



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU  
ročník 19, číslo 37, 2022  
ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

**SSGG****Vedúca redaktorka:**

Daniela Velichová

**Výkonné redaktorky:**

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

**Redakčná rada:**

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsálová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

**Redakcia:** Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

IČO: 31 816 304

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

**Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:**

Redakcia G - SSGG

ÚMF SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

ssgg@ssgg.sk

**Periodicita:** Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.

Evidenčné číslo EV 3228/09

**Informácie a pokyny pre autorov na adresu:** [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)**Tlačí:** ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.**Časopis G je citovaný v:** Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG jún 2022, Bratislava

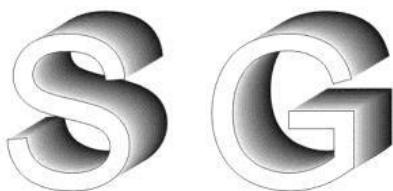
Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovať, ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkol'vek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.



## Obsah – Contents

On homogeneous 3-geometries, balls and their optimal arrangements, especially in <b>Nil</b> and <b>Sol</b> spaces	5
O homogénnych geometriách trojrozmerného priestoru, guliach a ich optimálnom usporiadaní špeciálne v <b>Nil</b> a <b>Sol</b> priestoroch	
Emil Molnár, Jenö Szirmai	
Objavia sa Euklidove <i>Základy</i> (konečne v slovenčine) na knižničnom trhu v roku 2022?	33
Will Euclid's <i>Elements</i> appear (finally in Slovak language) at the book market in the year 2022?	
Zita Sklenáriková	
Využitie dynamickej geometrie transformačným spôsobom	41
On utilisation of dynamic geometry in transformation mode	
Jana Trgalová	

# **SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ**



## **PRE GEOMETRIU A GRAFIKU**

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo. Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

---

Spoločnosť SSGG  
Ústav matematiky a fyziky  
Strojnícka fakulta STU v Bratislave  
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR  
e-mail: [ssgg@ssgg.sk](mailto:ssgg@ssgg.sk), URL: [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

# On homogeneous 3-geometries, balls and their optimal arrangements, especially in Nil and Sol spaces

Emil Molnár, Jenő Szirmai

## Abstrakt

János Bolyai a – nezávisle v tom istom čase (v rokoch 1823-1840) – Nikolaj I. Lobačevskij objavili hyperbolickú geometriu, ktorá umožnila rozvoj mnohých oblastí matematiky, fyziky a celej vedy. Dnes poznáme 8 homogénnych geometrií priestoru (nazývaných aj Thurstonove geometrie, pozri Tab. 1) vhodné tiež na opis nášho priestoru a materiálnych štruktúr. V zmysle teórie Felixa Kleina, projektívna geometria nám poskytuje jednotiacu metódu na modelovanie a vizualizáciu týchto geometrií, ktorú rozpracoval prvý autor článku. Druhý autor tieto úvahy rozšíril na opis extremálnych problémov tkzv. diskrétnych geometrií v zmysle Lászla Fejesiho Tótha. Ako ilustráciu v tomto článku rozoberieme detailne Nil a Sol geometrie. Prvá má blízko k euklidovskému priestoru, druhá zvláštna geometria Sol priestoru má isté analógie s Lorentzovým-Minkowského časopriestorom.

**Kľúčové slová:** Thurstonova geometria, Nil geometria, Sol geometria, optimálne rozmiestnenie gúľ

## Abstract

János BOLYAI and – independently, in the same time (about 1823-1840) – Nikolay I. LOBACHEVSKY discovered the so-called hyperbolic geometry that opened new development in many fields of Mathematics, Physics and the whole science. Nowadays we know 8 homogeneous 3-geometries (called also THURSTON geometries, see Table 1) applicable also for describing our surrounding space and material structures. In the sense of Felix KLEIN, projective geometry provides us with a unified method to model and visualize these geometries, initiated by the first author. The second author extended these for describing extremal problems of so-called discrete geometry in the sense of László FEJES TÓTH. As illustration we discuss here Nil and Sol geometry in more details. The first one is near the Euclidean space, the second strange Sol space has some analogies with the LORENTZ-MINKOWSKI space-time.

**Keywords:** Thurston geometries, Nil geometry, Sol geometry, optimal ball packing

*Dedicated to Memory of János Bolyai  
on the 220th Anniversary of His Birth*

## 1 The projective sphere and plane modelled in Euclidean 3-space

All the Thurston 3-geometries will be uniformly modelled in the *projective spherical space*  $\mathcal{PS}^3$  that can be embedded into the affine so into the *Euclidean 4-space*. Our main tool will be a 4-dimensional vector space  $\mathbf{V}^4$  over the real numbers  $\mathbf{R}$  with basis  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , which is not assumed to be orthonormal.

Our goal will be to introduce *convenient additional structures* on  $\mathbf{V}^4$  and on its dual  $\mathbf{V}_4$ .

The method will be illustrated and visualized first in dimensions 2 (Fig. 1) where  $\mathbf{V}^3$  is the embedding real vector space with its affine picture  $\mathcal{A}(O, \mathbf{V}^3, \mathbf{V}_3)$ , so in  $\mathbf{E}^3$ . Let  $\{O; \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , be a *coordinate system* in the affine 3-space  $\mathcal{A}^3 = \mathbf{E}^3$  with origin  $O$  and a vector basis  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , for  $\mathbf{V}^3$ , where our affine model plane  $\mathcal{A}^2 = \mathbf{E}^2 \subset \mathcal{P}^2 = \mathcal{A}^2 \cup (\mathbf{i})$  is placed to the point  $E_0(\mathbf{e}_0)$  with equation  $x^0 = 1$ . Here any non-zero vector  $\mathbf{x} = x^0\mathbf{e}_0 + x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 =: x^i\mathbf{e}_i$  (the index convention of Einstein-Schouten will be used) represents a point  $X(\mathbf{x})$  of  $\mathcal{A}^2$ , but also a point of the *projective sphere*  $\mathcal{PS}^2$  after having introduced the following *positive equivalence*. For non-zero vectors

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \sim c\mathbf{x} \text{ with } 0 < c \in \mathbf{R} \text{ represent the same point } X = (\mathbf{x} \sim c\mathbf{x}) \text{ of } \mathcal{PS}^2; \\ \mathbf{z} \sim 0\mathbf{e}_0 + z^1\mathbf{e}_1 + z^2\mathbf{e}_2 \text{ will be an ideal point } (\mathbf{z}) \text{ of } \mathcal{PS}^2 \text{ to } \mathcal{A}^2.\end{aligned}\tag{1.1}$$

We write:  $(\mathbf{z}) \in (\mathbf{i})$ , where  $(\mathbf{i})$  is the ideal line (circle) to  $\mathcal{A}^2$ , extending the affine plane  $\mathcal{A}^2$  into the projective sphere  $\mathcal{PS}^2$ . Here  $(\mathbf{z})$  and  $(-\mathbf{z})$ , and in general  $(\mathbf{x})$  and  $(-\mathbf{x})$ , are opposite points of  $\mathcal{PS}^2$ . Then *identification* of the opposite point pairs of  $\mathcal{PS}^2$  leads to the projective plane  $\mathcal{P}^2$ . Thus the embedding  $\mathcal{A}^2 = \mathbf{E}^2 \subset \mathcal{P}^2 \subset \mathcal{PS}^2$  can be formulated in the vector space  $\mathbf{V}^3$  in a unified way. We can present  $\mathcal{PS}^2$  in Fig. 1 also as a usual sphere (of arbitrary radius) and think of the *celestial sphere* as the map of stars of the *Universe*. The equator ( $x^0 = 0$ ) represents the ideal points to  $\mathcal{A}^2$ , as ideal line (circle). The *upper half-sphere* describes  $\mathcal{A}^2 = \mathbf{E}^2$  with  $x^0 = 1$ . We also see how the *double affine plane* describes  $\mathcal{PS}^2$ , as the opposite direction in the abstraction (see also the lower plane  $x^0 = -1$  in Fig. 1).

**Remark 1.1.** The above 3-dimensional embedding of the Euclidean, or the more general affine plane, to characterize the ideal (infinite) points as well, comes from the previous practical perspective. But there are some surprising facts in the history of projective geometry which show that a 2-dimensional plane cannot always embed into a 3-dimensional space. This topic, on the role of Desargues theorem (axiom) in the 2-dimensional affine-projective geometry, illustrate also the barrier of visuality in geometry and in mathematics, in general. We do not mention more details in this paper.

The dual (form) space  $\mathbf{V}_3$  to  $\mathbf{V}^3$  is defined as the set of *real valued linear functionals* or forms on  $\mathbf{V}^3$ . That means that we pose the following requirements for any form  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_3$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} : \mathbf{V}^3 \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{u} \in \mathbf{R} \text{ with linearity} \\ (a\mathbf{x} + b\mathbf{y})\mathbf{u} = a(\mathbf{x}\mathbf{u}) + b(\mathbf{y}\mathbf{u}) \text{ for any } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^3 \text{ and for any } a, b \in \mathbf{R}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

**We emphasize our convention.** *The vector coefficients are written from the left, then linear forms act on vectors on the right (as an easy associativity law, analogous conventions will be applied also later on).*

This "built in" linear structure allows us to define the addition  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  of two linear forms  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , and the multiplication  $\mathbf{u}\mathbf{c}$  of a linear form  $\mathbf{u}$  by a real factor  $c$ , both resulting in linear forms of  $\mathbf{V}_3$ . Moreover, we can define for any basis  $\{\mathbf{e}_i\}$  in  $\mathbf{V}^3$  the *dual basis*  $\{\mathbf{e}^j\}$  in  $\mathbf{V}_3$  by the Kronecker symbol  $\delta_i^j$ :

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2.\tag{1.3}$$

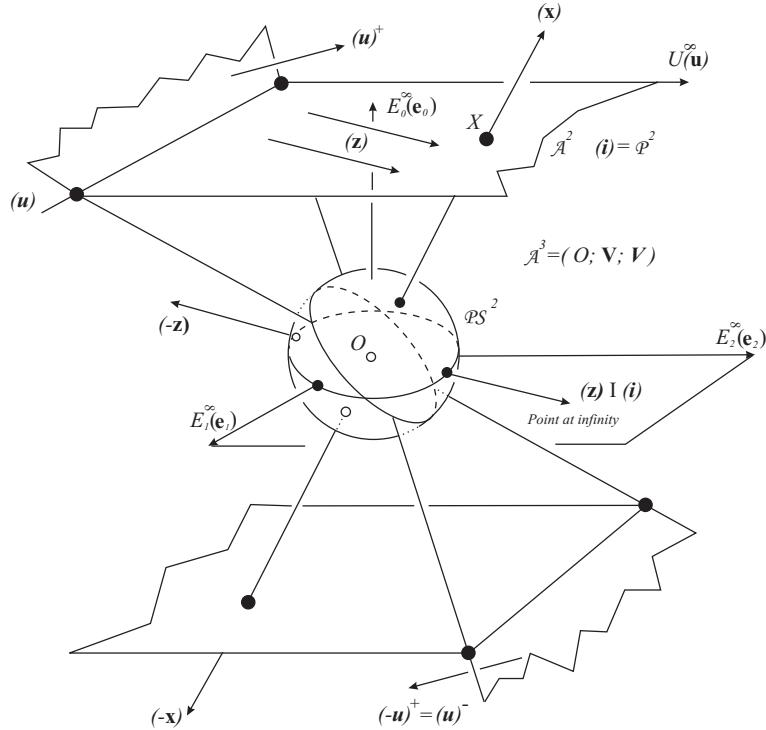


Fig. 1. Our scene for dimensions 2 with projective sphere  $\mathcal{PS}^2$  embedded into the real vector space  $\mathbf{V}^3$  and its dual  $\mathbf{V}_3$

Furthermore, we see that the general linear form  $\mathbf{u} := e^0 u_0 + e^1 u_1 + e^2 u_2 := e^j u_j$  takes on the vector  $\mathbf{x} := x^0 \mathbf{e}_0 + x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 := x^i \mathbf{e}_i$  the real value

$$(x^i \mathbf{e}_i)(e^j u_j) = x^i (\mathbf{e}_i e^j) u_j = x^i \delta_i^j u_j = x^i u_i := x^0 u_0 + x^1 u_1 + x^2 u_2. \quad (1.4)$$

Thus, a linear form  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_3$  describes a *2-dimensional subspace*  $u$ , i.e. a vector plane of  $\mathbf{V}^3$  through the origin. Moreover, forms

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{u}k \text{ with } 0 < k \in \mathbf{R} \text{ describe the same oriented plane of } \mathbf{V}^3. \quad (1.5)$$

As in Fig.1 a positive equivalence class of forms  $(\mathbf{u})$  gives an open *half-space*  $(\mathbf{u})^+$  of  $\mathbf{V}^3$ , i.e. the vector classes  $(\mathbf{x})$  for which

$$(\mathbf{u})^+ : \{(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} > 0\}. \quad (1.6)$$

This gives also a corresponding half-sphere of  $\mathcal{PS}^2$ , and a corresponding half-plane of  $\mathcal{A}^2$ . Note that *this is not so for the projective plane  $\mathcal{P}^2$*  which is not orientable, because the equivalence mapping  $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$  has negative determinant in  $\mathbf{V}^3$ !

