia, v ktorej sa pokúsi prekliessniť si chodník húštinou dobových formulácií k pochopeniu miestami neľahkého textu, približujúceho myslenie a jazyk učenca dávnej epochy, dodnes prítomného v učebniciach geometrie sekundárneho a vysokého odborného školstva.

Akékoľvek ohlasy, osobitne kritické, budú vítaným prejavom pozornosti a uznania nadčasovej hodnoty diela, prínosu jeho autora i skromného príspevku prekladateľa a okruhu jeho obetavých spolupracovníkov a sympatizantov k splateniu dlhu voči jedinečnému pokladu svetovej vedy a kultúry.

Šťastnú cestu dielu a veľa povznášajúcich a inšpiratívnych zážitkov čitateľom.

Literatúra

- [1] Euclid: *The Thirteen Books of The Elements* (preklad a komentár Th. L. Heath), Dover Publications, New York, 1956

prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.

ul. Astrová 16, 821 01 Bratislava, Slovenská republika
e-mail: jan.cizmar85@gmail.com

Zaujímavé konštrukčné prvky v architektúre vytvorené pomocou kružníc

Michaela Holešová

Abstrakt

V architektúre sa používajú rôzne zaujímavé tvary. Vzhľadom na podmienku jednoduchosti technického prevedenia sa väčšinou vytvárajú zo základných geometrických prvkov ako sú úsečka a kružnica. Kružnica je základný určujúci prvok aj pre ovál alebo štvorlístok, ktoré sa často využívajú pre vytvorenie netradičných pôdorysov, otvorov a ozdobných prvkov dobových stavieb. V článku sa zaoberáme známymi konštrukciami oválov ako aj ich modifikáciami a konštrukciami niektorých typov štvorlístkov.

Kľúčové slová: ovál, štvorlístok, konštrukcia, aproximácia elipsy

Abstract

Various interesting shapes are used in architecture. Due to the condition of simplicity of technical design they are usually formed from basic geometric elements such as a line and a circle. The circle is also a basic determining element for ovals or four-leaf clover, which are often used to create non-traditional floor plans, openings and decorative elements of period buildings. In this article we deal with known constructions of ovals as well as their modifications and constructions of some types of Quatrefoils.

Keywords: oval, Quatrefoil, construction, approximation of an ellipse

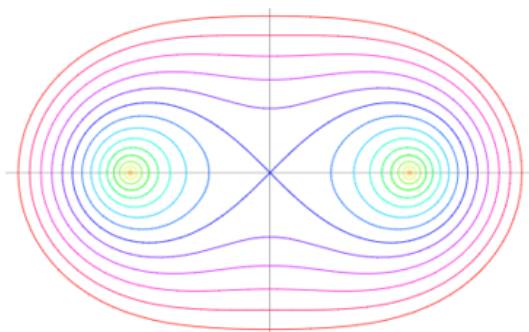
1 Úvod

Geometrické prvky sú počas celej histórie a aj v súčasnosti základom rôznych foriem tvorby architektúry. Pri mnohých konštrukčných prvkoch sú postačujúce jednoduché konštrukcie s použitím úsečiek a kružníc. Veľmi často sa stretávame s oválmi, ktoré sú používané na aproximáciu elipsy a vytvorenie pôdorysov budov v eliptickom tvare. Tieto aproximačné konštrukcie a teda konštrukcie oválov sú v mnohých prípadoch také presné, že je veľmi ťažké určiť pri geometrickej rekonštrukcii historickej budovy či ide o ovál alebo elipsu. Ukážeme konštrukcie elipsy aproximovanej dvomi príp. tromi rôznymi kružnicovými oblúkmi, ktoré boli používané v architektúre. Venujeme sa Serliovým [1], Guariniho [2] a Meyerovým konštrukciám [6] oválov a aj ich niekoľkým modifikáciám, kedy je jednou tvoriacou kružnicou napríklad hyperoskulačná kružnica aproximovanej elipsy.

Striktné matematické definovanie pojmu ovál chýba, pomenovanie ovál bolo odvodené z latinského slova “ovus” používané na označenie vajíčka, čo má zmysel, nakoľko v architektúre sa ovál často používa v spojení s aproximáciou elipsy. Pojmom ovál označujeme krivku, ktorá má tieto spoločné črty:

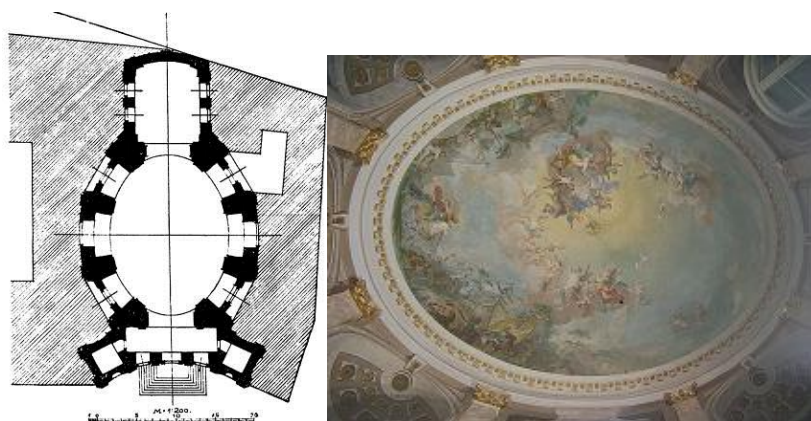
- je diferencovateľná (hladko vyzerajúca), jednoduchá (nepretínajúca sa), konvexná, uzavretá, rovinná krivka;
- jej tvar sa veľmi nelíši od tvaru elipsy a „voľne“ pripomína obrys vajíčka;
- existuje aspoň jedna os symetrie (na rozdiel od elipsy, ktorá má vždy dve osi symetrie).

Vo všeobecnosti teda ovál nevieme presne matematicky definovať a vyjadriť, avšak poznáme napríklad celú skupinu kriviek štvrtého stupňa, ktoré sú spoločne označované ako Cassiniho ovály, obr. 1. Cassiniho ovály, niekedy nazývané aj Cassiniho elipsy, sú definované ako množina bodov v rovine, ktorých súčin vzdialeností od dvoch pevných bodov, ktorých vzdialenosť je $2a$, sa rovná konštante b^2 . Tvar krivky závisí od pomeru b/a .



Obr. 1. Cassiniho ovály, $a < b$, krivka nie je rozpadnutá na dve časti; $a = b$, lemniskáta; $a > b$, krivka je rozpadnutá na dve časti, [7]

Príklady využitia oválov v architektúre nachádzame aj na Slovensku, kedy je ovál využitý ako pôdorys Kostola svätého Jána z Mathy v Bratislave, alebo pri výzdobe Primaciálneho paláca v Bratislave, obr. 2.

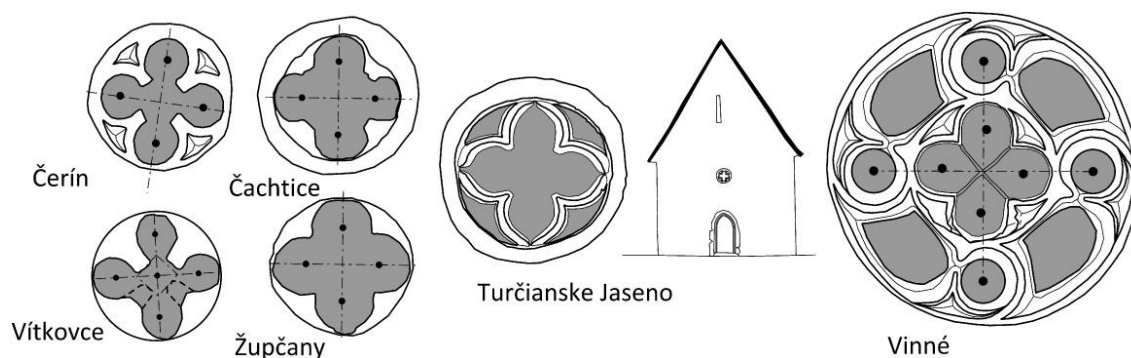


Obr. 2. Kostol svätého Jána z Mathy (vľavo) a Primaciálny palác v Bratislave (vpravo), [4]

Pri vytváraní zaujímavých interiérov sa v architektúre stretávame aj s motívmi trojlístkov, štvorlístkov a pod. Článok sa zaoberá geometrickými postupmi tvorby štvorlístka, ktorý je vytvorený aditívnou kombináciou štyroch kružníc, príp. oválov, pričom vytvorený útvar má jeden stred súmernosti, obr. 3.

Takto vytvorený útvar sa dá jednoducho a zaujímavo doplniť či upraviť a vzniká tak vizuálne atraktívny útvar, ktorý má aj symbolický či náboženský význam. V architektúre sa s ním stretávame ako pôdorysom budovy, prierezom architektonických prvkov alebo ako ozdobným otvorom v budove. Zameriavame sa na gotickú architektúru, ktorá je jednou z najstarších etáp vývoja historickej architektúry na Slovensku, o čom svedčí väčší súbor zachovaných stavieb a ich častí. Štvorlístok sa v tomto období objavuje najmä ako zjednodušená forma veľkých

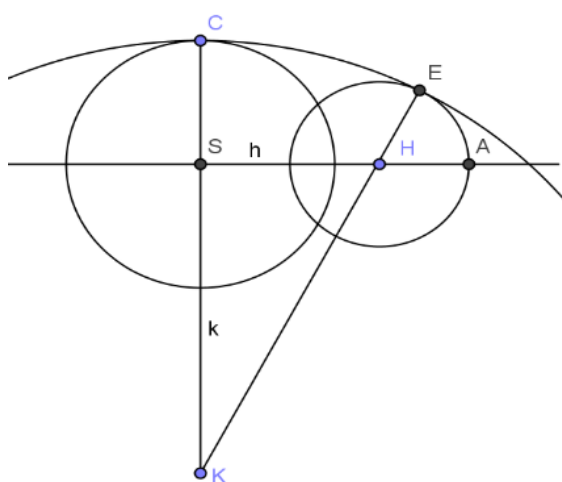
roziet katedrál s vitrážou, často sa nachádza tam, kde symbolicky sprostredkúva vstup svetla do kostola, či tvorí len vetrací otvor priestoru krovu, obr. 3. Gotické rozetové okná, ktoré sú vyplnené štvorlístkom, nachádzame aj v Českej republike [9].



Obr. 3. Štvorlístkové tvary v rôznych kostoloch a kaplnkách na Slovensku, [8]

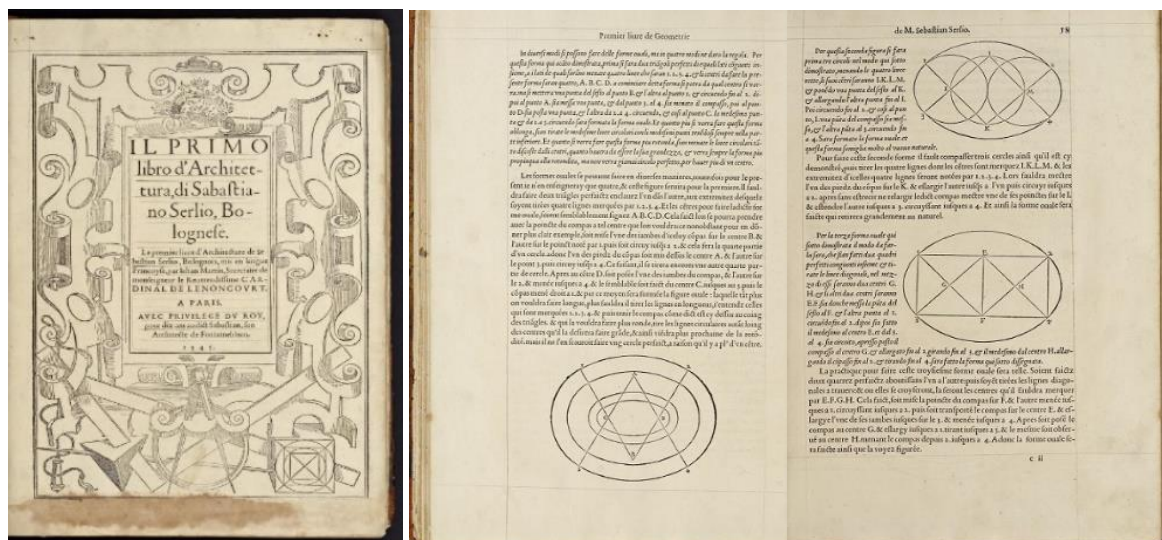
2 Serlieve konštrukcie oválov

V architektúre sa pri projektovaní eliptických tvarov pravdepodobne nekonštruovala elipsa presne. Aj keď trojuholníkovú konštrukciu elipsy nachádzame v dobových knihách venovaných architektúre, pre praktické využitie nachádzame rôzne konštrukcie, ktorými sa elipsa aproximovala oválom. V tomto špeciálnom prípade sa na ovál pozeráme ako na krivku, ktorá je zložená z kružnicových oblúkov. Ak sa na takto definovaný ovál pozrieme očami geometra, je potrebné zostrojiť kružnice, ktoré v bode spojenia majú spoločnú dotyčnicu, aby bola zachovaná podmienka hladkosti oválu ako krivky. Z toho je zrejmé, že v bode spojenia majú mať kružnice spoločnú dotyčnicu a teda stredy spájaných oblúkov musia ležať na jednej priamke prechádzajúcej spoločným bodom a kolmej na túto dotyčnicu.



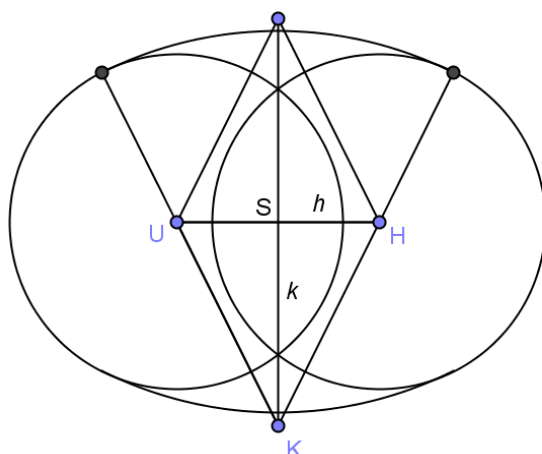
Obr. 4. Konštrukcia oválu použitím troch kružníc

S. Serlio v [1] popisuje štyri základné konštrukcie oválov, obr. 5. Tieto ovály sú určené dĺžkou hlavnej poloosi a a vedľajšej poloosi b aproximovanej elipsy. Kvôli symetrii elipsy malo zmysel vo väčšine prípadov použiť iba dve rôzne kružnice. Konštrukcie sú založené na tom, že sa hľadajú stredy a polomer týchto kružníc spĺňajúcich podmienku hladkého napojenia.



Obr. 5. Strany z publikácie Sebastiana Serlia: *Il primo libro d'architettura*

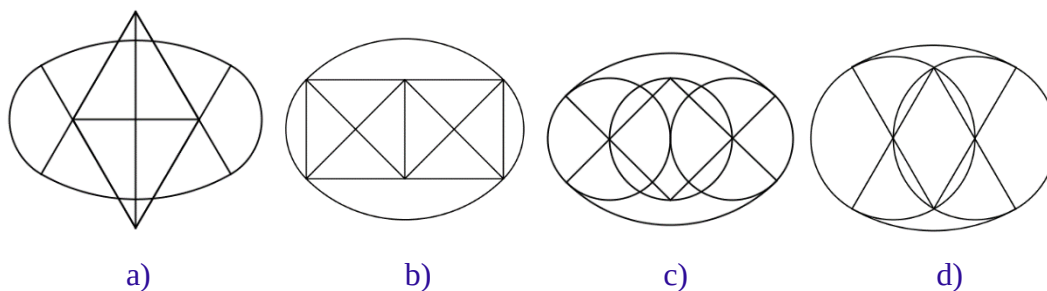
Kružnice majú v spoločnom bode spoločnú aj dotyčnicu, t.j. stredy H, K týchto kružníc patria jednej priamke, obr. 6. Nech $h = |SH|$ a $k = |SK|$, kde S je stred oválu. Hľadané kružnice majú polomery $a - h, a - h + \sqrt{h^2 + k^2}$.



Obr. 6. Konštrukcia oválu určeného dvomi kružnicami

V konštrukciách popísaných S. Serliom majú parametre h a k vyjadrenia podľa typu konštrukcie. Konštrukcia na obr. 7a) je taká, že trojuholník UHK je rovnostranný a parametre $h = \frac{a-b}{\sqrt{3}-1}$, $k = \sqrt{3}h$. S. Serlio vyjadruje aj pomer polomerov hľadaných kružníc a aj pomer dĺžky hlavnej a vedľajšej poloosi elipsy a/b . V tomto prípade nie sú tieto pomery konštantné. V ďalších konštrukciách už konštantné sú a majú nasledujúce vyjadrenie, pozri [1].

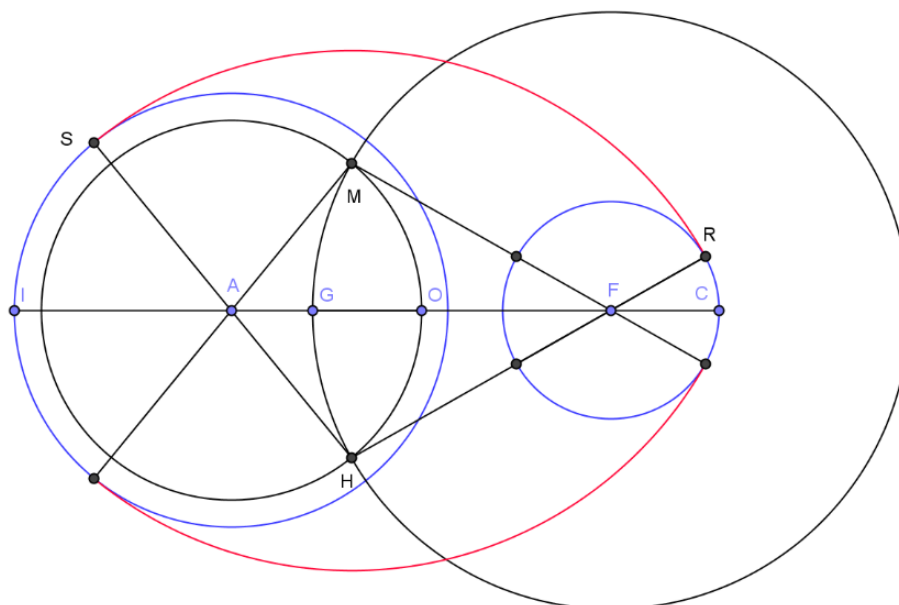
V obr. 7b) je $h = k = \frac{a}{\sqrt{2}+1}$, $a/b = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}$, pomer polomerov kružníc je $1/2$. Pre prípad z obr. 7c) je $h = k = a/2$, $a/b = \sqrt{2}$ a pomer polomerov kružníc je $\sqrt{2} - 1$. V prípade z obr. 7d) je $h = a/3$, $a/b = \frac{3}{4-\sqrt{3}}$, $k = \sqrt{3}h$ a pomer polomerov kružníc je $1/2$.



Obr. 7. Typy konštrukcií oválov opísaných S. Serliom

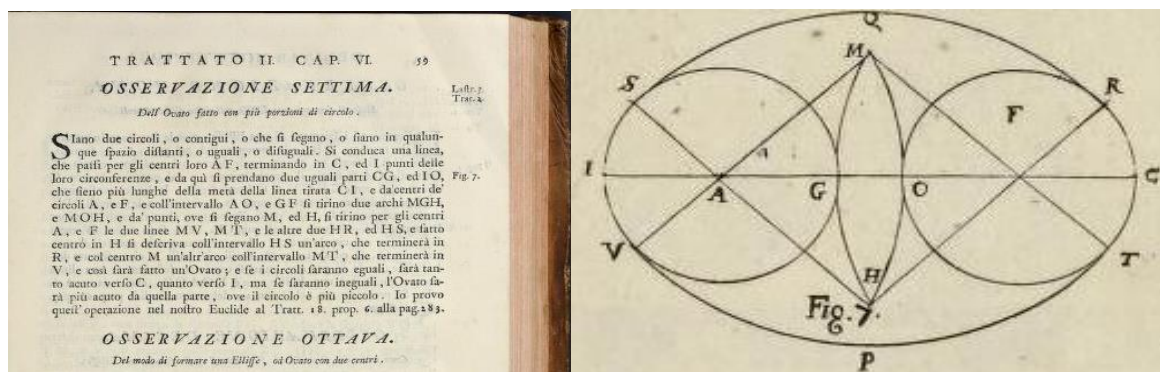
3 Guariniho konštrukcie oválov

G. Guarini v [2] opisuje svoju konštrukciu tak, že zoberieme dve rôzne kružnice so stredmi A a F , ktoré môžu mať rôzne polomery a môžu sa aj pretínať. My sme zobrali nepretínajúce sa kružnice s rôznymi polomermi, obr. 8. Priamka AF pretína tieto kružnice v bodoch I a C . Zoberieme ľubovoľnú dĺžku väčšiu ako je polovica dĺžky $|CI|$ a zostrojíme body G a O tak, že $|IO| = |CG|$ a je to táto zvolená dĺžka. Zostrojíme kružnice so stredmi A a F a polomermi AO , GF . Tieto kružnice sa pretnú v dvoch bodoch M a H . Je zrejmé, že priamka MH je kolmá na úsečku IC . Zostrojíme priamky MF , HF , MA , HA . Tieto priamky dané kružnice pretnú v bodoch S , V , R , T , obr. 8. Pre dôkaz správnosti konštrukcie stačí ukázať, že body S a R ležia na jednej kružnici so stredom v bode H a polomerom $|SH| = |HR|$. Na základe voľby bodov G a O a konštrukcie bodov M a H vieme, že $|AO| = |AH|$ a $|FH| = |FG|$. Keďže body S a I ležia na kružnici so stredom v bode A , platí $|AI| = |SA|$. Rovnako platí, že $|FC| = |FR|$. Vyjadríme teraz vzdialenosti $|SH| = |SA| + |AH| = |AI| + |AO| = |IO|$, $|HR| = |HF| + |FR| = |FG| + |FC| = |GC|$ a keďže je $|IO| = |CG|$, je aj $|SH| = |HR|$.

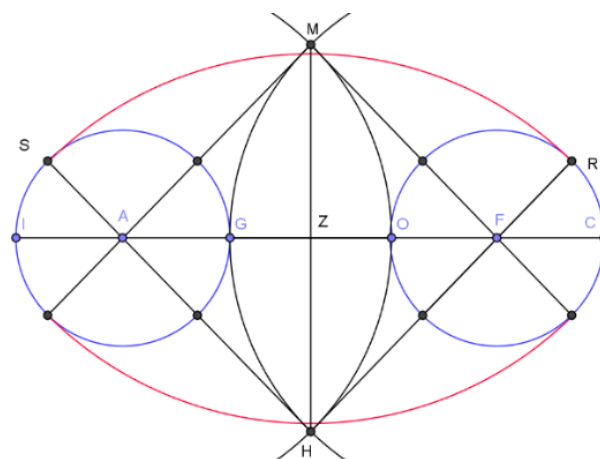


Obr. 8. Konštrukcia oválu určeného dvomi rôznymi kružnicami pomocou Guariniho metódy

G. Guarini v [2] vykreslil špeciálny prípad, keď je táto konštrukcia použitá na konštrukciu oválu a zadané kružnice majú rovnaký polomer, obr. 9.