In order to concentrate on our main goal, we introduce a *bijective linear mapping*  $\mathbf{T}$  of  $\mathbf{V}^3$  onto itself, i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{V}^3 &\ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{T} =: \mathbf{y} \in \mathbf{V}^3 \text{ with requirements} \\ x^i \mathbf{e}_i &\mapsto (x^i \mathbf{e}_i)\mathbf{T} = x^i (\mathbf{e}_i \mathbf{T}) = x^i t_i^j \mathbf{e}_j =: y_j \mathbf{e}_j, \det(t_i^j) \neq 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Assume that  $\mathbf{T}$  has the above matrix  $(t_i^j)$  with respect to basis  $\{\mathbf{e}_i\}$  of  $\mathbf{V}^3$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ). Then  $\mathbf{T}$  defines a *projective point transformation*  $\tau(\mathbf{T})$  of  $\mathcal{PS}^2$  onto itself, which *preserves all the*

*incidences of subspaces* of  $\mathbf{V}^3$  and so *incidences of points and lines* of  $\mathcal{PS}^2$ , respectively. The matrix  $(t_i^j)$  and its positive multiples  $(ct_i^j) = (t_i^j c)$  with  $0 < c \in \mathbf{R}$  (and only these mappings) define the same point transformation  $\tau(\mathbf{T} \sim \mathbf{T}_c)$  of  $\mathcal{PS}^2$  by the above requirements.

We also mention that the *inverse matrix class* of above  $(t_i^j)$ , now denoted by  $(T_j^k) \sim \frac{1}{c} T_j^k$ , with  $t_i^j T_j^k = \delta_i^k$  induces the corresponding linear transform  $\mathbf{T}$  of the dual  $\mathbf{V}_3$  (i.e. for lines) onto itself, and its inverse  $\mathbf{T}^{-1}$ , i.e. in steps

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{V}_3 \ni \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{T}\mathbf{v} =: \mathbf{u} \in \mathbf{V}_3 \text{ so that} \\ \mathbf{y}\mathbf{v} &= (\mathbf{x}\mathbf{T})\mathbf{v} = \mathbf{x}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \mathbf{x}\mathbf{u}, \text{ especially} \\ 0 &= \mathbf{x}\mathbf{u} = (\mathbf{x}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{y}\mathbf{v}, \text{ so } 0 = \mathbf{y}\mathbf{v} = (\mathbf{y}\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \mathbf{x}\mathbf{u} \\ X \text{ I } u &\leftrightarrow Y := X\tau \text{ I } v := \tau u \text{ hold} \end{aligned} \tag{1.8}$$

for the  $\tau$ -images of points and lines, respectively. We can see that the induced action on the dual  $\mathbf{V}_3$  is a *left action* and so is the induced action on the lines of  $\mathcal{PS}^2$ . This is according to our conventions, may be strange a little bit at the first glance, but we will utilize some benefits in the next sections.

## 1.1 Line → point polarity describing orthogonality of lines for $\mathbf{S}^2$ , $\mathbf{E}^2$ , $\mathbf{M}^2$ , $\mathbf{G}^2$ and $\mathbf{H}^2$ geometries

Till now we have not considered *metric (distance, angle) problems* of our model plane in  $\mathcal{PS}^2$ . As we shall see, this will be related to the additional structure of the vector space  $\mathbf{V}^3$  and that of its dual  $\mathbf{V}_3$  (see e.g. in [1], [12]).

In our suggested interpretation the concept of polarity  $\Pi_*$  has some advantages, considered as a linear symmetric mapping of the dual (form) space  $\mathbf{V}_3$  into the starting vector space  $\mathbf{V}^3$ . Thus we associate with any (polar) line  $u(\mathbf{u})$  its (pole) point  $U(\mathbf{u})$  of  $\mathcal{PS}^2$  as follows

$$\Pi_* : \mathbf{V}_3 \ni \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}_* =: \mathbf{u} \in \mathbf{V}^3 \tag{1.9}$$

by the matrix  $\pi^{ij}$  to the dual basis pair  $\{\mathbf{e}^i\}$ ,  $\{\mathbf{e}_j\}$ ;  $\mathbf{e}_j \mathbf{e}^i = \delta_j^i$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ), according to

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i &\mapsto \mathbf{e}_*^i =: \mathbf{e}^i = \pi^{ij} \mathbf{e}_j \text{ with symmetry requirement } \pi^{ij} = \pi^{ji}, \\ \text{thus } \mathbf{u} &= \mathbf{e}^i u_i \rightarrow (\mathbf{e}^i u_i)_* = u_i \mathbf{e}_*^i = u_i \pi^{ij} \mathbf{e}_j =: u^j \mathbf{e}_j. \end{aligned} \tag{1.10}$$

At the same time, we can introduce a symmetric bilinear scalar product by this polarity (and vice versa, equivalently):

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 &\rightarrow \mathbf{R}, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{u}_*) \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v} \in \mathbf{R} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{e}^i u_i, \mathbf{e}^j v_j \rangle = (u_i \mathbf{e}_*^i) (\mathbf{e}^j v_j) = u_i \pi^{ir} \delta_r^j v_j = u_i \pi^{ij} v_j. \end{aligned} \tag{1.11}$$

This shows the usual computations and the symmetry  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$  as well.

Now we say that the line  $u(\mathbf{u})$  is perpendicular or orthogonal to line  $v(\mathbf{v})$ , if the pole  $(\mathbf{u}_*) = (\mathbf{u}) = U$  is incident to line  $v(\mathbf{v})$ . Then  $0 = \mathbf{u}_* \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{v}_* \mathbf{u}$ , so the pole  $V(\mathbf{v})$  of  $v(\mathbf{v})$  is also incident to  $u(\mathbf{u})$ , showing the symmetry of orthogonality as well.

Now we can define the classical plane geometries  $\mathbf{S}^2$ ,  $\mathbf{E}^2$ ,  $\mathbf{H}^2$  in our "model plane"  $\mathcal{PS}^2$  according to Fig. 1 and Fig. 2.

First, we geometrize the dual basis pair  $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}^j\}$  with  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta_i^j$  by introducing a coordinate triangle (simplex, in more general) with vertices  $E_0(\mathbf{e}_0), E_1(\mathbf{e}_1), E_2(\mathbf{e}_2)$ , and sides

$$e^0(\mathbf{e}^0) = E_1 E_2, \quad e^1(\mathbf{e}^1) = E_2 E_0, \quad e^2(\mathbf{e}^2) = E_0 E_1. \quad (1.12)$$

Because of the positive equivalence, we also introduce the so-called *unit point*  $E(\mathbf{e} \sim \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2)$  and unit line  $e(\mathbf{e} \sim \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2)$  to fix the representative basis vectors  $\{\mathbf{e}_i\}$  and basis forms  $\{\mathbf{e}^j\}$  up to a common positive constant factor, say  $c$  to  $\{\mathbf{e}_i\}$  and  $\frac{1}{c}$  to  $\{\mathbf{e}^j\}$ ; ( $i, j = 0, 1, 2$ ). This *projective freedom* provides benefits for later simplifications.

Now by symmetry of the polarity matrix  $\pi^{ij}$  above, it is well known (*Inertia law of Sylvester*), that  $\pi^{ij}$  has a so called diagonal form  $\pi^{i'j'}$  to an appropriate dual basis pair  $\{\mathbf{e}_{i'}\}, \{\mathbf{e}^{j'}\}$ , ( $i', j' = 0', 1', 2'$ ) Here primes refer to a linear basis change (Schouten's primed index conventions). That means  $\mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}^{i'} = \delta_{j'}^{i'}$  (Kronecker) and

$$\mathbf{e}_*^{i'} \mapsto \mathbf{e}^{i'} = \pi^{i'j'} \mathbf{e}_{j'} \text{ so that } \pi^{i'j'} = 0 \text{ if } i' \neq j' \text{ and } \pi^{i'i'} = 1 \text{ or } 0, -1. \quad (1.13)$$

Moreover, although the basis change is not uniquely determined, the so-called signature, i.e. the range (sign) of diagonal elements is unique, up to permutation. Namely,

$$\mathbf{S}^2(1, 1, 1), \mathbf{E}^2(0, 1, 1), \mathbf{H}^2(-1, 1, 1), \mathbf{M}^2(0, -1, 1), \mathbf{G}^2(0, 0, 1) \quad (1.14)$$

hold for  $\mathbf{S}^2$  (spherical plane),  $\mathbf{E}^2$  (Euclidean plane),  $\mathbf{H}^2$  (hyperbolic or Bolyai-Lobachevsky plane),  $\mathbf{M}^2$  (Minkowski or pseudo-Euclidean plane),  $\mathbf{G}^2$  (Galilei or isotropic plane), respectively. Multiplication by  $(-1)$  provides equivalences

$$\mathbf{S}^2(-1, -1, -1), \mathbf{E}^2(0, -1, -1), \mathbf{H}^2(1, -1, -1), \mathbf{M}^2(0, 1, -1), \mathbf{G}^2(0, 0, -1).$$

Our Fig. 1 also illustrates the possible  $\mathbf{S}^2$ -structure if  $\mathcal{PS}^2(\mathbf{V}^3, \mathbf{V}_3)$  is specified by polarity

$$\mathbf{e}^i \xrightarrow{*} \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i \quad (i = 0, 1, 2) \text{ also by conventional matrix form}$$

$$(\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^0 \\ \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

(by usual row-column multiplication). That means that the basis  $\{\mathbf{e}^i\}$  is orthonormal and our model plane  $\mathcal{PS}^2$  becomes indeed to a metric sphere  $\mathbf{S}^2$ . The polarity orders to any line (equator circle) its usual pole.