Obr. 9. Opis konštrukcie z G. Guariniho *Architettura civile*: opera postuma



Obr. 10. Prekreslená Guariniho konštrukcia oválu

Voľbou rovnakých kružníc určíme dĺžku hlavnej poloosi aproximovanej elipsy a voľbou bodu G určíme veľkosť vedľajšej poloosi. G. Guarini volil bod G tak, že je to bod, v ktorom volená kružnica pretína priamku AF a zadané kružnice sa nepretínajú. Dá sa ukázať, že vhodnou voľbou určujúcich prvkov môžeme dostať ovál opísaný S. Serliom. Napríklad ovál z konštrukcie z obr. 7d) dostaneme tak, že volíme polomer kružníc $2a/3$ a vzdialenosť stredov kružníc je práve $2a/3$ a bod G je totožný s bodom A.

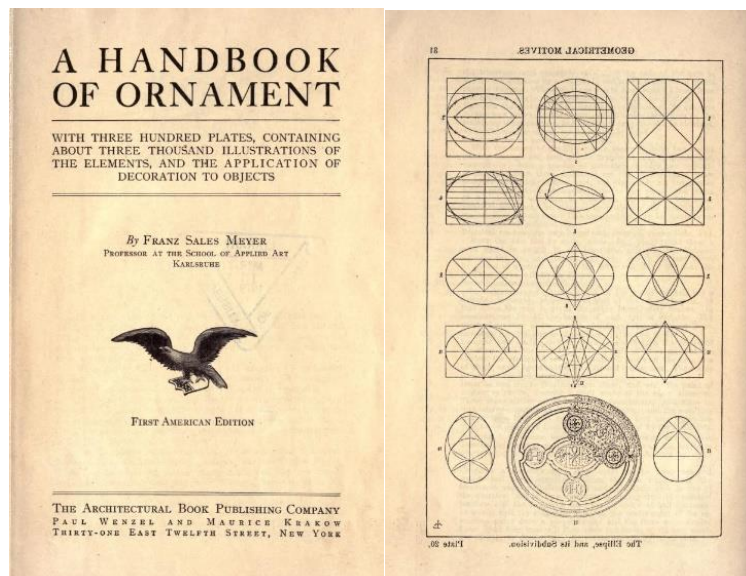
Guariniho konštrukciu z obr. 10 môžeme opísať aj prostriedkami algebry a vyjadríme niektoré pomery. Polomer zvolených kružníc označíme $r = |AI| = |CF|$ a parameter $h = |AF|/2$, teda dĺžka hlavnej poloosi je $a = h + r$. Označme Z stred oválu. Dĺžka $|GO| = 2(h - r)$ a $|GF| = |FH| = |GO| + r$, a z toho je $|GF| = |FH| = 2h - r$ a polomer druhej kružnice určujúcej ovál je $|HR| = |HF| + r = 2h = |AF|$. Z konštrukcie vyplýva, že $k = |ZH| = \sqrt{3h^2 - 4hr + r^2}$. Pomer polomerov kružníc môžeme algebraicky určiť že je $2h/r$ a pomer

$$\frac{a}{b} = \frac{h + r}{2h - \sqrt{3h^2 - 4hr + r^2}}.$$

Guariniho konštrukcia má výhodu v tom, že ak vieme akou kružnicou pri hlavnom vrchole chceme aproximovať príslušnú elipsu, tak si túto kružnicu môžeme hneď zvoliť, čo napríklad pri Serlio postupe z Obr. 7a) nie je možné. Zasa nevýhodou Guariniho konštrukcie je, že ľubovoľnou voľbou bodu G nezabezpečíme, aby sme mali daný pomer hlavnej a vedľajšej poloosi elipsy.

4 Meyerove konštrukcie oválov

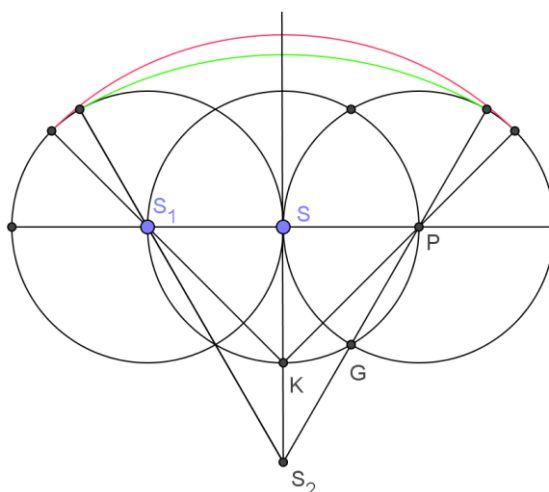
Franz Sales Meyer vo svojej knihe [6] uviedol upravené Serlioove a Guariniho konštrukcie oválov, obr. 11. Na rozdiel od týchto dvoch autorov uviedol aj konštrukcie také, že je zachovaná nielen dĺžka hlavnej, ale aj vedľajšej poloosi aproximovanej elipsy.



Obr. 11. F. S. Meyer, A Handbook of Ornament, ukážka uvedených konštrukcií v tejto knihe

Uvedieme aspoň jednu takúto modifikáciu, ktorou F.S. Meyer upravil Serlioovu konštrukciu zakreslenú v obr. 7c). Jeden stred aproximáčnej kružnice zakreslil ako bod S_2 na rozdiel od Serlioovej konštrukcie, kde je to bod K . Na obr. 12 je porovnanie týchto dvoch konštrukcií.

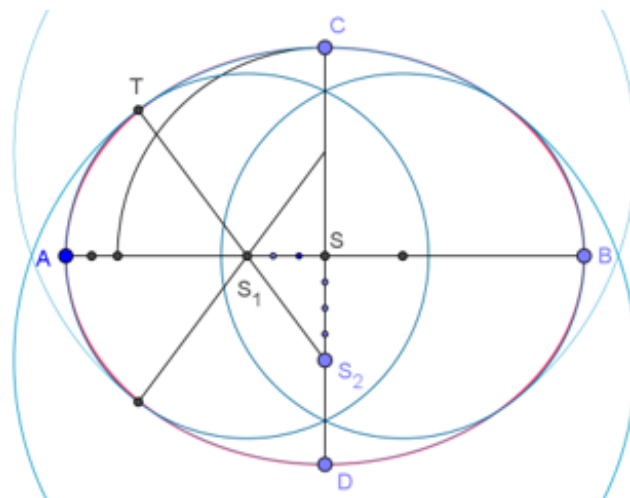
Je zrejmé, že trojuholník ΔS_2S_1P je rovnostranný a preto pre dĺžky platí $h = a/2$, $k = \sqrt{3}a/2$, $a/b = (\sqrt{3}+3)/3$ a pomer polomerov kružníc určujúcich ovál je $1/3$.



Obr. 12. Meyerova konštrukcia (zelená farba), Serlioova konštrukcia (červená farba)

V prípade, že pri aproximovaní elipsy majú byť zachované obe dĺžky poloosí danej elipsy, F.S. Meyer v [6] uviedol nasledujúce zaujímavé konštrukcie oválov, avšak bez dôkazu ich správnosti. Zostrojme hlavnú a vedľajšiu os danej elipsy. Bod S je stredom elipsy. Zoberieme

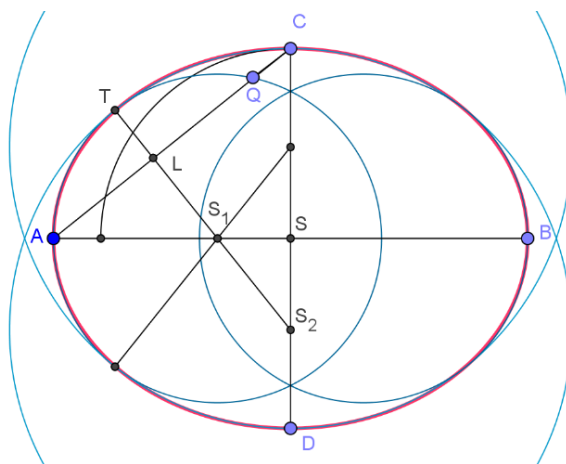
polovicu rozdielu dĺžky hlavnej a vedľajšej poloosi, $(a - b)/2$. Od stredu nanesieme túto vzdialenosť tri krát na hlavnú os a štyrikrát na vedľajšiu os. Získame stredy kružníc S_1, S_2 , ktoré využijeme na aproximáciu danej elipsy, obr. 13.



Obr. 13. Meyerova konštrukcia oválu, $a/b = 5/4$

Tak ako aj pri Serliových a Guariniho konštrukciách budeme označovať vzdialenosť stredu určujúcej kružnice na hlavnej osi od stredu elipsy $h = |S_1S|$ a vzdialenosť stredu druhej určujúcej kružnice na vedľajšej osi od stredu elipsy ako $k = |SS_2|$. Pre konštrukciu na obr. 13 je $h = 3(a - b)/2$, $k = 2(a - b)$, $h = 3k/4$ a polomery kružníc sú $r_1 = (3b - a)/2$, $r_2 = 2a - b$. Ešte musíme ukázať, že $|S_2T| = |S_2C|$. Na základe konštrukcie je $|S_1S_2| = 5(a - b)/2$. $|S_2T| = |S_1S_2| + |S_1T| = 5(a - b)/2 + (3b - a)/2 = 2a - b = |S_2C|$.

V ďalšej konštrukcii je rovnako daná elipsa hlavnou a vedľajšou osou, bod S je stredom elipsy, obr. 14. Zoberieme rozdiel hlavnej a vedľajšej poloosi elipsy $a - b$. Zostrojíme úsečku AC a od bodu C na túto úsečku nanesieme túto dĺžku. Koncový bod úsečky označme Q, t.j. $|QC| = a - b$. Stred úsečky AQ označme L. Bodom L zostrojíme priamku kolmú na úsečku AC. Táto priamka pretína hlavnú os v bode S_1 a vedľajšiu os v bode S_2 , čo sú stredy kružníc, ktoré aproximujú danú elipsu. Na základe konštrukcie sú trojuholníky $\triangle ALS_1$, $\triangle S_2LC$, $\triangle ASC$, $\triangle S_2SS_1$ navzájom podobné a dĺžka $|AL| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - (a - b)}{2}$.



Obr. 14. Meyerova konštrukcia oválu

Z podobnosti trojuholníkov $\triangle ALS_1 \approx \triangle ASC$, $\triangle S_2LC \approx \triangle ASC$ vyplýva, že

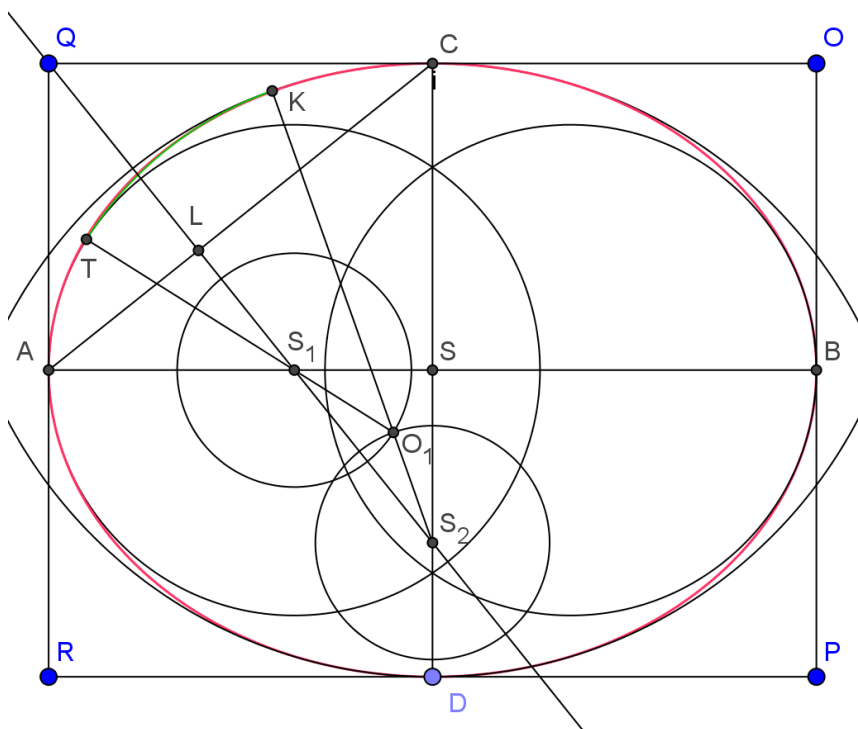
$$r_1 = |AS_1| = \frac{|AL||AC|}{|AS|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}(\sqrt{a^2 + b^2} - (a - b))}{2a}.$$

$$r_2 = |CS_2| = \frac{|CL||AC|}{|CS|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}(\sqrt{a^2 + b^2} + (a - b))}{2b}.$$

Na základe konštrukcie je $|S_2T| = |S_1S_2| + |S_1T| = \sqrt{a^2 + b^2}h/b + |AL|\sqrt{a^2 + b^2}/a = |S_2C|$.

Na obr. 14 je znázornená elipsa, pre ktorú je $a/b = 5/4$, a aproximácia podľa tejto konštrukcie. Vidíme, že obe konštrukcie veľmi dobre aproximujú danú elipsu.

Teraz ukážeme konštrukciu, ktorá využíva na aproximáciu hyperoskulačné kružnice elipsy, čo používame ešte aj v tomto období. Avšak F. Meyer uviedol zaujímavé a jednoduché prepojenie hyperoskulačných kružníc ďalším kružnicovým oblúkom, a teda elipsa je aproximovaná oválom určeným tromi rozdielnymi kružnicami. Konštrukcia na obr. 15 upadla do zabudnutia, aj keď si myslíme, že je to veľká škoda a mala by využitie aj v dnešnej dobe.



Obr. 15. Meyerova konštrukcia oválu pomocou hyperoskulačných kružníc elipsy

Skonstruujeme obdĺžnik $OPRQ$, ktorého strany majú dĺžku rovnajúcu sa hlavnej a vedľajšej osi elipsy a stred S obdĺžnika je stredom elipsy a zostrojíme osi jeho strán AB , CD . Zostrojíme úsečku AC . Bodom Q zostrojíme priamku kolmú na úsečku AC . Táto priamka pretína hlavnú os v bode S_1 a vedľajšiu os v bode S_2 , čo sú stredy hyperoskulačných kružníc. Polomery hyperoskulačných kružníc sú známe, $r_1 = |AS_1| = b^2/a$, $r_2 = |CS_2| = a^2/b$, ale vieme ich ľahko odvodiť aj z podobnosti trojuholníkov $\triangle ALS_1$, $\triangle S_2LC$, $\triangle ASC$, $\triangle S_2SS_1$. Z podobnosti trojuholníkov $\triangle ASC \approx \triangle S_2SS_1$ vyplýva, že $k = |S_2T| = a|S_1S|/b = ah/b$, kde parameter $h = a - r_1 = (a^2 - b^2)/a$. Stred kružnice O_1 , ktorá hladko napája hyperoskulačné kružnice do spojitkej krivky - oválu zostrojíme tak, že zostrojíme kružnice so stredmi v bodoch S_1 , S_2 a polomerom $(r_2 - r_1)/2$. Priamky O_1S_1 , O_1S_2 pretínajú hyperoskulačné kružnice v bodoch T , K . Už musíme

iba ukázať, že $|TO_I| = |KO_I|$. Z konštrukcie je zrejmé, že $|TO_I| = (r_2 - r_1)/2 + r_1 = (r_2 + r_1)/2$ a $|KO_I| = r_2 - (r_2 - r_1)/2 = (r_2 + r_1)/2$. Táto konštrukcia je síce aproximačnou konštrukciou, avšak zostrojený ovál najlepšie aproximuje danú elipsu zo všetkých uvedených konštrukcií ako vidíme na obr. 15, kde je zostrojená elipsa (červenou farbou), pre ktorú je $a/b = 5/4$.

5 Modifikácia známych konštrukcií oválov

Ak pri Serlio, či Guariniho konštrukciách dáme podmienku, že chceme aproximovať elipsu, ktorá má zadanú nielen hlavnú, ale aj vedľajšiu os, tak musí byť splnená nasledovná rovnosť

$$r_1 + \sqrt{h^2 + k^2} = k + b, \quad (1)$$

kde r_1 je polomer kružnice q_1 , ktorá aproximuje okolie hlavného vrcholu, b je dĺžka vedľajšej poloosi, h, k sú parametre z obr. 6, a teda $h = a - r_1$. Po dosadení do rovnice (1) a úprave dostaneme

$$k = \frac{(a - b)(a + b - 2r_1)}{2(b - r_1)}. \quad (2)$$

Na základe postupu v Serlio konštrukcii na obr. 7a), kde sa snažíme zostrojiť rovnostranný trojuholník $\Delta S_2 S_1 O_1$, platí, že $k = \sqrt{3}h$, a teda $r_1 = a - \frac{k}{\sqrt{3}}$, obr. 16. Po dosadení do rovnice (2) dostaneme kvadratickú rovnicu

$$k^2 - (a - b)(1 + \sqrt{3})k + \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b)^2 = 0,$$

ktorej riešením sú korene

$$k_1 = \frac{(a - b)(3 + \sqrt{3})}{2}, \quad \bar{k}_1 = \frac{(a - b)(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$

Z toho dostaneme aj vyjadrenie pre polomer r_1 hľadanej kružnice q_1 pre hlavný vrchol

$$r_1 = \frac{a(1 - \sqrt{3}) + b(1 + \sqrt{3})}{2}, \quad \bar{r}_1 = \frac{a + b}{2} + \frac{(a - b)}{2\sqrt{3}}.$$

Je zrejmé, že r_1 bude možným riešením práve vtedy, keď $a < b(2 + \sqrt{3})$. Ak prihliadame na podmienku, že má ísť o hladký dotyk, tak kružnica q_1 by sa mala dotýkať zvnútra kružnice q_2 aproximujúcej elipsu v okolí vedľajšieho vrcholu. Z toho vyplýva, že $|S_1 S_2| = k + b - r_1$, kde $|S_1 S_2| = 2h$, a z toho je

$$k = \frac{(a - b)(3 + \sqrt{3})}{2}.$$

Druhý koreň $\bar{k}_1$ môžeme vylúčiť aj preto, že v tomto prípade by bol vedľajší vrchol vnútorným bodom kružnice q_1 . Je potrebné ešte konštrukčne určiť napríklad bod S_1 pri zadanej dĺžke hlavnej a vedľajšej poloosi. Ak polomer vyjadríme ako

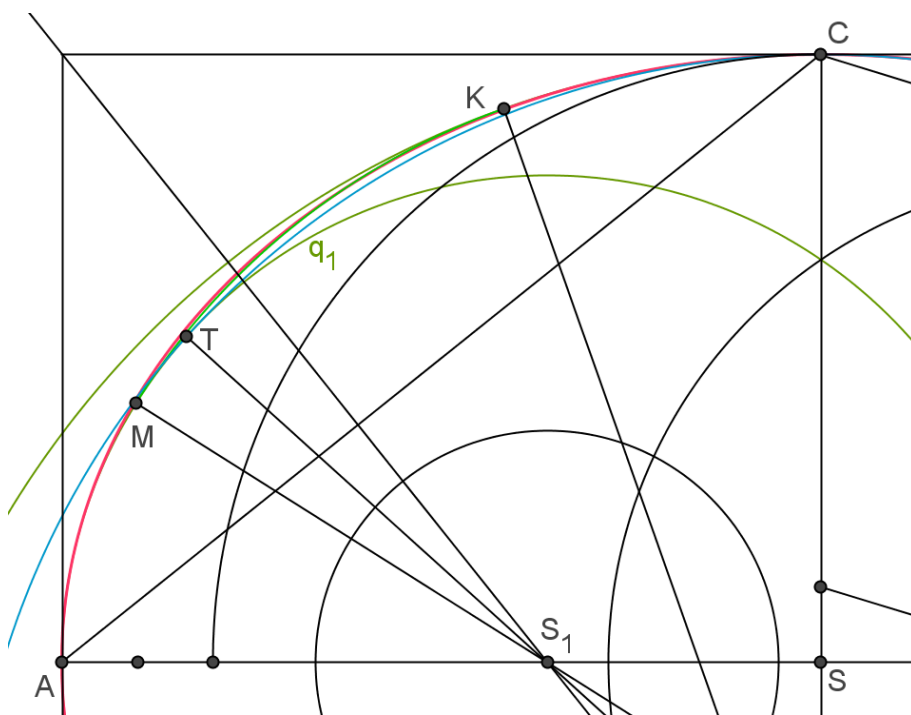
$$r_1 = \frac{a + b - \sqrt{3}(a - b)}{2}.$$

tak konštrukčne môžeme úsečku dĺžky $\sqrt{3}(a - b)$ skonštruovať ako na obr. 16, kde $|AL| = a - b$, $|AL_1| = 1$, $|ML_1| = 2$ a $|AJ| = \sqrt{3}(a - b)$. Na obr. 16 je znázornená



kde S_2 je stred kružnice q_2 , ktorá aproximuje elipsu v okolí bodu C . Úsečku SH zostrojíme na základe podobnosti trojuholníkov $\triangle SHG_1$, $\triangle SFC$, $\triangle SKC$, kde $|SG_1| = (a - b)/2$, $|SE| = 1$, $|SK| = a + 2b$, $|SF| = (a + 2b)/b$. Vidíme, že modifikáciou známej konštrukcie zostrojíme ovál, ktorý pre potreby technickej praxe dostatočne presne aproximuje zadanú elipsu.

Pre zaujímavosť môžeme porovnať nami modifikovanú Guariniho konštrukciu s Meyerovou konštrukciou, ktorá využíva obe hyperoskulačné kružnice. Je zrejmé, že presnejšia bude Meyerova konštrukcia (pozri obr. 18) nakoľko sú využité obe hyperoskulačné kružnice (zelená farba) a pri modifikovanej Guariniho konštrukcii kružnica q_2 (modrá farba) nie je hyperoskulačnou kružnicou danej elipsy (červená farba). Bod T je dotykovým bodom kružníc pri Guariniho konštrukcii a body M , K sú dotykové body hyperoskulačných kružníc s tretím kružnicovým oblúkom pri Meyerovej konštrukcii.



Obr. 18. Porovnanie Meyerovej a modifikovanej Guariniho konštrukcie

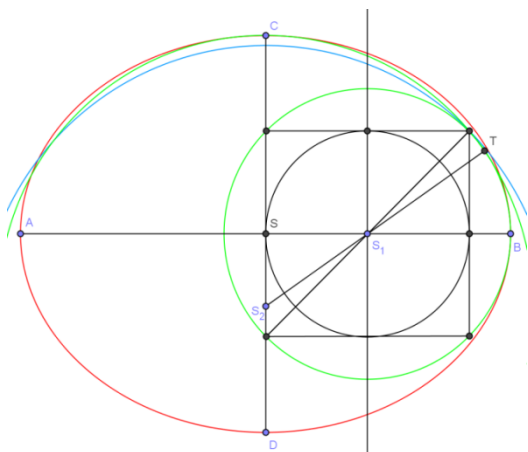
Môžeme modifikovať aj ďalšie Serlioove konštrukcie a ak zoberieme iný pomer a/b ako uvádza S. Serlio pri konštrukciách na obr. 7b) až 7d), tak tieto konštrukcie nemožno použiť na interpoláciu všetkých vrcholov danej elipsy. Preto sa ich pokúsime modifikovať tak, aby ovál prechádzal všetkými vrcholmi danej elipsy. Zoberme Serlioovu konštrukciu na obr. 7b). Vieme, že $h = a/(1+\sqrt{2})$ a na základe podmienky (1) je

$$r_1 = a - h = a(2 - \sqrt{2}).$$

Z podmienky (2) vyplýva, že

$$k = \frac{(a - b)(a + b - 2a(2 - \sqrt{2}))}{2(b - a(2 - \sqrt{2}))}.$$

Na obr. 19 je zakreslená elipsa s pomerom $a/b = 5/4$, kde kružnica modrej farby je vykreslená kružnica podľa pôvodnej Serlioovej konštrukcie a zelenú farbu má kružnica z našej modifikácie.