The angle of lines (angular domain) of  $u(\mathbf{u})$  and  $v(\mathbf{v})$  is usually defined by

$$\cos(u, v) = \frac{-\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}}. \text{ While } \cos \frac{1}{r}(U, V) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}} \quad (1.16)$$

leads to the (angular) distance or length of segment  $(U, V)$  between their poles  $U(\mathbf{u})$  and  $V(\mathbf{v})$ ,  $r$  denotes the radius of the sphere. This is natural, since the above polarity  $\Pi(*)$  with matrix

$\pi^{ij}$  is invertible. In our Fig. 1 there is indicated also the plane  $E^2$ , i.e. the Euclidean structure of  $\mathcal{PS}^2$  if our polarity is degenerate by

$$(\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

That means that our ideal line  $(\mathbf{i}) = (\mathbf{e}^0) = E_1^\infty(\mathbf{e}_1)E_2^\infty(\mathbf{e}_2)$  is considered to be orthogonal to any line (to itself as well). Parallel lines to line  $u(\mathbf{u})$  have common orthogonal lines through the pole  $U^\infty(\mathbf{u})$  at infinity, etc. Angles and distances can be defined according to usual conventions (see [1], [7], [10]).

We only remark that degenerate polarities by

$$(\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \text{ and } (\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

in Fig. 1 define Minkowski plane  $M^2$  (of special relativity) and Galilei plane  $G^2$  (for Newton mechanics), respectively [1].

The Bolyai-Lobachevsky hyperbolic plane  $H^2$  deserves special interest (Fig. 2). Here the polarity is defined by

$$(\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Now Fig. 2 has to be considered as extension of Fig. 1, i.e.  $\mathcal{PS}^2$  with polarity given by (1.11), where the absolute cone (and conic section) is indicated (Beltrami-Cayley-Klein model). This is first the set of 2-subspaces of  $V^3$ , described by the forms  $(\mathbf{a})$  in  $V_3$ , i.e. by lines  $a(\mathbf{a})$  of  $\mathcal{PS}^2$  which are incident to their poles  $A(\mathbf{a})$ . Thus for

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{e}^0 a_0 + \mathbf{e}^1 a_1 + \mathbf{e}^2 a_2, \quad \mathbf{a}_* = a_0(-1)\mathbf{e}_0 + a_1(1)\mathbf{e}_1 + a_2(1)\mathbf{e}_2 = \\ &= \mathbf{a} = a^0 \mathbf{e}_0 + a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2, \quad \text{i.e. } a^0 = (-1)a_0, \quad a^1 = a_1, \quad a^2 = a_2 \text{ follow, and hold} \\ &0 = -a_0 a_0 + a_1 a_1 + a_2 a_2 = -a^0 a^0 + a^1 a^1 + a^2 a^2 \end{aligned}$$

the quadratic equations of conics as line set and point set, respectively. That means, our polarity can be derived by conics, as it is pointed by

$$u \xrightarrow{*} U \text{ and } p \xrightarrow{*} P$$

in Fig. 2. We refer to [1], [7] for other details.

After having introduced a polarity or scalar product in  $\mathcal{PS}^2$  to get the above *metric geometries*, we can define their groups of transforms, first uniformly as *similarities*. These are special projective transforms, induced by linear transforms  $(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1})$  of  $(V^3, V_3)$  by (1.8) up to certain equivalence, preserving the given polarity, as the following diagram obviously sketches

$$\begin{array}{ccc} x(\mathbf{x}) & \xrightarrow{*} & X(\mathbf{x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ y(\mathbf{y}) & \xrightarrow{*} & Y(\mathbf{y}) \end{array} \quad \begin{array}{cc} \mathbf{T} & V^3 \\ V_3 & \mathbf{T}^{-1} \end{array} \quad (1.20)$$

$$\text{i.e. } \pi^{ij} \sim t_r^i \pi^{rs} t_s^j.$$

We only mention our – seemingly new – initiative to diagram (1.20): To some linear transforms  ${}_{g\tau}({}_g\mathbf{T}, {}_g\mathbf{T}^{-1})$  ( $g = 1, 2, 3, \dots$ ) (left bottom index) "small number" of generators, for a group  $\mathbf{G}$  with certain relations with free parameters), we can look for all possible polarities  $(\cdot)$  with  $(\pi^{ij})$  which can be invariant under  ${}_{g\tau}$ , so under the group  $\mathbf{G}$ . Thus e.g., to  $\mathbf{G}$  we look for possible geometries where  $\mathbf{G}$  will be (may be) a discrete group of isometries (see e.g. [9], [10] for crystallographic applications and a possibility to attack *Thurston's geometrization conjecture*, in general, first for dimensions three, [9], [12], [15], [23]), [30].

We remark that in planes  $S^2$ ,  $H^2$ , where the polarity is invertible, such transforms constitute the isometry group of  $S^2$  and  $H^2$ , respectively, since in these cases distance between points will also be preserved. For the other geometries such a statement does not hold. Then the preserved (invariant) properties need some further characterizations. E.g. the concept of line reflection seems to be very natural to define isometries of the corresponding geometries. Line reflection is an involutive (involutory) transform, i.e. equal to its inverse, in an axis line  $u(u)$  with its non incident pole  $U(u)$  as centre. Namely, any isometry would be defined as composition or product of finitely many line reflections, as it is usual in Euclidean geometry  $E^2$  as well as also in  $M^2$  and  $G^2$  (as so-called affine metric geometries). However, we shall see in dimensions three, such

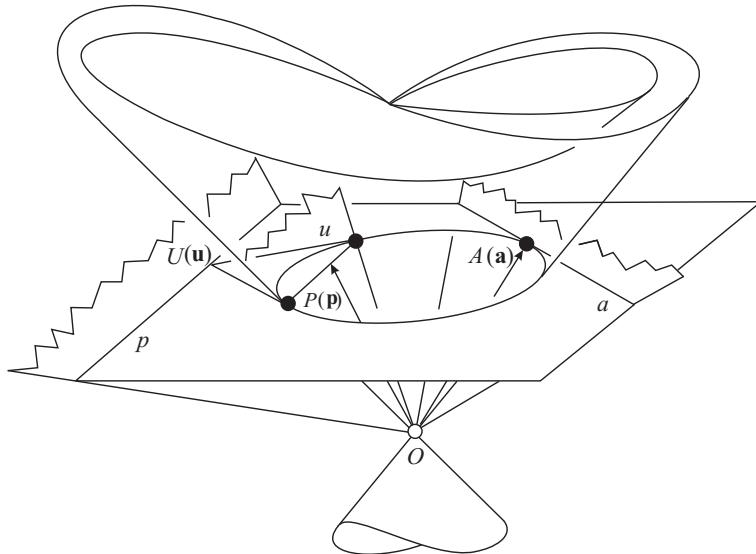


Fig. 2. The hyperbolic plane  $H^2$ , embedded into  $P^2 \subset PS^2$  by a conic polarity  $u(u) \rightarrow U(u)$ ,  $p \rightarrow P$ ,  $a \rightarrow A$ . This figure models also  $H^2 \times \mathbf{R}$  [19]

a plane reflection does not exist in some 3-geometries (e.g. in Nil and  $\widetilde{\text{SL}_2 \mathbf{R}}$ ).

We do not discuss here the differential geometry of the above 2-geometries, in general. We know that  $S^2$ ,  $E^2$ ,  $H^2$  are Riemann spaces with infinitesimal arc-length, vectors as differential operators, of constant curvature and other invariants, etc. The standard method will be illustrated in the next sections for Nil and Sol geometry in some details, as examples.

## 1.2 Projective method for 3-dimensional spaces

The machinery can be applied to model the classical 3-spaces  $S^3$ ,  $E^3$ ,  $H^3$  on the projective 3-sphere  $PS^3(V^4, V_4)$  (and for  $E^3$   $H^3$  in  $P^3 \subset PS^3$ ) in the same way with less visuality,

but analogies and matrix (index) conventions can help. Let us introduce again the positive equivalence in  $\mathbf{V}^4$  for non-zero vectors

$$\mathbf{x} \sim c\mathbf{x} \text{ with } 0 < c \in \mathbf{R} \text{ defines the same point } X(\mathbf{x}) \text{ of } \mathcal{PS}^3 : \quad (1.21)$$

whose coordinates in  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ , with respect to basis  $\{\mathbf{e}_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), can be written in matrix form

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \text{ A form } \mathbf{u} = (\mathbf{e}^0 \quad \mathbf{e}^1 \quad \mathbf{e}^2 \quad \mathbf{e}^3) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

in the dual space  $\mathbf{V}_4$ , again up to positive equivalence, describes an oriented plane (2-sphere) of  $\mathcal{PS}^3$  with the dual basis  $\{\mathbf{e}^j\}$ ,  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta_i^j$  (the Kronecker symbol) ( $i, j = 0, 1, 2, 3$ ). Equalities

$$0 = (x^i \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}^j u_j) = x^i (\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j) u_j = x^i \delta_i^j u_j = x^i u_i \quad (1.23)$$

express the incidence  $X \cap u$ . Formula (1.23) describes the set of varying points  $X(\mathbf{x})$  on the fixed plane  $u(\mathbf{u})$ , and at the same time, the set of planes  $u(\mathbf{u})$  incident to the fixed point  $X(\mathbf{x})$ . The projective transform  $\tau(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1})$  with inverse matrix pair  $(t_i^j)$  to  $\mathbf{T}$  of  $\mathbf{V}^4$  and  $(t_i^j)^{-1} \sim (T_j^k)$  to  $\mathbf{T}^{-1}$  of  $\mathbf{V}_4$  – with respect to the dual basis pair  $\{\mathbf{e}_i\}$ ,  $\{\mathbf{e}^j\}$ , as in formulas (1.8) – can be described in matrix form. First for points it is:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} t_0^0 & t_0^1 & t_0^2 & t_0^3 \\ t_1^0 & t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \\ t_2^0 & t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \\ t_3^0 & t_3^1 & t_3^2 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \sim (y^0, y^1, y^2, y^3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

and for planes briefly  $\mathbf{e}^i T_i^k u_k \sim \mathbf{e}^i v_i$ . This  $\tau(\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1})$  preserves the incidence by  $0 = (\mathbf{x}\mathbf{u}) = (\mathbf{y}\mathbf{v})$ . These are, again up to positive equivalence, related to a coordinate simplex  $E_0 E_1 E_2 E_3$  with the unit point  $E(\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$  and to  $e^0 e^1 e^2 e^3$  with the unit plane  $e(\mathbf{e} = \mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3$ , where  $\mathbf{e}^i = (E_j E_k E_l)$  with  $\{0, 1, 2, 3\} = \{i, j, k, l\}$ , etc.

Spherical space geometry  $\mathbf{S}^3$  will be defined with the additional polarity  $\Pi(*)$  or scalar product  $\langle , \rangle$  in  $\mathbf{V}_4$ , with positive diagonal  $(\pi^{ij})$  matrix, and we have  $\mathbf{e}_*^i = \mathbf{e}^i = \pi^{ij} \mathbf{e}_j$ ,

$$(\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^0 \\ \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

For Euclidean  $\mathbf{E}^3$  geometry and hyperbolic  $\mathbf{H}^3$  (Bolyai-Lobachevsky) geometry we indicate only the corresponding  $\pi^{ij}$  matrices ( $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ ), respectively:

$$\mathbf{E}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

To other Thurston geometries we attach here Table 1 by [10], where additional and modified information for transform groups are also indicated.