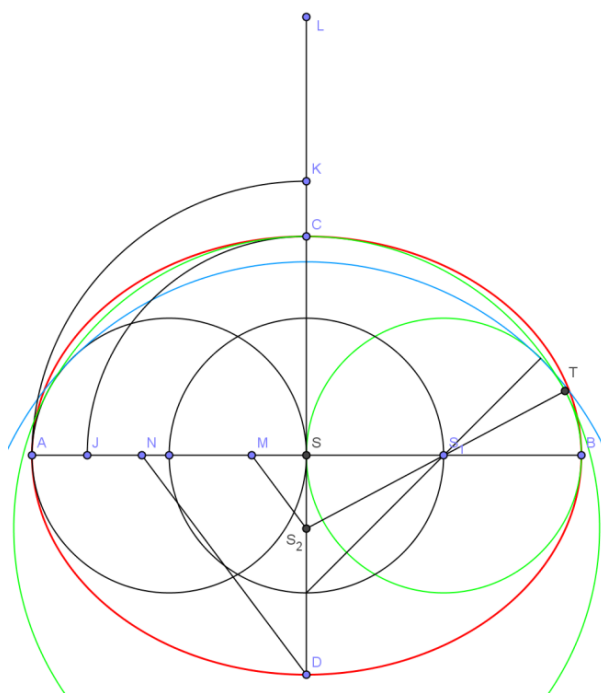


Obr. 19. Modifikácia Serliovej konštrukcie 7b)

Pre Serliovu konštrukciu na obr. 7c) je $h = r_1 = a/2$. Z (2) vyplýva, že

$$k = \frac{b(a-b)}{2b-a}$$

a úsečku tejto dĺžky v tomto prípade vieme celkom ľahko zostrojiť aj konštrukčne. Vieme zostrojiť dĺžky $a-b = |AJ| = |SM|$, $2b-a = |LK| = |SN|$. Z podobnosti trojuholníkov $\triangle NSD$, $\triangle MSS_2$ je zrejmé, že $|SS_2|/b = (a-b)/(2b-a)$, kde $k = |SS_2|$. Na obr. 20 (pomer a/b je $5/4$) je zelenou farbou zakreslená hľadaná kružnica a modrou farbou kružnica zostrojená podľa Serlia.

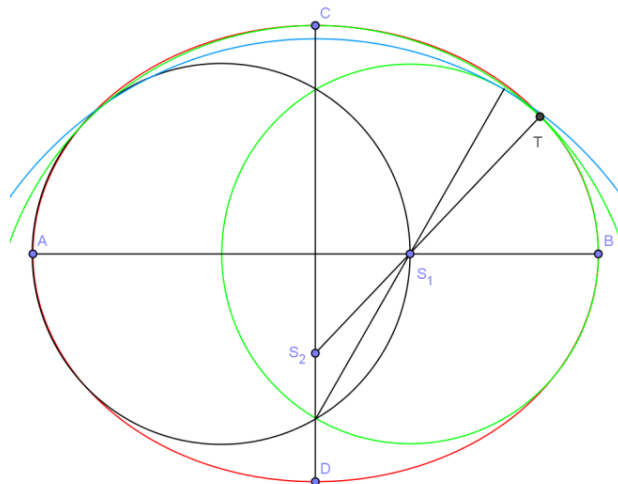


Obr. 20. Modifikácia Serliovej konštrukcie 7c)

Pre Serliovu konštrukciu na obr. 7d) vieme, že $h = a/3$, $r_1 = 2a/3$. Z podmienky (2) vyplýva, že

$$k = \frac{(a-b)}{2} \frac{(b-a/3)}{b-2a/3}.$$

Ak zoberieme elipsu, pre ktorú je $a = 5$, $b = 4$, tak $k = 7/4$. V obr. 21 je zelenou farbou zakreslená kružnica z modifikácie a modrou farbou z pôvodnej Serliovej konštrukcie.



Obr. 21. Modifikácia Serliovej konštrukcie 7d)

Geometrické základy konštrukčných prvkov v architektúre sú nepopierateľné. Rozdiel medzi oválmi prezentovanými v tomto článku a elipsou je minimálny. Preto si myslíme, že v technickej praxi sa na aproximáciu elipsy používali ovály, nakoľko pre ich konštrukciu je potrebné skonštruovať iba kružnice, ktoré sú krivky konštantnej krivosti na rozdiel od elipsy. Pre interpretáciu eliptického tvaru sú tieto konštrukcie podľa nášho názoru postačujúce a prakticky využiteľné.

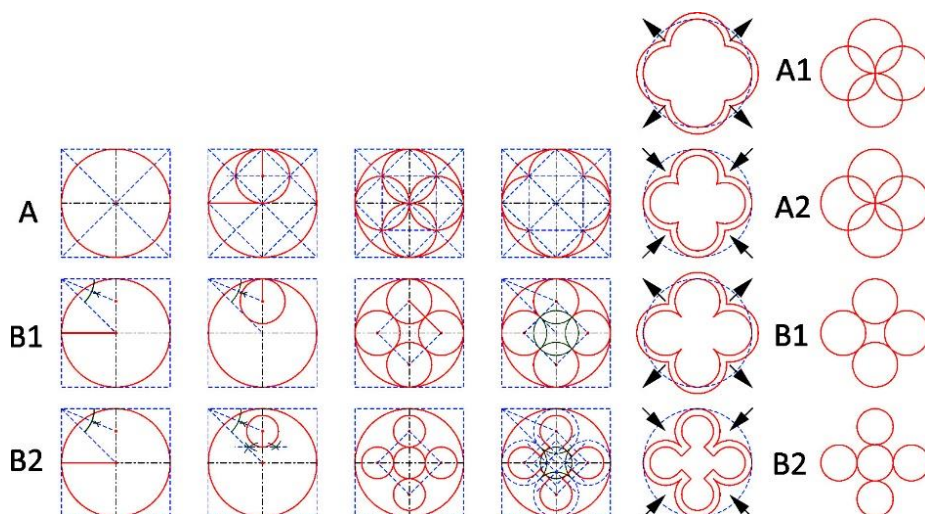
6 Konštrukcie štvorlístkov

Ako ďalší a zaujímavý tvar zostrojený využitím kružnice je tvar štvorlístka. Z geometrického hľadiska berieme ako základný útvar štvorec, do ktorého sú vhodne vpísané tvoriace kružnice tak, aby vznikol tvar štvorlístka súmerný podľa jedného stredu. Často sa stretávame s dvomi skupinami štvorlístkov. Prvú označíme ako typ A, kde základná kružnica c_1 s polomerom $r_1 = 1/2 |AB|$ je vpísaná do základného štvorca $ABCD$. Tvoriaca kružnica c_2 má stred na osi strán štvorca a polomer r_2 , pričom polomer r_2 sa rovná jednej štvrtine dĺžky strany základného štvorca $ABCD$, alebo polovici polomeru r_1 základnej kružnice, obr. 22. Na dotvorenie motívu štvorlístka môžeme zobrať sústredné kružnice buď ako vonkajšie kružnice a dostaneme typ A1, alebo vnútorné kružnice a dostaneme typ A2 motívu štvorlístka.

Druhý typ označujeme ako B, kde stredy definujúcich kružníc ležia na osiach strán základného štvorca $ABCD$ a na osi uhla strany základného štvorca $ABCD$ a jeho uhlopriečky, obr. 22.

Zo základných vlastností štvorca vyplýva, že pre typ A sú stredy tvoriacich kružníc c_2 vo vrchoch štvorca $EFGH$, ktorých vrcholy ležia na osiach strán základného štvorca $ABCD$ a dĺžka strany tohto štvorca sa rovná $1/4$ dĺžky uhlopriečky AC základného štvorca, obr. 23. Tvoriace kružnice sa pretínajú na uhlopriečkach základného štvorca $ABCD$. Tieto spoločné body určujú štvorec $KLMN$. Dĺžka KL sa rovná polovici dĺžky strany AB základného štvorca. Polomer sústredných kružníc označíme ako r_3 . Na základe konštrukcie a umiestnenia stredov sa aj tieto kružnice pretínajú na priamkach, ktoré obsahujú uhlopriečky základného štvorca $ABCD$.

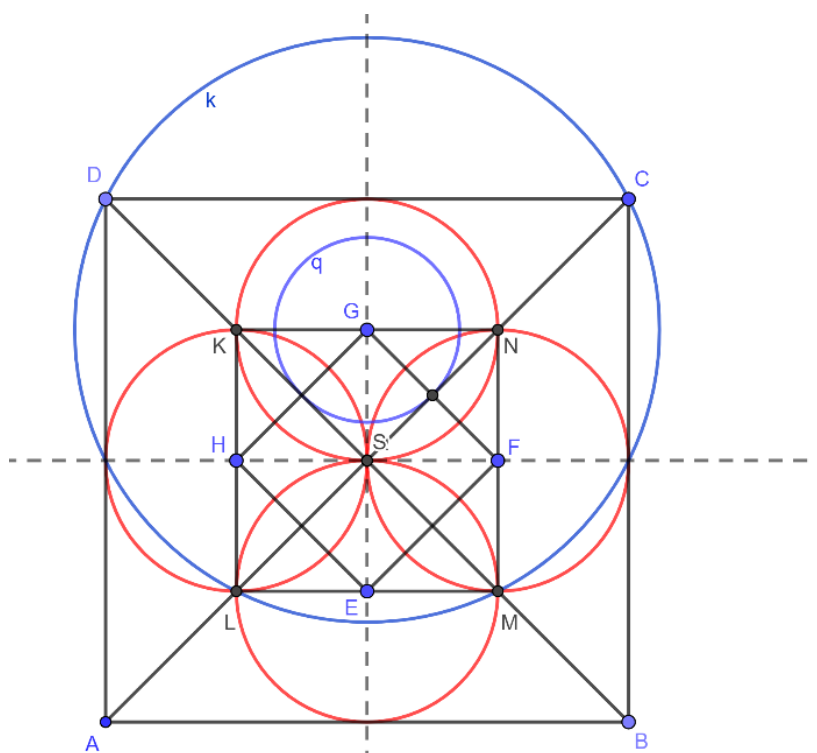
Pravdaže si musíme uvedomiť, že pre typ A2 je $r_2 > r_3$ a teda, aby tieto kružnice mali spoločné body, musí platiť $r_2 > r_3 \geq \sqrt{2}r_2/2$.



Obr. 22. Základné typy štvorlístkov, [8]

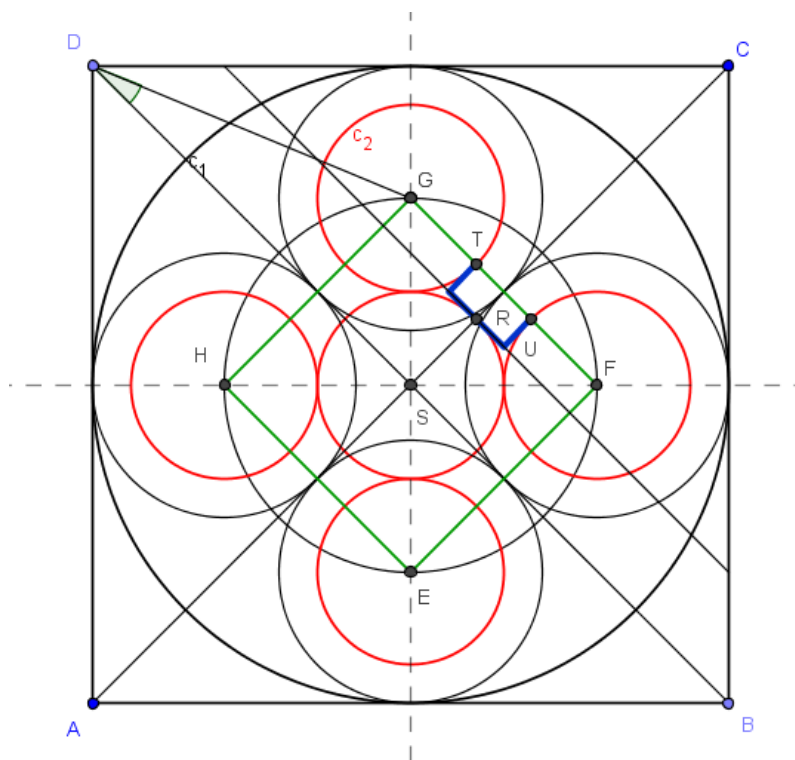
V prípade $r_3 = \sqrt{2}r_2/2$, sa tieto kružnice dotýkajú v priesečníkoch uhlopriečok základného štvorca $ABCD$ so stranami štvorca $EFGH$, čo spĺňa kružnica q .

Pre typ A1 platí, že $r_3 > r_2$. Veľkosť polomeru môžeme voľiť ľubovoľne, avšak v zmysle praktického využitia je to do veľkosti $r_3 = \sqrt{5} r_2$. Pri takto volenej veľkosti polomeru sústredných kružníc sa tieto pretínajú práve vo vrchole základného štvorca, čo spĺňa kružnica k na obr. 23.



Obr. 23. Štvorlístok typ A

Pre vytvorenie dojmu štvorlístka je potrebné prepojenie určujúcich kružníc s polomerom r_2 , obr. 25. To sa môže uskutočniť napríklad zostrojením dotyčníc týchto kružníc v priesečníkoch T a U týchto kružníc a strany štvorca $EFGH$ a dotyčnice v priesečníku R uhlopriečky základného štvorca s vnútornou tvoriacou kružnicou. Je zrejmé, že dotyčnice sú rovnobežné s príslušnou uhlopriečkou základného štvorca $ABCD$.



Obr. 25. Štvorlístok typ B2

Pre ohraničenie štvorlístka sa môžu zobrať napríklad body, v ktorých dotyčnica v bode R pretína určujúce kružnice. Avšak praktickejšie a ľahšie zostrojiteľné je zobrať priesečníky tejto dotyčnice s dotyčnicami v bodoch T a U a tak sa vytvorí obdĺžnik, ktorého jedna strana je dvojnásobkom druhej, pričom

$$|TU| = |EF| - 2r_2 = 2(r_3 - r_2) = (3\sqrt{2} - 4)r_1.$$

Literatúra

- [1] SERLIO, S., *Il primo [-secondo] libro d'architettura*. Venice, 1545. (italian) https://archive.org/details/gri_33125008448702.
- [2] GUARINI, G., GUJENOTTI, F., ABBIATI, G., *Architettura civile: opera postuma. Published 1737*. https://archive.org/details/gri_33125008641249.
- [3] ROSIN, P. L., On Serlio's constructions of ovals. In *The Mathematical Intelligencer*, 23(1), 2001, pp. 58-69. DOI: 10.1007/BF03024523.
- [4] GRÚŇOVÁ, Z., HOLEŠOVÁ, M., Ellipse and oval in baroque sacral architecture in Slovakia. In *Civil and environmental engineering*. Vol. 13, No. 1, 2017, pp. 30-41.

- [5] GRÚŇOVÁ, Z., HOLEŠOVÁ, M., Geometrical analysis of Palesch family chapel in Kľačno, former Gaidel in Western Slovakia. In *RSP 2017 – XXVI R-S-P Seminar 2017 Theoretical Foundation of Civil Engineering*, Vol. 117, No. 00060, 2017.
- [6] MEYER, F. S., *A Hand Book of Ornament*. Published 1896.
<https://archive.org/details/handbookofornament00meyeruoft>.
- [7] <https://mathworld.wolfram.com>
- [8] GRÚŇOVÁ, Z., HOLEŠOVÁ, M., Quatrefoil Motif in Slovakia – Gothic Roots of the Parametric Architecture, In *XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering* (RSP 2021), Springer International Publishing, Vol. 189, pp. 63-72
- [9] KOLÁŘOVÁ, D., Gothic Rose Window, In *Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics: 24th symposium on Computer Geometry SCG 2015*, 35th conference on geometry and graphics: Terchová, Žilina september 14-18, 2015, Plzeň: Vydavatelský servis, 2015, pp. 153-154.
- [10] HOLEŠOVÁ, M., Serlio's, Guarini's and Meyer's constructions of ovals in architecture. In *Proceedings, 17th conference on Applied mathematics, Aplimat 2018*, February 6-8, 2018, pp. 450-459.

RNDr. Michaela Holešová, PhD.

Katedra stavebnej mechaniky a aplikovanej matematiky
Stavebná fakulta, Žilinská univerzita v Žilina
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovenská republika
e-mail: michaela.holesova@uniza.sk

Hermann Minkowski a cesta k časoprostoru

Jakub Poruba, Věra Ferdiánová

Abstrakt

Německý matematik Hermann Minkowski byl významným matematikem 2. poloviny 19. století a počátku 20. století. Svou prací přispěl k rozvoji v oblastech neeuklidovské geometrie; k řešení problematiky teorie čísel a matematické fyziky a otázek teorie relativity využíval geometrické metody. Jako první vyslovuje myšlenku o jednotě prostoru času ve spojitosti s přeformulováním známé Einsteinovy speciální teorie relativity. Proto je na jeho počest pojmenován čtyřrozměrný prostor s nulovou křivostí. Cílem příspěvku je představit jak život Hermanna Minkowského, tak stručně uvést jeho příspěvek k teorii relativity ve spojitosti s jeho spolupracovníky.

Klíčová slova: Hermann Minkowski, David Hilbert, Albert Einstein, Göttingen, časoprostor, speciální teorie relativity, obecná teorie relativity

Abstract

Hermann Minkowski was an eminent German mathematician of 2nd half of the 19th Century and the beginning of the 20th Century. His work contributed to development in areas of non-Euclidean geometry; for solving problems within number theory and mathematical physics he used geometrical methods. He was the first one to propose the idea of space-time union upon the reformulation of well-known Einstein's special theory of relativity. Thus, the four-dimensional time-space with zero curvature is named in his honour. Aim of this article is to introduce Hermann Minkowski life and to give brief notes to his contribution to the theory of relativity in connection with his co-workers.

Keywords: Hermann Minkowski, David Hilbert, Albert Einstein, Göttingen, space-time, special theory of relativity, general theory of relativity

1 Životní cesta Hermanna Minkowského

Hermann Minkowski se narodil 22. června roku 1864 do rodiny německého obchodníka s obilím jako třetí syn rodičů Lewina a Rachel Minkowski (roz. Taubmann), kteří v té době pobývali ve městečku Alexotas (Aleksotas), jenž byla ten samý rok začleněna do polské části v rámci Ruského impéria. Zajímavostí je, že původní staré zákony i gregoriánský kalendář byl ponechán. V roce 1931 bylo předměstí začleněno jako městská část města Kaunas (dnešní Litva). Tím, že se Hermann Minkowski narodil v komplikované době, tak v některých zdrojích je uváděn jako polsko-litevský, německý, litevsko-německý či ruský matematik.

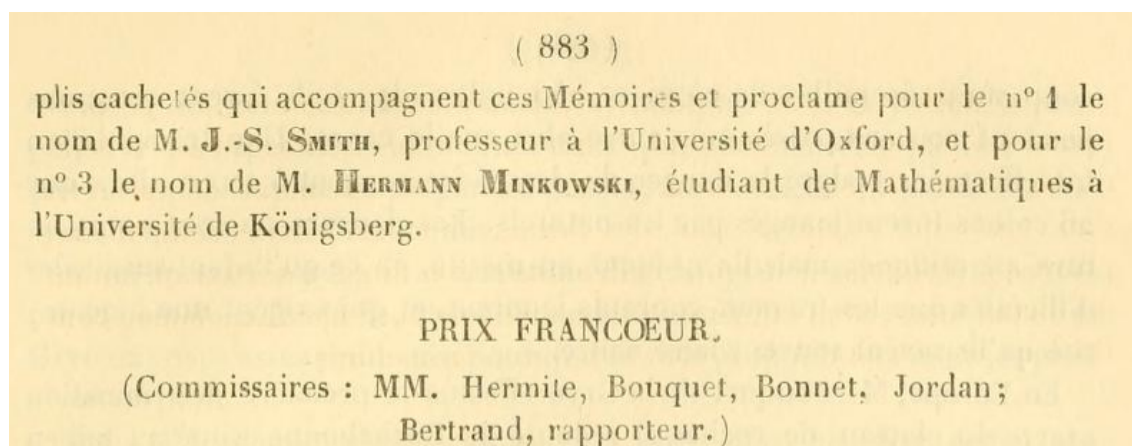
Minkowského rodiče byli významní a uznávaní obchodníci židovského původu, jež finančně dotovali stavbu Chórové synagogy v Kovně. Jeho starší bratr Max se vydal na obchodní dráhu a převzal rodinný podnik. Jeho druhý starší bratr Oskar se dal na lékařskou dráhu, přičemž



H. Minkowski

Obr. 1. Hermann Minkowski [15]

jeho výzkum přinesl významné poznatky ohledně diabetu. Dokonce za svůj život byl šestkrát nominován na Nobelovu cenu, [1]. Aby se rodina vyhnula carským pogromům a antisemitskému pronásledování, přestěhovala se v roce 1872 do Královce, kde Hermann následně nastoupil na gymnázium. Již na gymnáziu se projevil jeho matematický talent, kterého si povšiml H. Weber, přičemž o něm informoval v dopise pro Dedekinda. Vzhledem k tomu, že na gymnáziu měly přírodní vědy velkou prioritu, byl Hermann Minkowski uvolněn z části povinností, aby se mohl intenzivněji věnovat pojednání o teorii čísel. Dokonce Stettiner ho označil jako „antického vládce lekcí primy“, [2]. V dubnu 1880 nastupuje na univerzitu v Královci a následně studuje tři semestry v Berlíně (například zimní semestr 1882/83). Během studií se velmi spřátelil s kolegou Davidem Hilbertem. Minkowski se začal zajímat o kvadratické formy již na počátku



Obr. 2. Výstřižek textu popisu průběhu vyhlášení ceny Grand Prix za geometrii 2. dubna 1883 [3]

svých univerzitních studií. V roce 1881 pařížská Akademie věd oznámila, že Velká cena za matematickou vědu, která bude udělena v roce 1883, bude udělena za řešení problému počtu



Obr. 3. Minkowského náhrobek na hřbitově Heerstrasse, Berlín-Westend [16]

zobrazení celého čísla jako součtu pěti čtverců. Eisenstein v roce 1847 uvedl vzorec pro počet těchto zobrazení, ale nepodal důkaz výsledku. Ve skutečnosti Akademie věd zadala pro Grand Prix problém, který již byl vyřešen, neboť Henry Smith v roce 1867 publikoval náčrt důkazu. Při zadávání tématu ceny však Akademie věd o Smithově příspěvku nevěděla. Minkowski, ačkoli mu v té době bylo pouhých osmnáct let, zrekonstruoval Eisensteinovu teorii kvadratických forem a vytvořil krásné řešení problému Grand Prix. Smith přepracoval svůj dřívější důkaz, doplnil jej o podrobnosti a předložil jej Akademii. Dne 2. dubna 1883 prezident akademie vytáhl dvě zapečetěné obálky a za geometrii byl udělena cena společně mladému Minkowskému na začátku jeho kariéry a in memoriam Smithovi, jelikož ten 9. února 1883 zemřel, [3]. V roce 1885 získal Minkowski v Královci doktorát za práci s názvem *Untersuchungen über quadratische Formen, Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält*, jež navazovala na předchozí výzkum. Po udělení doktorátu pokračoval v Královci ve výzkumu

V roce 1887 se uchází o místo profesora na univerzitě v Bonnu a jak již bylo zvykem dle německých předpisů, musel ucházející nový člen předložit ústně originální práci. Minkowski přednesl přednášku na téma *Räumliche Anschauung und Minima positiver definiten quadratischer Formen*, kterou až v roce 1991 publikoval J. Schwermer.