Space X	Signature of polarity $\Pi(\star)$ or scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $V_4$	Domain of proper points of X in $\mathcal{PS}^3$ ( $V^4(\mathbf{R})$ , $V_4$ )	The group $G = \text{Isom } X$ as a special collineation group of $\mathcal{PS}^3$
$S^3$	(+ + + +)	$\mathcal{PS}^3$	Coll $\mathcal{PS}^3$ preserving $\Pi(\star)$
$H^3$	(- + + +)	$\{(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0\}$	Coll $\mathcal{P}^3$ preserving $\Pi(\star)$
$\widetilde{\text{SL}_2 \mathbf{R}}$	(- - + +) with skew line fibering	Universal covering of $\mathcal{H} := \{[\mathbf{x}] \in \mathcal{PS}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0\}$ by fibering transformations	Coll $\mathcal{PS}^3$ preserving $\Pi(\star)$ and fibres with 4 parameters.
$E^3$	(0 + + +)	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{P}^3 \setminus \{\omega^\infty\}$ where $\omega^\infty := (\mathbf{b}^0), b_\star^0 = 0$	Coll $\mathcal{P}^3$ preserving $\Pi(\star)$ , generated by plane reflections
$S^2 \times \mathbf{R}$	(0 + + +) with O-line bundle fibering	$\mathcal{A}^3 \setminus \{O\}$ $O$ is a fixed origin	$G$ is generated by plane reflections and sphere inversions, leaving invariant the O-concentric 2-spheres of $\Pi(\star)$
$H^2 \times \mathbf{R}$	(0 - + +) with O-line bundle fibering	$\mathcal{C}^+ = \{X \in \mathcal{A}^3 : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle < 0, \text{ half cone}\}$ by fibering	$G$ is generated by plane reflections and hyperboloid inversions, leaving invariant the O-concentric half-hyperboloids (Fig. 2) in the half-cone $\mathcal{C}^+$ by $\Pi(\star)$
Sol	(0 - + +) and parallel plane fibering with an ideal plane $\phi$	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{P}^3 \setminus \phi$	Coll. of $\mathcal{A}^3$ preserving $\Pi(\star)$ and the fibering with 3 parameters
Nil	Null-polarity $\Pi(\star)$ with parallel line bundle fibering $F$ with its polar ideal plane $\phi$	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{P}^3 \setminus \phi$	Coll. of $\mathcal{A}^3$ preserving $\Pi(\star)$ with 4 parameters

**Table 1.** Thurston geometries each modelled on  $\mathcal{PS}^3$  by specified polarity or scalar product and isometry group

## 2 Classical and linear model of Nil geometry, geodesic and translation ball packings

### 2.1 On Classical model of Nil geometry

In this Section, as illustration, we summarize some significant notions and denotations (see e.g. [2], [10], [11], [23], [25], [30], [31]).

Nil geometry is a homogeneous 3-space derived originally from the famous real matrix group  $L(\mathbf{R})$ , used by W. Heisenberg in his electro-magnetic studies. The Lie group theory with the methods of projective geometry will describe this topic. Here we concentrate on geodesic curves

and balls comparing with so-called translation curves and balls. The latter ones deserve special interest also in  $\widetilde{\text{SL}_2 \mathbf{R}}$  and Sol geometry see [10], [12], [16] and the next Section 3.

The left (row-column) multiplication of Heisenberg matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+xb+z \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

defines "translations"  $\mathbf{L}(\mathbf{R}) = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$  on the points of  $\mathbf{Nil} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbf{R}\}$ . These translations are not commutative, in general. The matrices  $\mathbf{K}(z) \triangleleft \mathbf{L}$  of the form

$$\mathbf{K}(z) \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (0, 0, z) \quad (2.2)$$

constitute the one parametric centre, i.e. each of its elements commutes with all elements of  $\mathbf{L}$ . The elements of  $\mathbf{K}$  are called *fibre translations*. Nil geometry of the Heisenberg group can be projectively (affinely) interpreted by the "right translations" on points as the matrix formula

$$(1; a, b, c) \rightarrow (1; a, b, c) \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1; x+a, y+b, z+bx+c) \quad (2.3)$$

shows, according to (2.1). Here we consider  $\mathbf{L}$  as projective collineation group with right actions in homogeneous coordinates. We will use the Cartesian homogeneous coordinate simplex  $E_0(\mathbf{e}_0), E_1^\infty(\mathbf{e}_1), E_2^\infty(\mathbf{e}_2), E_3^\infty(\mathbf{e}_3)$ , ( $\{\mathbf{e}_i\} \subset \mathbf{V}^4$  with the unit point  $E(\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ ) which is distinguished by an origin  $E_0$  and by the ideal points of coordinate axes, respectively. Moreover,  $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$  with  $0 < c \in \mathbf{R}$  (or  $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ) defines a point  $(\mathbf{x}) = (\mathbf{y})$  of the projective 3-sphere  $\mathcal{PS}^3$  (or that of the projective space  $\mathcal{P}^3$  where opposite rays  $(\mathbf{x})$  and  $(-\mathbf{x})$  are identified). The dual system  $\{(\mathbf{e}^i)\}, (\{\mathbf{e}^i\} \subset \mathbf{V}_4)$  describes the simplex planes, especially the plane at infinity  $(\mathbf{e}^0) = E_1^\infty E_2^\infty E_3^\infty$ . In general,  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \frac{1}{c}$  defines a plane  $(\mathbf{u}) = (\mathbf{v})$  of  $\mathcal{PS}^3$  (or that of  $\mathcal{P}^3$ ). Thus  $0 = \mathbf{xu} = \mathbf{yv}$  defines the incidence of point  $(\mathbf{x}) = (\mathbf{y})$  and plane  $(\mathbf{u}) = (\mathbf{v})$ . Thus  $\mathbf{Nil}$  can be visualized in the affine 3-space  $\mathbf{A}^3$  (so in  $\mathbf{E}^3$ ) as well.

In this context E. Molnár [11] has derived by so-called pull back transform the well-known infinitesimal arc-length-square, invariant under translations  $\mathbf{L}$  at any point of  $\mathbf{Nil}$  as follows

$$\begin{aligned} (dx)^2 + (dy)^2 + (-xdy + dz)^2 = \\ (dx)^2 + (1 + x^2)(dy)^2 - 2x(dy)(dz) + (dz)^2 =: (ds)^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hence we get the symmetric metric tensor field  $g$  on  $\mathbf{Nil}$  by components  $g_{ij}$ , furthermore its inverse:

$$g_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

with  $\det(g_{ij}) = 1$ .

The translation group  $\mathbf{L}$  defined by formula (2.3) can be extended to a larger group  $\mathbf{G}$  of collineations, preserving the fibering, that will be equivalent to the (orientation preserving) isometry group of Nil. In [11] E. Molnár has shown that a rotation through angle  $\omega$  about the  $z$ -axis at the origin, as isometry of Nil, keeping invariant the Riemann metric everywhere, will be a quadratic mapping in  $x, y$  to  $z$ -image  $\bar{z}$  as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(O, \omega) : (1; x, y, z) &\rightarrow (1; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}); \\ \bar{x} = x \cos \omega - y \sin \omega, \quad \bar{y} = x \sin \omega + y \cos \omega, \\ \bar{z} = z - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}(x^2 - y^2) \sin 2\omega + \frac{1}{2}xy \cos 2\omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

This rotation formula, however, is conjugate by the quadratic mapping

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : x \rightarrow x' = x, \quad y \rightarrow y' = y, \quad z \rightarrow z' = z - \frac{1}{2}xy \text{ to} \\ (1; x', y', z') \rightarrow (1; x', y', z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1; x'', y'', z''), \quad (2.7) \\ \text{with } x'' \rightarrow \bar{x} = x'', \quad y'' \rightarrow \bar{y} = y'', \quad z'' \rightarrow \bar{z} = z'' + \frac{1}{2}x''y'', \end{aligned}$$

i.e. to the linear rotation formula. This quadratic conjugacy modifies the Nil translations in (2.3), as well. This can also be characterized by the following important classification theorem.

**Theorem 2.1** (E. Molnár [11] modified).

1. Any group of Nil isometries, containing a 3-dimensional translation lattice, is conjugate by the quadratic mapping in (2.7) to an affine group of the affine (or Euclidean) space  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{E}^3$  whose projection onto the  $(x, y)$  plane is an isometry group of  $\mathbf{E}^2$ . Such an affine group preserves a plane  $\rightarrow$  point null-polarity.
2. Of course, the involutive line reflection about the  $y$  axis

$$(1; x, y, z) \rightarrow (1; -x, y, -z),$$

preserving the Riemann metric, and its conjugates by the above isometries in 1 (those of the identity component) are also Nil-isometries. There does not exist orientation reversing Nil-isometry.

## 2.2 Geodesic curves

The geodesic curves of the Nil geometry are generally defined as having locally minimal arc length between their any two (near enough) points. The equation systems of the parametrized geodesic curves  $g(x(t), y(t), z(t))$  in our model (now by (2.4)) can be determined by the Levy-Civita theory of Riemann geometry. We can assume, that the starting point of a geodesic curve is the origin because we can transform a curve into an arbitrary starting point by translation (2.1);

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = z(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = c \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = c \sin \alpha, \\ \dot{z}(0) = w; \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi. \end{aligned}$$

The arc length parameter  $s$  is introduced by

$$s = \sqrt{c^2 + w^2} \cdot t, \text{ where } w = \sin \theta, c = \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

i.e. unit velocity can be assumed. We get the equation system of a helix-like geodesic curve  $g(x(t), y(t), z(t))$  if  $0 < |w| < 1$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2c}{w} \sin \frac{wt}{2} \cos \left( \frac{wt}{2} + \alpha \right), \quad y(t) = \frac{2c}{w} \sin \frac{wt}{2} \sin \left( \frac{wt}{2} + \alpha \right), \\ z(t) &= wt \cdot \left\{ 1 + \frac{c^2}{2w^2} \left[ \left( 1 - \frac{\sin(2wt + 2\alpha) - \sin 2\alpha}{2wt} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( 1 - \frac{\sin(2wt)}{wt} \right) - \left( 1 - \frac{\sin(wt + 2\alpha) - \sin 2\alpha}{2wt} \right) \right] \right\} = \\ &= wt \cdot \left\{ 1 + \frac{c^2}{2w^2} \left[ \left( 1 - \frac{\sin(wt)}{wt} \right) + \left( \frac{1 - \cos(2wt)}{wt} \right) \sin(wt + 2\alpha) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

In case  $w = 0$  the geodesic curve is the following:

$$x(t) = c \cdot t \cos \alpha, \quad y(t) = c \cdot t \sin \alpha, \quad z(t) = \frac{1}{2} c^2 \cdot t^2 \cos \alpha \sin \alpha. \tag{2.9}$$

The case  $|w| = 1$  is trivial:  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $z = w \cdot t$ .

**Definition 2.1.** The distance  $d(P_1, P_2)$  between points  $P_1$  and  $P_2$  is defined by the arc length of geodesic curve from  $P_1$  to  $P_2$ .

### 2.3 On linear model of Nil geometry

Now we equivalently and more briefly introduce **Nil** (see [2], [11]) by the help of null-polarity  $\Pi_{(*)}$  in  $\mathcal{A}^3 \subset \mathcal{P}^3$ . Here a distinguished point  $F$  and its line bundle provide the fibre structure. The polar plane  $\phi \cap F$  will be the ideal plane of  $\mathcal{A}^3 = \mathcal{P}^3 \setminus \phi$ . This structure will be the scene of Nil geometry. The isometry group  $G$  of Nil consist of collineations of  $\mathcal{A}^3$  preserving the null polarity  $\Pi_{(*)}$  given say, by

$$\begin{aligned} e_*^i &= \pi^{ij} e_j \text{ with } \pi^{ji} = -\pi^{ij}; \\ (*) : (\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) &\xrightarrow{*} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_*^0 \\ \mathbf{e}_*^1 \\ \mathbf{e}_*^2 \\ \mathbf{e}_*^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

This antisymmetric matrix  $\pi^{ij}$  of  $\Pi_{(*)}$  guarantees that any pole  $\mathbf{u}_* = \mathbf{u} = (u^0 = u_3, u^1 = -2u_2, u^2 = 2u_1, u^3 = -u_0)$  is incident with its polar plane  $\mathbf{u}(u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ , as any circle plane coincides with the centre of a circle.

The translations, rotations about the  $z$ -axis, and the horizontal line reflection in the  $x$ -axis

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

respectively, are typical isometries of Nil. These preserve the null-polarity by the scheme (1.20). Thus, they generate the complete isometry group of 4 parameters in Nil as specific collineations of  $\mathcal{P}^3 \setminus \phi = \mathcal{A}^3$ . Here  $\phi = (1, 0, 0, 0)^T$  is the invariant ideal plane, whose pole  $F(0, 0, 0, 1)$  just defines the fibre line bundle parallel to the  $z$  axis, as in the former classical interpretation.

As a benefit to the former interpretation, now it is more clear the role of the commutator translation of  $\tau_1(x_1, y_1, z_1)$  and  $\tau_2(x_2, y_2, z_2)$  as the following matrix product shows,

$$\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2(0, 0, x_1y_2 - x_2y_1)$$

is a fibre translation, indeed.

The pull back of the coordinate differentials  $(0, dx, dy, dz)$  at point  $(1, x, y, z)$  into the origin  $(1, 0, 0, 0)$

$$(0, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1 & -x & -y & -z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, dx, dy, \frac{1}{2}(dx \cdot y - dy \cdot x) + dz) \quad (2.12)$$

provides the arc-length-square, as the standard Riemann metric, invariant under all transforms of (2.11):

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + \left[ \frac{1}{2}(dx \cdot y - dy \cdot x) + dz \right]^2 = \\ &= (dr)^2 + (d\theta)^2 r^2 + \left[ (dz - \frac{1}{2}r^2 d\theta) \right]^2 = \\ &= (dr, d\theta, dz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + \frac{1}{4}r^4 & -\frac{1}{2}r^2 \\ 0 & -\frac{1}{2}r^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ dz \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

if we prefer cylinder coordinates  $(r, \theta, z)$  by  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z$ .

These lead, with a standard method, to a second order differential equation system. Our new solution is copied here from [6] (improved).

$$\begin{aligned} r(s) &= 2 \cot(v) \sin(\frac{1}{2} \sin v), \quad \theta(s) = \frac{1}{2}s \sin(v) + u, \\ z(s) &= s \sin(v) - \frac{1}{2} \cot^2(v)(s \sin v - \sin(s \sin v)), \text{ with initial conditions} \\ r(0) &= 0, \quad \theta(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = \cos v, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{z} = \sin v, \\ \text{where } -\pi &< u < \pi \text{ and } -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

This is much simpler than (2.8). Substituting into  $s$  the radius  $R$ , we get the equation of geodesic sphere with longitude  $u$  and altitude  $v$ . As a benefit of this new interpretation we discuss the so-called translation curves, which will be straight lines in this model of Nil, the

curve  $[x(t), y(t), z(t)]$  whose tangent  $[\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]$  will be translation of the starting tangent  $\dot{x}(0) = u, \dot{y}(0) = v, \dot{z}(0) = w$  in the origin  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ . In the matrix form

$$(0, \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (0, u, v, w) \begin{pmatrix} 1 & x(t) & y(t) & z(t) \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}y(t) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

i.e.  $\dot{x}(t) = u, \dot{y}(t) = v, \dot{z}(t) = w$ , yield  $x(t) = ut, y(t) = vt, z(t) = wt$  as desired, where the unit velocity  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$  leads to arc-length parameter  $t = s$ .

The publications, [2], [11], [25], [26], [28], [31] contain surprising results in Nil geometry, whose new visualization we are working on.

In the new linear model of Nil, translation ball (see next subsection) will be the same as the Euclidean one, but only at the origin. The metric will be deformed in other points, so a unit ball can be touched by 14 disjoint other unit balls (see [25] and [28], and Fig. 4). In  $E^3$  this "kissing" number is 12, only.

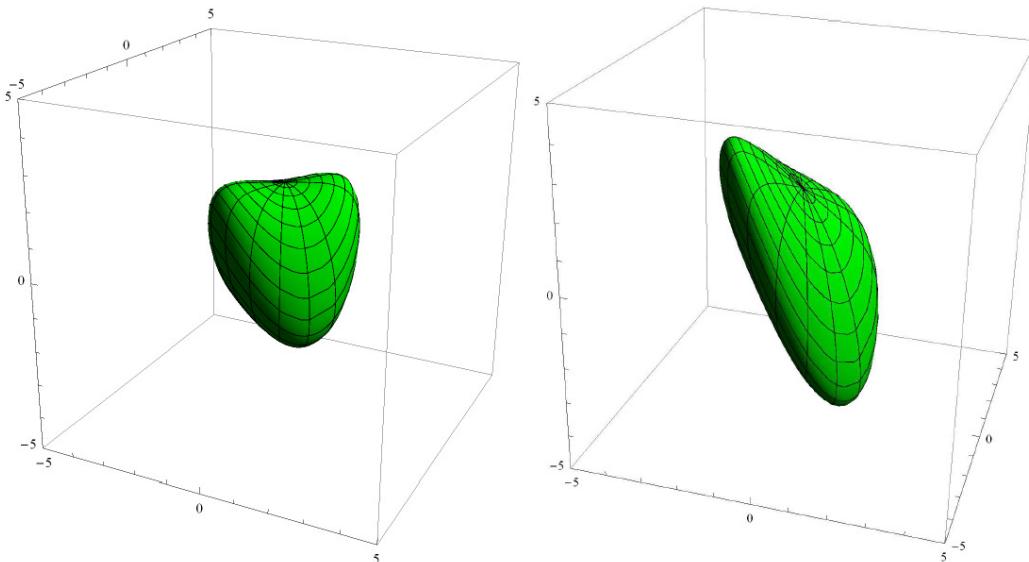


Fig. 3. Geodesic spheres in our original old model

## 2.4 Translation curves and balls in old model

We consider a Nil curve  $(1, x(t), y(t), z(t))$  with a given starting tangent vector at the origin  $O = E_0 = (1, 0, 0, 0)$

$$u = \dot{x}(0), v = \dot{y}(0), w = \dot{z}(0). \quad (2.16)$$

For a translation curve let its tangent vector at the point  $(1, x(t), y(t), z(t))$  be defined by the following equation:

$$(0, u, v, w) \begin{pmatrix} 1 & x(t) & y(t) & z(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)). \quad (2.17)$$

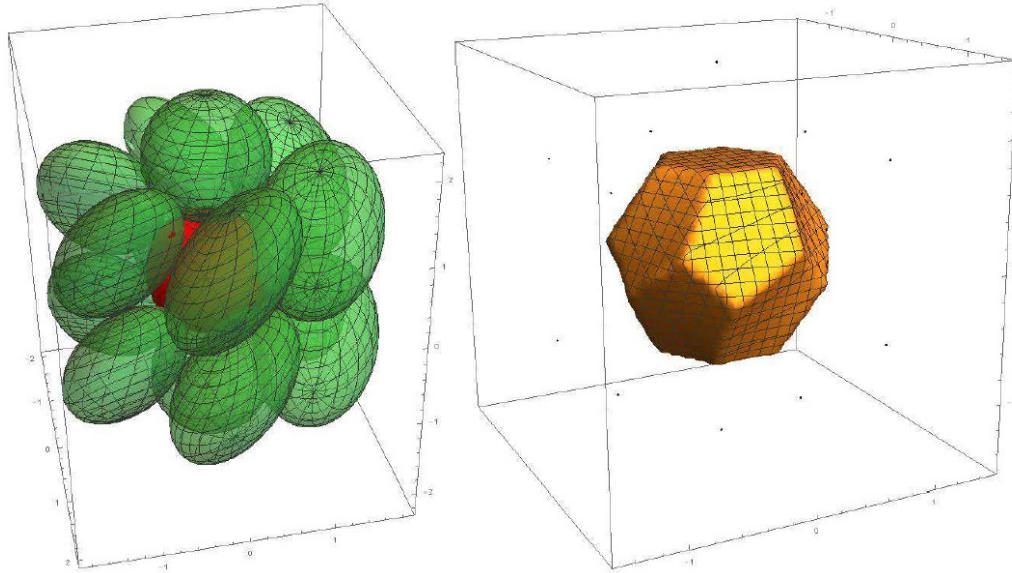


Fig. 4. The densest lattice-like geodesic ball packing in Nil and its Dirichlet-Voronoi cell in the linear model (with new congruent geodesic balls) The density of the packing:  $\delta(R_{opt}) \approx 0.78084501$

Thus, the *translation curves* in old Nil model (see [12], [16]) are defined by the above first order differential equation system  $\dot{x}(t) = u$ ,  $\dot{y}(t) = v$ ,  $\dot{z}(t) = v \cdot x(t) + w$ , whose solution is the following:

$$x(t) = ut, \quad y(t) = vt, \quad z(t) = \frac{1}{2}uvt^2 + wt. \quad (2.18)$$

We assume that the starting point of a translation curve is the origin, because we can transform a curve into an arbitrary starting point by translation (2.3), moreover, unit initial velocity translation can be assumed by the usual "geographic" parameters  $\phi$  and  $\theta$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = z(0) = 0; \\ u &= \dot{x}(0) = \cos \theta \cos \phi, \quad v = \dot{y}(0) = \cos \theta \sin \phi, \quad w = \dot{z}(0) = \sin \theta; \\ -\pi &< \phi \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Definition 2.2.** The translation distance  $d^t(P_1, P_2)$  between points  $P_1$  and  $P_2$  is defined by the arc length of the above translation curve from  $P_1$  to  $P_2$ .

**Definition 2.3.** The sphere of radius  $r > 0$  with centre at the origin, (denoted by  $S_O^t(r)$ ), with the usual longitude and altitude parameters  $\phi$  and  $\theta$ , respectively by (2.11), is specified by the following equations:

$$S_O^t(r) : \left\{ \begin{array}{l} x(\phi, \theta) = r \cos \theta \cos \phi, \\ y(\phi, \theta) = r \cos \theta \sin \phi, \\ z(\phi, \theta) = \frac{r^2}{2} \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi + r \sin \theta. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

**Definition 2.4.** The body of the translation sphere of centre  $O$  and of radius  $r$  in the Nil space is called translation ball, denoted by  $B_O^t(r)$ , i.e.  $Q \in B_O^t(r)$  iff  $0 \leq d^t(O, Q) \leq r$ .

**Remark 2.1.** The translation sphere is a simply connected surface without selfintersection in Nil space for any radius  $0 < r \in \mathbb{R}$ .

We obtained in [28] the volume formula of the translation ball  $B_O^t(r)$  of radius  $r$  by (2.13) and (2.21):

**Theorem 2.2.** The volume of a translation ball of radius  $r$  is the same as that of an Euclidean one:

$$Vol(B_O^t(r)) = \frac{4}{3}r^3\pi. \quad (2.21)$$

The convexity of the translation ball play an important role in the discussion of the ball covering therefore we recall the following Theorem from paper [28].

**Theorem 2.3.** A translation Nil ball  $B^t(S^t(r))$  is convex in the affine-Euclidean sense in our model if and only if  $r \in [0, 2]$ .