Místo na univerzitě získává a v roce 1892 je povýšen na docenta. V roce 1894 se vrací do Královce, ale zde zůstává do doby jmenování na Eidgenössische Polytechnikum Zürich, kde se již nachází jeho kolega Hurwitz. S Hurwitzem ho pojilo přátelství z doby jeho studií, jelikož Hurwitz působil během jeho studií také právě v Královci. Při působení na univerzitě byl jeho studentem Einstein v několika kurzech, které vedl, a oba se později zajímali o podobné problémy teorie relativity. Minkowski se v roce 1897 ve Štrasburku oženil s Auguste Adlerovou, narodily



Obr. 4. David Hilbert [6]

se jim dvě dcery, Lily (1898) a Ruth (1902). Po narození mladší dcery Ruth se celá rodina stěhuje do Göttingenu. Místo na zdejší univerzitě mu zařídil jeho blízký přítel David Hilbert. Zajímavostí je, že jednou z jeho studentek byla i Emmy Noether jako hospitantka v zimním semestru 1903/04. V Göttingenu se začal zajímat o matematickou fyziku a získal si nadšení Hilberta a jeho spolupracovníků. V roce 1905 se zúčastnil semináře o teorii elektronů a seznámil se s nejnovějšími výsledky a teoriemi v elektrodynamice. Minkowski vytvořil nový pohled na prostor a čas a položil matematické základy teorie relativity. V roce 1907 si Minkowski uvědomil, že Lorentzovu a Einsteinovu práci lze nejlépe pochopit v neeuklidovském prostoru. Prostor a čas, které byly dříve považovány za nezávislé, považoval za propojené ve čtyřrozměrném „časoprostorovém kontinuu.“ Mezi hlavní práce můžeme zařadit *Raum und Zeit* (1907) a *Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik* (1909). Bohužel ve svých 44 letech předčasně umírá na zánětlivé slepé střevo, [4, 5].

2 David Hilbert

David Hilbert je považován za jednoho z nejvlivnějších matematiků přelomu 19. a 20. století a s Minkowským jej pojilo dlouhodobé přátelství. Narodil se v roce 1862 v pruském Královci do rodiny, z níž pocházelo mnoho fyziků a soudců. Zemřel v roce 1943 po komplikované zloměnině stehenní kosti. Se zdravotními komplikacemi se však potýkal již od roku 1925, kdy se u něj projevila zhoubná chudokrvnost, která významně ovlivnila konec jeho kariéry. Díky přelomové jaterní léčbě G. R. Minota však tuto nemoc přežil.

Vystudoval a počátek své kariéry spojil se svým „rodným“ Královcem, kde v roce 1884 obdržel doktorský titul a o dva roky později se stal soukromým docentem. V roce 1892 získal mimořádnou profesuru a o rok později profesuru. Lze říci, že v otázkách matematického směřování jej zpočátku ovlivnil Heinrich Weber díky jeho širokému záběru od teorie polynomů po matematickou fyziku. Nejvíce byl však ovlivněn svým učitelem Adolfem Hurwitzem a právě Minkowským. Hilbert se v Göttingenu objevil již v roce 1895 na pozvání německého matematika Felixe Kleina (jehož zaměřením byla zejm. neeukleidovská geometrie, teorie grup a funkcí). Kleinovým cílem

totiž bylo vytvořit z Göttingenu světové centrum matematického vědění a vědy vůbec a díky vynikajícím vztahům s vedoucím univerzitní sekce pruského ministerstva školství Friedrichem Althoffem se mu podařilo získat právě Hilberta. Hilbertovo setrvání zde však nebylo jisté, neboť mu neustále chodily nabídky z jiných univerzit. V roce 1902 na popud jedné nabídky pak Hilbert s Kleinem Althoffa přesvědčili, aby v Göttingenu vytvořil třetí profesorský post - právě pro Hermanna Minkowského, což byl naprosto bezprecedentní krok (po Minkowského smrti toto místo získal Edmund Landau). Nakonec zde zůstal po celý zbytek kariéry (do důchodu odešel v roce 1930; dva roky před tím se stal členem Královské společnosti). Göttingen se centrem matematického vědění na dlouho ale nestal, v roce 1933 tento Kleinův (a jiných) sen rozprášili nacisté.



Obr. 5. Minkowski a Hilbert na fotografii kolem roku 1905 [4]

Hilbertův vliv v matematice lze nalézt téměř v každé oblasti. Za důležitou také považoval jednotnost matematiky ve smyslu, že správný matematik by se měl orientovat ve všech oblastech matematiky, neboť tvrdil, že matematika je nedělitelný organismus, jehož schopnost přežití je ovlivněna propojením jeho částí. Největší úspěchy Hilberta spočívají v následujících oblastech - na přelomu 80. a 90. let 19. století dokázal konečnost teorie invariantů pro plně projektivní grupy. V letech 1892-1898 se věnoval teorii číselných těles - v roce 1897 vydal zásadní dílo *Theorie der algebraischen Zahlkörper*. Přelom století je spojen se základy geometrie a myšlenkou axiomatiky, které vedly zejména k formalizaci geometrických konceptů na základě italských geometrů - zavádí kompletní axiomatický systém geometrie založený na implicitních definicích geometrických objektů a vztazích, ne na popisu jejich intuitivního obsahu; to vše s požadavkem na konzistentnost, nezávislost a úplnost - *Grundlagen der Geometrie*. Na konci matematické kariéry (od roku 1922) se také systematicky zabývá systematizací logiky (což položilo základ

čistě symbolické matematice). Kolem roku 1909 se zabýval integrálními rovnicemi, což položilo základ funkcionální analýzy 20. století a ve spojitosti s teoretickou fyzikou ve svých dílech od roku 1912 je významným milníkem definování tzv. Hilbertových prostorů, tedy prostorů s nekonečným počtem rozměrů, což položilo významný základ v rozvoji zejm. kvantové mechaniky, [7, 8, 9, 10, 11].

3 Vzájemný vliv Hilberta a Minkowského

Jak Hilbertův, tak Minkowského hlavní zájem výzkumu ležel zejména v „čisté“ matematice, přesto jim však nebyl cizí zájem o tehdejší aktuální dění v oblasti fyziky. U Minkowského je to zřejmé již během jeho působení v Bonnu (v letech 1885 - 1894) a je zde úzce spojeno s jeho setkáním s Heinrichem Hertzem - v roce 1888 publikuje příspěvek týkající se hydrodynamiky. Další jeho zájem je zřejmý právě z korespondence mezi ním a Hilbertem, z níž je možno vyčíst zájem o matematickou fyziku, zejm. termodynamiku. Během svého působení v Göttingenu se intenzivně věnoval elektrodynamice. Nebylo to však jeho jediné zaměření, byl pověřen k sepsání příspěvku ohledně kapilarity pro fyzikální vydání encyklopedie *Encyclopidie der mathematischen Wissenschaften* (na toto téma také přednášel během několika setkání göttingenské matematické společnosti). Hilbert, zřejmě pod vlivem Minkowského, se věnoval téměř každému aktuálnímu fyzikálnímu tématu (která také přednášel) a teoretické fyzice. V rámci problematiky základů geometrie již v letech 1894 až 1899 rozpracoval svou axiomatizaci fyziky. Byl totiž přesvědčen, že fyzici řeší neshody mezi existujícími teoriemi a nově objevenými skutečnostmi tak, že stvoří novou hypotézu, aniž by prozkoumali, zda tato nová hypotéza odpovídá logické struktuře již existujících teorií. V mnoha případech to podle něj vedlo ke sporům, které by mohly být právě řešitelné s pomocí axiomatizace (což se snažil ukázat v roce 1905 v rámci přednášek na téma logických principů matematiky právě na vybraných teoriích z oblasti mechaniky, termodynamiky, kinetické teorie látek atp.). Požadavek na axiomatizaci fyziky však lze nalézt již v roce 1900, kdy v rámci příspěvku na mezinárodním matematickém kongresu v Paříži se snaží předložit jakousi „sondu“ nejbližší budoucnosti matematiky a zmiňuje 23 aktuálních neřešených problémů nového století. Je však nutno podotknout, že axiomatizace fyziky patří k dodnes nevyřešeným problémům. Po příjezdu do Göttingenu se Minkowski ponořil do všech Hilbertových aktivit, včetně jeho ideje o axiomatizaci fyziky. Hnací silou jejich zájmu o fyziku byla také skutečnost, že věřili v určitý předem daný soulad mezi fyzikou a matematikou (tyto explicitní stopy lze nalézt v mnoha jejich přednáškách, navíc tato idea měla hluboké kořeny mezi německými vědci) a také skutečnost, že fyzika je příliš obtížná na to, aby se jí věnovali pouze fyzikové (a tudíž matematika by mohla být klíčem k odhalení tajemství přírody), [8, 9, 10, 11].

4 Minkowského časoprostor

Po třech letech působení Minkowského v Göttingenu byly Hilbertem a ostatními profesory organizovány pokročilé semináře týkající se aktuálních pokroků ohledně teorie elektronů, kde v roce 1907 Hilbert a Minkowski přednesli společnou přednášku týkající se rovnic v elektrodynamice - Maxwellovy rovnice. Od tohoto roku věnoval Minkowski veškerý vědecký zájem právě studiu těchto rovnic a také teorii relativity (resp. speciální teorii relativity).

Speciální teorie relativity má základ již v roce 1895, kdy francouzský fyzik Henry Poincaré poprvé ve filozofickém žurnálu publikuje příspěvek na téma měření času, v němž vysvětluje

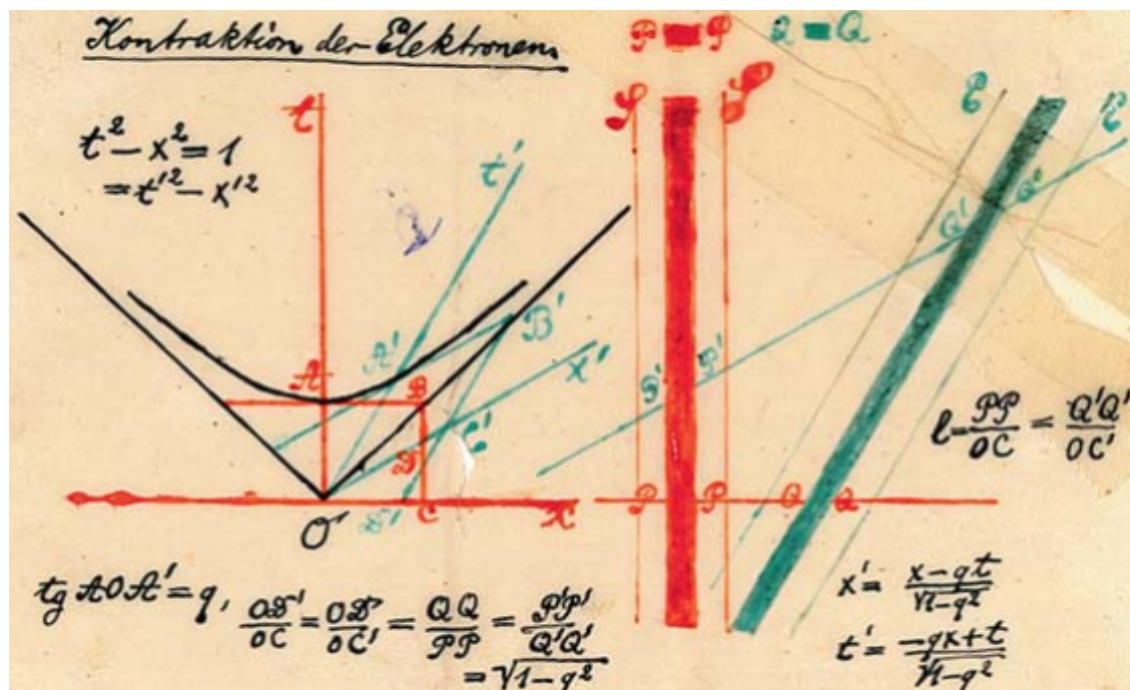
skutečnost, že Galileův a Newtonův absolutní prostor a čas nemají empirické definice, ale jsou závislé na konvenci ohledně „sladění“ času. Jedinou možností, jak se vyhnout této skutečnosti je stanovit nezávislost přírodních zákonů na prostoru (resp. prostorových souřadnicových systémech užívaných k popisu jevů). Protože se jednalo o článek do žurnálu filozofického, byl oproštěn o matematický aparát, krom rovnice $E = mc^2$. V roce 1900 pak v matematickém článku *Lorentz theory and principle of equality of action and reaction* Poincaré detailně na základě svých prací o elektrodynamice a relativistické mechanice pomocí vzorců jasně formuluje vztah teorie relativity v podobě formule $E = mc^2$.