## 2.5 The discrete translation group $L(\mathbb{Z}, k)$

We consider the Nil translations defined in (2.1) and choose first two non-commuting translations

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

now with upper indices for the coordinate variables. Second, we define the translation  $(\tau_3)^k$ , ( $k \in \mathbb{N}$   $k$  is fixed natural exponent), by the following commutator:

$$(\tau_3)^k = (\tau_2^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2\tau_1)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_2^1t_1^2 + t_1^1t_2^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k, \text{ and so } \tau_3 \ (k=1) \quad (2.23)$$

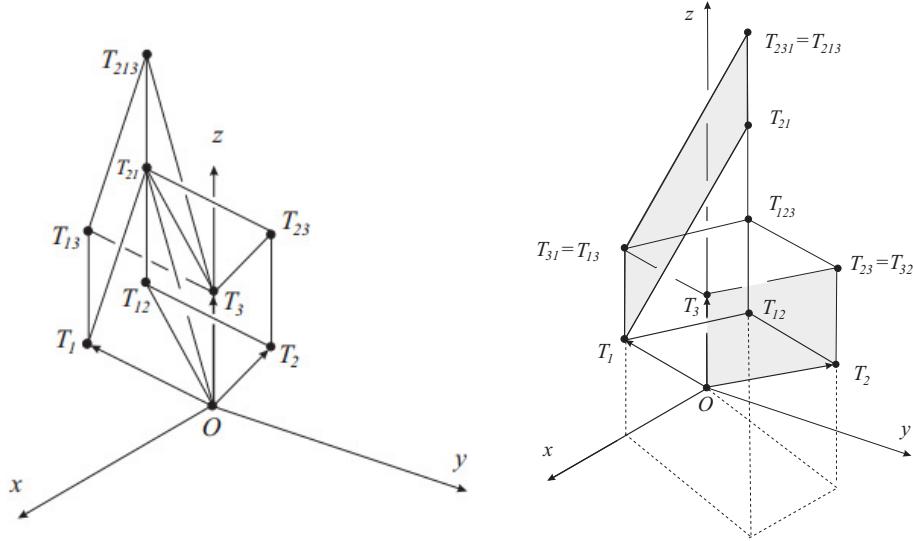
is also defined. If we take integers as coefficients for  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , then we generate the discrete group  $\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle$ , denoted by  $L(\tau_1, \tau_2, k)$  or by  $L(\mathbb{Z}, k)$ . Here  $\mathbb{Z}$  refers to the integers.

We know (see e.g. [23] and [25]) that the orbit space  $\text{Nil}/L(\mathbb{Z}, k)$  is a compact manifold, i.e. a Nil space form.

**Definition 2.5.** The Nil point lattice  $\Gamma_P(\tau_1, \tau_2, k)$  is a discrete orbit of point  $P$  in the Nil space under group  $L(\tau_1, \tau_2, k) = L(\mathbb{Z}, k)$  with an arbitrary starting point  $P$  for every fixed  $k \in \mathbb{N}$ .

**Remark 2.2.** For simplicity we have chosen the origin as starting point, by the homogeneity of Nil.

**Remark 2.3.** We may assume in the following that  $t_1^2 = 0$ , i.e. the image of the origin by the translation  $\tau_1$  lies on the plane  $[x, z]$ .


 Fig. 5. The Nil parallelepipeds  $\widetilde{\mathcal{F}(1)}$  (left) and  $\widetilde{\mathcal{F}(2)}$  (right)

We consider by (2.22-24) a fundamental "parallelepiped complex"

$$\widetilde{\mathcal{F}(k)} = OT_1T_2T_3T_{12}T_{21}T_{23}T_{213}T_{13}, \text{ (see Fig. 5 for } k \in \mathbb{N} \text{ also later on)}$$

in the Euclidean sense, which is determined by translations  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ . The images of  $\widetilde{\mathcal{F}(k)}$  under  $\mathbf{L}(\mathbb{Z}, k)$  fill Nil without gap. Overlaps occur only on the boundary. *Analogously to the Euclidean integer lattice and parallelepiped,  $\widetilde{\mathcal{F}(k)}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) can be called a Nil parallelepiped, endowed by face pairing, as the upper hints to it.*

$\widetilde{\mathcal{F}(k)}$  is a *fundamental domain* of  $\mathbf{L}(\mathbb{Z}, k)$ . We need its volume. The homogeneous coordinates of the vertices of  $\widetilde{\mathcal{F}(k)}$  can be determined in our affine model by the translations (2.22-24) with parameters  $t_i^j$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$  (see (2.25) and Fig. 5).

$$\begin{aligned} & T_1(1, t_1^1, 0, t_1^3), \quad T_2(1, t_2^1, t_2^2, t_2^3), \quad T_3(1, 0, 0, \frac{t_1^1 t_2^2}{k}), \\ & T_{13}(1, t_1^1, 0, \frac{t_1^1 t_2^2}{k} + t_1^3), \quad T_{12}(1, t_1^1 + t_2^1, t_2^2, t_2^3 + t_1^3), \\ & T_{21}(1, t_1^1 + t_2^1, t_2^2, t_1^1 t_2^2 + t_1^3 + t_2^3), \quad T_{23}(1, t_2^1, t_2^2, t_2^3 + \frac{t_1^1 t_2^2}{k}), \\ & T_{213} = T_{231}(1, t_1^1 + t_2^1, t_2^2, (k+1)\frac{t_1^1 t_2^2}{k} + t_1^3 + t_2^3). \end{aligned} \tag{2.24}$$

In [25] we standardly determined the volume of the Nil parallelepiped  $\widetilde{\mathcal{F}(1)}$ . Analogously we get the volume formula of  $\widetilde{\mathcal{F}(k)}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) by the usual method:

$$\iiint_{\widetilde{\mathcal{F}(k)}} \sqrt{\det(g_{ij})} dx dy dz = Vol(\widetilde{\mathcal{F}(k)}) = \frac{1}{k} \int_0^{t_2^2} \int_0^{t_1^1} |t_1^1 \cdot t_2^2| dx dy = \frac{(t_1^1 \cdot t_2^2)^2}{k}. \tag{2.25}$$

If parameter  $k$  is given, from this formula it can be seen that the volume of a Nil parallelepiped depends on two parameters, i.e. on its projection into the  $[x, y]$  plane.

## 2.6 Translation-like bisector surfaces

Our further goals are to examine and visualize the Dirichlet-Voronoi cells and the packing and covering problems of Nil geometry. In order to study the above questions we have to determine the "faces" of the  $D - V$  cells that are parts of bisector (or equidistant) surfaces of given point pairs. The definition below comes naturally:

**Definition 2.6.** The equidistant surface  $\mathcal{S}_{P_1 P_2}$  of two arbitrary points  $P_1, P_2 \in \text{Nil}$  consists of all points  $P' \in \text{Nil}$ , for which  $d^t(P_1, P') = d^t(P', P_2)$ .

It can be assumed by the homogeneity of Nil that the starting point of a given translation curve segment is  $E_0 = P_1 = (1, 0, 0, 0)$  and the other endpoint will be given by its homogeneous coordinates  $P_2 = (1, a, b, c)$ . We consider the translation curve segment  $t_{P_1 P_2}$  and determine its parameters  $(\phi, \theta, r)$  expressed by the real coordinates  $a, b, c$  of  $P_2$  (see [28] and [31]).

*In order to determine the translation-like bisector surface  $\mathcal{S}_{P_1 P_2}(x, y, z)$  of two given point  $E_0 = P_1 = (1, 0, 0, 0)$  and  $P_2 = (1, a, b, c)$  we define the translation  $\mathbf{T}_{P_2}$  as elements of the isometry group of Nil, that maps the origin  $E_0$  onto  $P_2$  (see Fig. 6.).*

This isometrie  $\mathbf{T}_{P_2}$  and its inverse (up to a positive determinant factor) can be given by:

$$\mathbf{T}_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{P_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b & ab - c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

and the images  $\mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_i)$  of points  $P_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) are the following (see also Fig. 6):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_1 = E_0) &= P_1^2 = (1, -a, -b, ab - c), \quad \mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_2) = E_0 = (1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_3) &= P_3^2 = (1, (x - a), (y - b), a(b - y) - c). \end{aligned} \quad (2.27)$$

It is clear that  $P_3 = (1, x, y, z) \in \mathcal{S}_{P_1 P_2}$  iff  $d^t(P_1, P_3) = d^t(P_3, P_2) \Rightarrow d^t(P_1, P_3) = d^t(E_0, P_3^2)$  where  $P_3^2 = \mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_3)$ .

This method leads to the equations of the equidistant surface  $\mathcal{S}_{P_1 P_2}(x, y, z)$  of two points  $P_1 = (1, 0, 0, 0)$  and  $P_2 = (1, a, b, c)$  in Nil space (see Fig. 6 and [31]):

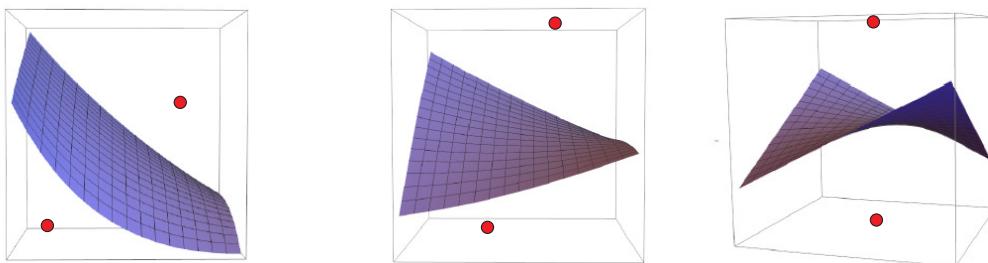


Fig. 6. Translation-like bisectors (equidistant surfaces) of some point pairs  $(P_1, P_2)$

## 2.7 Lattice-like translation ball packings

Let  $\mathcal{B}_\Gamma^t(r)$  denote a translation ball packing of Nil space with balls  $B^t(r)$  of radius  $r$  where their centres give rise to a Nil point lattice  $\Gamma(\tau_1, \tau_2, k)$ .  $\widetilde{\mathcal{F}(k)}_O$  is an arbitrary Nil parallelepiped at the origin of this lattice. The images of  $\widetilde{\mathcal{F}(k)}_O$  by our discrete translation group  $\mathbf{L}(\tau_1, \tau_2, k)$  covers Nil without open overlap. For the density of the packing it is sufficient to relate the volume of the optimal ball to that of the solid  $\widetilde{\mathcal{F}(k)}_O$ . Analogously to the Euclidean case it can be defined the density  $\delta(r, \tau_1, \tau_2, k)$  of the lattice-like translation ball packing  $\mathcal{B}_\Gamma^t(r, k)$ :

**Definition 2.7.**

$$\delta(r, \tau_1, \tau_2, k) := \frac{Vol(\mathcal{B}_\Gamma^t(r) \cap \widetilde{\mathcal{F}(k)}_0)}{Vol(\widetilde{\mathcal{F}(k)}_0)}, \quad (2.28)$$

if the balls do not overlap each other.

**Remark 2.4.** By definition of the Nil lattice  $\mathbf{L}(\tau_1, \tau_2, k)$  (see Definition 2.5) the orbit space  $\text{Nil}/\mathbf{L}(\tau_1, \tau_2, k)$  is a compact Nil manifold, and (see Section 2.1),

$$Vol(\mathcal{B}_\Gamma^t(r) \cap \widetilde{\mathcal{F}(k)}_0) = Vol(B^t(S^t(r))).$$

## 2.8 On the optimal lattice-like translation ball packing

We consider an arbitrary point lattice  $\Gamma_O(\tau_1, \tau_2, k)$  in Nil with starting point  $O$ .