Poincaré byl v kontaktu s Minkowským a Minkowského žákem byl právě Albert Einstein - tomu Minkowski doporučil ke studiu právě Poincarého práci. V roce 1905 pak Einstein publikuje své dílo ohledně speciální teorie relativity. Ačkoliv Einsteinova práce byla k posouzení Poincarému poslána, a ten musel určitou shodu rozpoznat, až ve 40. letech 20. století Einstein přiznává inspiraci Poincarém.

Minkowski vydává první dílo týkající se teorie relativity v roce 1908 - *On the principle of relativity in electrodynamics: a new form of the equations of electrodynamics* na základě vztahů mezi grupami definovanými Lorentzovými a Galileovými transformacemi. Na podzim předěšlého roku však píše Einsteinovi s žádostí o poskytnutí jeho prvního příspěvku ohledně speciální teorie relativity, neboť na základě svých přednášek ohledně tepelného záření, kde se odkazuje na Planckovy příspěvky k základům relativistické termodynamiky, kde mj. Planck ocenil obecný přístup k teorii relativity, musel jistě přijít na podstané důsledky teorie relativity nejen pro termodynamiku, ale pro fyziku jako takovou.

V září roku 1908 ve svém příspěvku *Raum und Zeit*, který přednesl na konferenci Německé asociace pro přírodní vědy a fyziku v Kolíně nad Rýnem, což je nejznámější Minkowského dílo týkající se teorie relativity a nového konceptu časoprostoru s ní spojeného. Minkowski totiž tvrdí, že s ohledem na určité okolnosti vyžadují, aby vědci zavrhlí pohled na fyzikální prostor jako trojrozměrný euklidovský, ale dívali se na něj jako prostor neeuklidovský čtyřrozměrný charakteristický invariancí určité kvadratické formy. Proto přeformuloval Einsteinovu speciální teorii relativity ve prospěch čtyřrozměrné časoprostorové variety, což vedlo ke zjednodušení odvození teorie na základě lineární ortogonální transformace založené na Lorentzově invarianci kvadratické formy $x^2 + y^2 + z^2 + c^2t^2$, kde x, y, z jsou pravoúhlé prostorové souřadnice, t je čas a c je rychlost světla ve vakuu.

Význam Minkowského tvrzení se rychle uchytil mezi ostatními fyziky jako byli například Max von Laue a Arnold Sommerfeld. Sommerfeld měl ideově blízko ke göttingenské škole a v roce 1910 ve svých článcích rozvinul Minkowského ideje. Tyto články pak sloužily jako základ pro další fyziky. Laue v roce 1911 vydal příspěvek týkající se speciální teorie relativity; jeho přístup byl mnohem sofistikovanější a v mnohém překonal původní Einsteinovy poznámky. Naopak Einstein považoval přeformulování své teorie za nadbytečný krok a tvrdil, že ve chvíli, kdy se matematika vrhla na teorii relativity, sám ji už nerozumí. Svým směřováním k obecné teorii relativity však musel postupně Minkowskému zásluhu na přeformulaci přiznat, neboť invariantnost elementů přímky Minkowského časoprostoru se z pohledu infinitezimální hodnoty ukázala být základem pro zakřivený časoprostor obecné teorie relativity a spojujícím prvkem mezi strukturou časoprostoru a gravitačními potenciály - $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2$. Další rozvinutí obecné teorie relativity je pak zásluhou právě Einsteina, ačkoliv podíl na ní má také Felix Klein a Emmy Noether, [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].



Obr. 6. Průsvitka z Minkowského přednášky *Raum und Zeit* z roku 1908 [4]

5 Závěr

Prostor sám a čas jsou napříště odsouzeny ke zmizení do pouhých stínů, a pouze spojené obou si zachová skutečně nezávislou existenci. [17]

Tímto Minkowského citátem by se dalo filosoficky shrnout gró jeho práce týkající se matematické fyziky a teorií relativity. Bez jeho práce by teorie relativity v podobě, v jaké je známe dnes, nemohly být vysloveny. Časoprostorové variety stejně jako čtyřvektorový jazyk se staly neoddělitelnými součástmi další práce Lorentze, Poincarého, Einsteina, Hilberta a dalších. Ačkoliv jeho snaha (spojená se snahou Hilbertovou) o určité reformě fyziky s ohledem na provádění systematizace poznatků nebyla široce přijata, a to z důvodu gravitace, která této axiomatizaci byla značnou překážkou, základy pro určitou formalizaci fyziky tím položeny byly, [11]. Svým dílem *Raum und Zeit* de facto završil svou vědeckou kariéru a nebýt jeho předčasného úmrtí, můžeme se domnívat, že by svět matematiky obohatil o široké spektrum nových poznatků a skutečností.

Poděkování

Článek byl podpořen z projektu SGS01/PřF/2020-2021 Podpora vědecké činnosti studentů v dílčích oblastech matematiky.

Literatura

- [1] LUFT, R. Oskar Minkowski. Discovery of the pancreatic origin of diabetes. 1889. [online]. [cit. 2021-12-05]. In *Diabetologia* (1989) 32:399-401. Dostupné z: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00271257.pdf>
- [2] STROBL, W. Aus den wissenschaftlichen Anfängen Hermann Minkowski. In *Historia Mathematica*. Volume 12, Issue 2, May 1985, p. 142-156.
- [3] De L'Académie des Sciences. In *Comptes Rendus*. Vol. XCIV, p. 330, April 2th, 1883. Dostupné z: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/28062/page/9/mode/1up>
- [4] ROWE, D. E. A Look Back at Hermann Minkowski's Cologne Lecture "Raum und Zeit". In *The Mathematical Intelligencer*. Volume 31, Number 2 (2009).
- [5] MINKOWSKI, H. Space and Time Minkowski's Papers on Relativity. In: Petkov, V., Ed., Minkowski Institute Press, Moscau 2012. Dostupné z: <http://rgs.vniims.ru/books/spacetime.pdf>
- [6] *David Hilbert: německý matematik*. Gymnázium Louny. [online] [cit. 2021-20-21]. Dostupné z: [https://www.glouny.cz/matematika/mat sem/priklady/hilbert.htm](https://www.glouny.cz/matematika/mat%20sem/priklady/hilbert.htm)
- [7] CHISLENKO, E. *The Development of Mathematics in Göttingen*. Göttingen library project. [online]. [cit. 2021-12-12]. Dostupné z: <https://www.uni-math.gwdg.de/en/burmann.xhtml>
- [8] CORY, L. The influence of David Hilbert and Hermann Minkowski on Einstein's views over the interrelation between physics and mathematics. In *Endeavour* 22 (1998): 95-97. [online]. [cit. 2021-12-10]. Dostupné z: <https://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/endeavour.pdf>
- [9] WEYL, H. David Hilbert 1862-1943. 1944. [online]. [cit. 2021-12-12]. In *Obit. Not. Fell. R. Soc.* Vol. 4, issue 13, p. 547-553. Dostupné z: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsbm.1944.0006>
- [10] SCOTT, A., W. Minkowski, Mathematicians, and the Mathematical Theory of Relativity. In H. Goenner, J. Renn, J. Ritter, T. Sauer (eds.), *The Expanding Worlds of General Relativity*. Einstein Studies, volume 7, pp. 45-86. Boston/Basel: Birkhäuser, 1999.
- [11] CORY, L., Hermann Minkowski and the Postulate of Relativity. [online]. [cit. 2021-12-12]. In *Arch. Hist. Exact Sci.* 51, 273-314 (1997). Dostupné z: <https://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/mink.pdf>
- [12] SCOTT, W. The Historical Origins of Spacetime. In Abhay Ashtekar, V. Petkov. *The Springer Handbook of Spacetime*, Springer, pp.27-38, 2014.
- [13] ARNOLD, V. Forgotten and neglected theories of Poincaré. 2006. In *Russian Mathematical Surveys - RUSS MATH SURVEY-ENGL TR.* 61, p. 1-18.
- [14] LOGUNOV, A. *Henri Poincare and Relativity Theory*. 2004. Nauka. 978-5020339644.
- [15] JOHN. Minkowski Spacetime. In *The Computus Engine*. [cit. 2021-12-12]. Dostupné z: <http://www.computus.org/journal/minkowski-spacetime/>
- [16] MAURUSZAT, A. *Ehrengab von Hermann Minkowski und Oskar Minkowski auf dem Friedhof Heerstraße, Abt. 3 A Nr. 30. Trakehner Allee 1, Berlin-Westend*. [online]. [cit. 2021-12-10]. Obrázek dostupný pod licencií Creative Commons Wikipedia. Dostupné z: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Grab Hermann und Oskar Minkowski.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Grab_Hermann_und_Oskar_Minkowski.jpg)

- [17] Hermann Minkowski citáty. In *Citáty slavných osobností*. [online]. [cit. 2021-12-20]. Dostupné z <https://citaty.net/autori/hermann-minkowski/>

Mgr. Bc. Jakub Poruba

Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
30. dubna 22, 701 03 Ostrava
e-mail: jakub.poruba@osu.cz

Mgr. Věra Ferdiánová, Ph.D.

Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
30. dubna 22, 701 03 Ostrava
e-mail: vera.ferdianova@osu.cz

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective
to stimulate scientific research and teaching methodology
in the fields of geometry and computer graphics
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

SSGG

Institute of Mathematics and Physics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Abstracts

J. Čižmár: Edition of the translation of Euclid: The Elements is being prepared

The first complete translation of the Euclid's *Elements* into Slovak offers an opportunity to reflect newly the significance of this work in the school practice, especially in the writing textbooks as well as in the teaching elementary geometry in the higher forms of the grammar schools. A relatively profound acquaintance with the essence of the axiomatic-deductive method in the elementary geometry is a very desirable knowledge of every well-educated person nowadays.

M. Holešová: Interesting construction elements generated using circles

Various interesting shapes are used in architecture. Due to the condition of simplicity of technical design they are usually formed from basic geometric elements such as a line and a circle. The circle is also a basic determining element for ovals or four-leaf clover, which are often used to create non-traditional floor plans, openings and decorative elements of period buildings. In this article we deal with known constructions of ovals as well as their modifications and constructions of some types of Quatrefoils.

J. Poruba, V. Ferdiánová: Hermann Minkowski and the way to time-space

Hermann Minkowski was an eminent German mathematician of 2nd half of the 19th Century and the beginning of the 20th Century. His work contributed to development in areas of non-Euclidean geometry; for solving problems within number theory and mathematical physics he used geometrical methods. He was the first one to propose the idea of space-time union upon the reformulation of well-known Einstein's special theory of relativity. Thus, the four-dimensional time-space with zero curvature is named in his honour. Aim of this article is to introduce Hermann Minkowski life and to give brief notes to his contribution to the theory of relativity in connection with his co-workers.

Edited by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

Editor-in-Chief:

Daniela Velichová

Managing Editors:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Editorial Board:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsáblová

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics

IČO: 31 816 304

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

Frequency:

One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

G is cited in: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG December 2021, Bratislava

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific

www.ssgg.sk