First we introduce our final optimal arrangement  $\mathcal{B}_\Gamma^t(r)$  of translation balls  $B^t(r)$ , (see Fig. 7) where the following equations hold:

- (a)  $k = 1$ ,  $d^t(O, T_3) = 2r$ ,
  - (b) The ball  $B_0^t(r)$  touches the balls  $B_{T_1}^t(r)$  and  $B_{T_2}^t(r)$ ,
  - (c) The ball  $B_{T_3}^t(r)$  touches the balls  $B_{T_1}^t(r)$  and  $B_{T_2}^t(r)$
  - (d) The ball  $B_{T_1}^t(r)$  touches the ball  $B_{T_2}^t(r)$ .
- (2.29)

These assumptions exclude the overlap of any two balls by the lattice structure. The complete Nil symmetry group of the above optimal packing has already been described as well in [12].

Here  $d^t$  is the translation distance function in Nil. By continuity of the distance function, it follows that there is a (unique) solution for  $t_i^j$  and  $r$ .

We have denoted by  $\mathcal{B}_\Gamma^t(r_d)$  this translation ball packing of the balls  $B^t(r_d)$ . We get the following solution by systematic approximation, where the computations were carried out by *Maple V Release 10* up to 30 decimals:

$$\begin{aligned} t_1^{1,d} &\approx 1.31225131; \quad t_1^{3,d} = \frac{t_3^3}{2}; \quad t_2^{1,d} \approx 0.65612565; \\ t_2^{2,d} &\approx 1.13644297; \quad t_2^{3,d} \approx 1.11847408; \\ r_d &\approx 0.74564939, \quad t_3^{3,d} = 2r_d. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Here index  $d$  refers to the densest packing. This translation ball packing can be realized in Nil because a ball of radius  $r_d$  is convex in affine sense and this packing can be generated by the

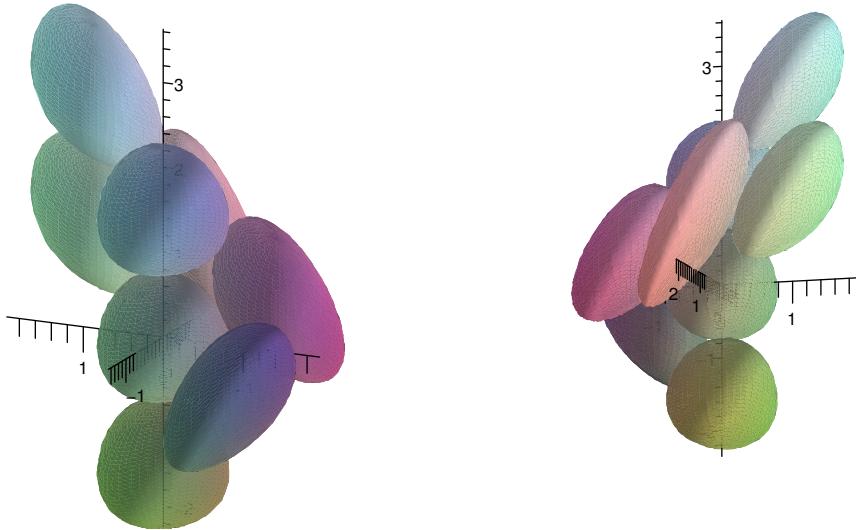


Fig. 7. The optimal lattice-like translation ball packing in Nil space

translations  $\Gamma(\tau_1^d, \tau_2^d, \tau_3^d, 1)$ . Thus we obtain the neighbouring balls around an arbitrary ball of the packing  $\mathcal{B}_\Gamma^t$ , the kissing number of the balls is 14. Fig. 7 shows the typical arrangement of some balls from  $\mathcal{B}_\Gamma^t(r_d)$  in our model. We get ball "columns" in  $z$ -direction and a "hexagonal" lattice projection in  $[x, y]$ -plane.

By formulas (2.21), (2.25) and by Definition 2.7 we can compute the density of this ball packing:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\widetilde{\mathcal{F}(1)_0}) &\approx 2.22397203, \quad \text{Vol}(\mathcal{B}_\Gamma^{t,d}) \approx 1.73657124, \\ \delta_\Gamma^d &\approx 0.78084221 \end{aligned} \quad (2.31)$$

**Theorem 2.4.** The ball arrangement  $\mathcal{B}_\Gamma^d$  given in formulas (2.29-30) provides the densest lattice-like translation ball packing in Nil space if  $r \in (0, r_d]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

We have denoted the density of the densest translation ball arrangement  $\mathcal{B}_\Gamma^{opt}$  by  $\delta_\Gamma^{opt}$ . We can admire the estimate of L. FEJES TÓTH [4], [28] in the next

**Theorem 2.5.** If  $r \in [r_d, \infty)$  and  $k \in \mathbb{N}$ , then

$$\delta_\Gamma^d \leq \delta_\Gamma^{opt} < \frac{4\pi}{3e \sin \frac{\pi f}{e} \left( \tan^2 \frac{\pi f}{2e} \tan^2 \frac{\pi v}{2e} - 1 \right)}, \quad (2.32)$$

where  $f = 14$ ,  $v = 24$ ,  $e = 36$ .

**Remark 2.5.** 1.  $\delta_\Gamma^d \approx 0.78084221 \leq \delta_\Gamma^{opt} < 0.78889440$ .

2. There are Euclidean polyhedra containing unit sphere with parameters  $f = 14$ ,  $v = 24$ ,  $e = 36$ , where

$$5.30969695 < \text{Vol}(\widetilde{\mathcal{F}(k)_0}) < 5.36445154$$

**Corollary 2.1.** In cases if the number of the faces of the parallellohedron  $\mathcal{P}(k)_0$  is less than 14 then from the above formula (4.7) follows that  $F > 16.255054 \Rightarrow \text{Vol}(\mathcal{P}(k)_0) > 5.418351231 \Rightarrow \delta(r, \tau_1, \tau_2, k) < \delta_\Gamma^d \approx 0.78084221$ .  $\square$

**Corollary 2.2.** The kissing number of a ball packing in the Nil space is less than or equal to 14 and the equality is realizable only at ball arrangement  $\mathcal{B}_\Gamma^d$  given in formulas (1.29-30).

**Conjecture 2.1.** The ball arrangement  $\mathcal{B}_\Gamma^d$  given in formulas (2.29-30) provides the densest translation ball packing in Nil space.

### 3 Sol geometry, translation curves, spheres, balls and ball packings

Sol is an affine metric geometry of projective metric signature  $(0, -, +, +)$  (see Table 1), again with

$$(\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^0 \\ \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Sol is derived by an affine Lie transform group with right action on points  $(a, b, c)$  or in homogeneous coordinates

$$(1; a, b, c) \rightarrow (1; a, b, c) \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1; x + ae^{-z}, y + be^z, z + c). \quad (3.2)$$

The invariant arc-length-square is usually derived by pull-back with inverse of (3.2). Here we only remark that the geodesic lines are not elementarily integrable curves. But the later Sol translation curves are elementary, as an essential benefit. We refer to [13], [26] for more details.

$$(ds)^2 = (dx)^2 e^{2z} + (dy)^2 e^{-2z} + (dz)^2. \quad (3.3)$$

Then the complete isometry group of Sol can be defined by extending the above translations with a finite linear stabilizer subgroup  $G_0$  of the origin which leaves invariant the quadratic differential form (3.3). We have two generators for this  $G_0$ . First, symbolically, then in (3.2)-type matrix form. These involutive (involutory) two isometries are the following:

$y \leftrightarrow -y$  reflection in the plane  $(x, z)$ ; and  $x \leftrightarrow y$   $z \leftrightarrow -z$  half-turn about bisector line of axes  $x$  and  $y$ , or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

respectively. That means  $G_0 = D_4$  is a discrete dihedral group of 8 elements. Its cyclic subgroup  $C_4$  of order 4 is generated by the product of the former two generators in (3.4), a so-called rotatory reflection

$$C_4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Then } C_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

by a usual half turn about the  $z$ -axis, defines also a typical stabilizer of second order. In analogy to Euclidean geometry  $E^3$ , we can define a discrete lattice  $\Gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ , generated by two commuting horizontal translations

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= (t_1^1, t_1^2, 0) \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 := (t_2^1, t_2^2, 0) \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix}, \text{ and by} \\ \tau_3 &:= (t_3^1, t_3^2, t_3^3), \text{ or } \tau_3 : \begin{pmatrix} 1 & t_3^1 & t_3^2 & t_3^3 \\ 0 & e^{-t_3^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t_3^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

The third one is, in more exact (3.2)-type matrix form with non-zero vertical component

$$t_3^3 = \log \left( \frac{N + \sqrt{N^2 - 4}}{2} \right), \text{ where } N := p + s > 2, \quad (3.7)$$

by the next “strange-nice” Theorem 3.1 (see also Fig. 8.). This  $N$  is a natural parameter fixed for a lattice  $\Gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  above. All these are essentially related with the commutator relations in the characterizing

**Theorem 3.1.** ([13], [23]) Each lattice  $\Gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  of **Sol** has a group presentation

$$\Gamma = \Gamma(\Phi) = \left\{ \tau_1, \tau_2, \tau_3 : [\tau_1, \tau_2] = \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} \tau_1 \tau_2 = 1, \tau_3^{-1} \tau_1 \tau_3 = \tau_1 \Phi^T, \tau_3^{-1} \tau_2 \tau_3 = \tau_2 \Phi^T \right\},$$

where  $\Phi = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2 \mathbf{Z}$  with  $\text{tr}(\Phi) =: p + s > 2$ ,  $ps - qr = 1$ , such that the above matrix  $\begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{pmatrix} := T \in \mathbf{GL}_2 \mathbf{R}$  satisfies

$$T^{-1} \Phi T = \begin{pmatrix} e^{-t_3^3} & 0 \\ 0 & e^{t_3^3} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

that is just a hyperbolic mapping in the Minkowski base plane  $M^2$  (Fig. 8), however now by (3.3), fixed by the component  $t_3^3$  by (3.7) in  $\tau_3$  above.  $\square$

This is a very concise characterization that has some consequences.

- a. **Sol** has Minkowski base planes (of special relativity but by (5.3)), depending on a natural parameter  $N$  by (3.7) and Theorem 3.1.
- b. For the Minkowski base lattice  $(\tau_1, \tau_2)$  by  $T$  above we have some freedom in choosing  $\tau_1(t_1^1, t_1^2)$  but then

$$\frac{t_2^1}{t_1^1} = \frac{N - 2p - \sqrt{N^2 - 4}}{2q}, \quad \frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{N - 2p + \sqrt{N^2 - 4}}{2q} \quad (3.9)$$

determine  $\tau_2(t_2^1, t_2^2)$  by  $(N, p, q)$  in Theorem 3.1.

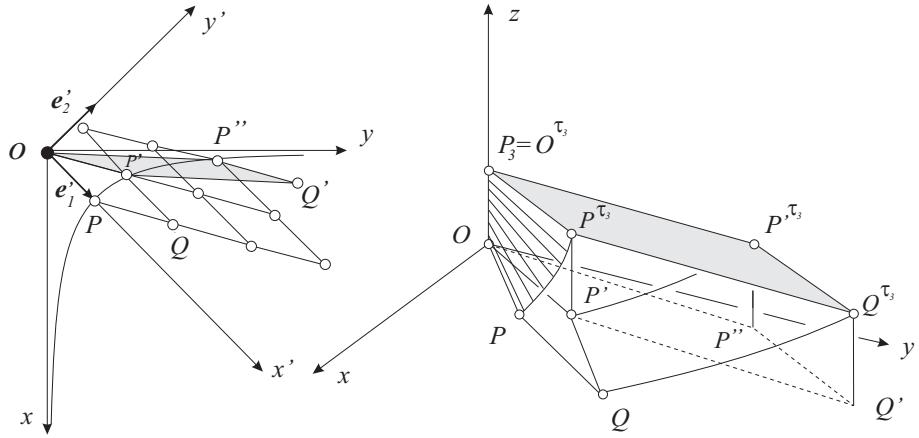


Fig. 8. A fundamental lattice of **Sol** for  $N = 3$  of fundamental "parallelepiped" with continuous translation from  $(OPQP') \rightarrow (OPQP')^{\tau_3}$

c. The number theoretical form of  $N$  tells us the possibilities for stabilizer symmetry group  $\mathbf{G}_0$  of  $\Gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  together with

$$\begin{aligned} (t_3^1, t_3^2) &= (0, 0) \bmod \langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \text{ as main case I, or} \\ (t_3^1, t_3^2) &\neq (0, 0) \bmod \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \text{ main case II.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

d. We can define affine equivalence of lattices  $\Gamma(N, p, q)$ , with finitely many affine types for given  $N$ , but we prefer a seemingly coarser algorithmic equivalence into so-called Bravais types [13] in

**Theorem 3.2.** The lattices in the above main cases *I* and *II*, for fixed natural parameter  $2 < N \in \mathbb{Z}$ , form at most 17 (seventeen) Bravais types in **Sol** space.  $\square$

This is in analogy to the 14 Bravais types of the Euclidean lattices in  $\mathbf{E}^3$ .  $N = 6$  is the smallest natural number for that all Bravais types are realizable.

For example, the so called fundamental lattices, with

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & N \end{pmatrix} (t_3^1, t_3^2) = (0, 0) \bmod \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \quad (3.11)$$

by (3.9), belong to type *I/1* of primitive monoclinic lattice with point group  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{C}_2$  by (3.5), see also Fig. 11 for  $N = 3$ . To these fundamental lattices we make some remarks.

**Remark 3.1.** The orbit space  $\mathbf{Sol}/\Gamma$ , with lattice  $\Gamma$  above by (3.11) and Theorem 3.1. (just in Euclidean analogy), defines a **Sol** space form series  $\mathcal{M}_N$  with fundamental group by (3.8) and presentation

$$\Gamma_N = \left\{ \tau_1, \tau_2, \tau_3 : 1 = \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} \tau_1 \tau_2 = \tau_3^{-1} \tau_1 \tau_3 \tau_2^{-1} = \tau_3^{-1} \tau_2^{-1} \tau_3 \tau_2^N \tau_1 \right\}.$$

Then, by expressing  $\tau_2 = \tau_3^{-1} \tau_1 \tau_3$  and changing to notations  $\tau_1 =: x$  and  $\tau_3 =: y$  we get a 2-generator fundamental group with presentation

$$\Gamma_N = \left\{ x, y : xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}yxy^{-1} = 1 = yxy^{-2}xyx^{-N} \right\}. \quad (3.12)$$

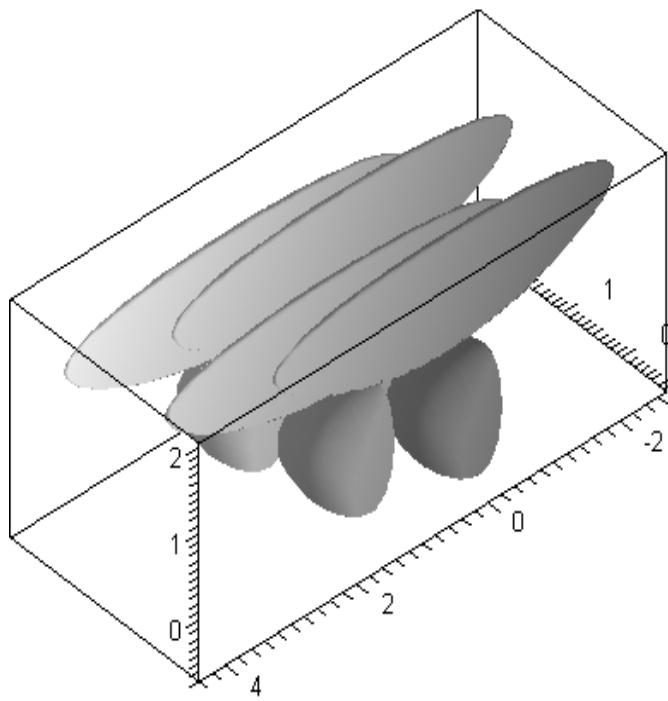


Fig. 9. The densest translation ball packing by fundamental lattices of Bravais type  $I/1$  in **Sol** space  $N = 4$  (see [26])

In the joint work [3] we gave some topological characterizations of these space forms  $\mathcal{M}_N$  which can wear **Sol** metrics by (3.3) with "tetrahedron" fundamental domains.  $\square$

### 3.1 Translation-like bisector surfaces

One of our further goals is to examine and visualize the Dirichlet-Voronoi cells of **Sol** geometry. In order to get D-V cells we have to determine its "faces" that are parts of bisector (or equidistant) surfaces of given point pairs. The definition below comes naturally:

**Definition 3.1.** The equidistant surface  $\mathcal{S}_{P_1 P_2}$  of two arbitrary points  $P_1, P_2 \in \mathbf{Sol}$  consists of all points  $P' \in \mathbf{Sol}$ , for which  $d^t(P_1, P') = d^t(P', P_2)$ .

It can be assumed by the homogeneity of **Sol** that the starting point of a given translation curve segment is  $E_0 = P_1 = (1, 0, 0, 0)$ . The other endpoint will be given by its homogeneous coordinates  $P_2 = (1, a, b, c)$ . We consider the translation curve segment  $t_{P_1 P_2}$  and we could determine its parameters  $(\phi, \theta, t)$  expressed by the real coordinates  $a, b, c$  of  $P_2$  using the equation system (3.12) (see [22]). *In order to determine the translation-like bisector surface  $\mathcal{S}_{P_1 P_2}(x, y, z)$  of two given point  $E_0 = P_1 = (1, 0, 0, 0)$  and  $P_2 = (1, a, b, c)$  we define translation  $\mathbf{T}_{P_2}$  as elements of the isometry group of **Sol**, that maps the origin  $E_0$  onto  $P$  (see Fig. 2), moreover let  $P_3 = (1, x, y, z)$  a point in **Sol** space.*

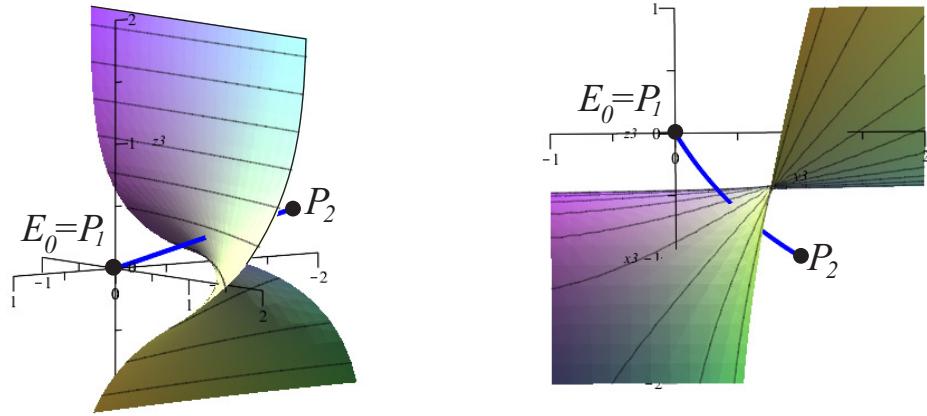


Fig. 10. Translation-like bisector (equidistant surface) with  $P_1 = (1, 0, 0, 0)$  and  $P_2 = (1, -1, 1, 1/2)$ .

This isometry  $\mathbf{T}_{P_2}$  and its inverse (up to a positive determinant factor) can be given by:

$$\mathbf{T}_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & e^{-c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{P_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -ae^c & -be^{-c} & -c \\ 0 & e^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

and the images  $\mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_i)$  of points  $P_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) are the following:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_1 = E_0) &= P_1^2 = (1, -ae^c, -be^{-c}, -c), \quad \mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_2) = E_0 = (1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_3) &= P_3^2 = (1, (x-a)e^c, (y-b)e^{-c}, (z-c)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

It is clear that  $P_3 = (1, x, y, z) \in \mathcal{S}_{P_1 P_2}$  iff  $d^t(P_1, P_3) = d^t(P_3, P_2) \Rightarrow d^t(P_1, P_3) = d^t(E_0, P_3^2)$  where  $P_3^2 = \mathbf{T}_{P_2}^{-1}(P_3)$ .

This method leads to

**Lemma 3.1.** The implicit equation of the equidistant surface  $\mathcal{S}_{P_1 P_2}(x, y, z)$  of two points  $P_1 = (1, 0, 0, 0)$  and  $P_2 = (1, a, b, c)$  in Sol space (see Fig. 10):

1.  $c \neq 0$

$$\begin{aligned} z \neq 0, c : \quad &\frac{|c-z|}{|e^c - e^z|} \sqrt{(a-x)^2 e^{2(c+z)} + (e^c - e^z)^2 + (b-y)^2} = \\ &= \frac{|z|}{|e^z - 1|} \sqrt{x^2 e^{2z} + (e^z - 1)^2 + y^2}, \\ z = c : \quad &\sqrt{(x-a)^2 e^{2c} + (y-b)^2 e^{-2c}} = \frac{|z|}{|e^z - 1|} \sqrt{x^2 e^{2z} + (e^z - 1)^2 + y^2}, \\ z = 0 : \quad &\frac{|c|}{|e^c - 1|} \sqrt{(a-x)^2 e^{2c} + (e^c - 1)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

2.  $c = 0$

$$\begin{aligned}
 z \neq 0 : & \frac{|z|}{|e^z - 1|} \sqrt{(a-x)^2 e^{2z} + (e^z - 1)^2 + (b-y)^2} = \\
 & = \frac{|z|}{|e^z - 1|} \sqrt{x^2 e^{2z} + (e^z - 1)^2 + y^2} \Leftrightarrow e^{2z} a(a-2x) + b(b-2y) = 0, \\
 z = 0 : & \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow xa + yb - \frac{a^2 + b^2}{2}. \square
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

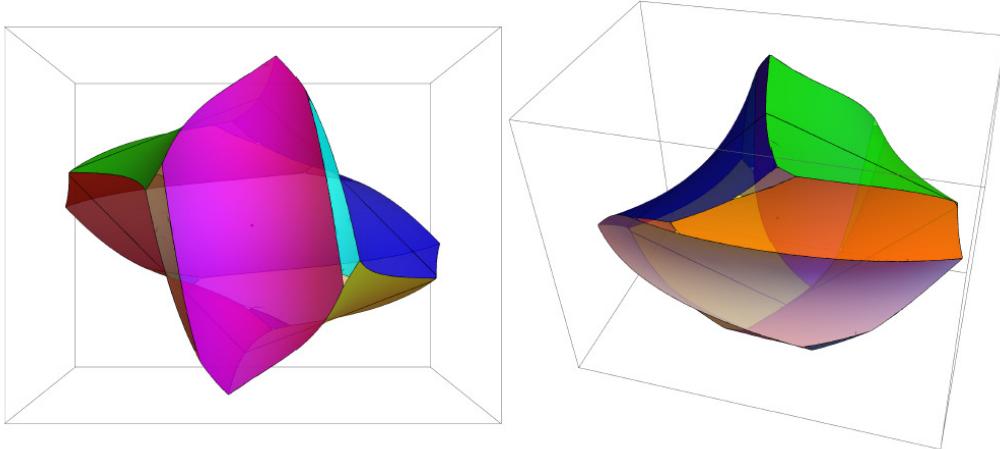


Fig. 11. Translation-like Dirichlet-Voronoi cell centred at the origin related to a type of fundamental lattices

## 4 Conclusion

In the 8 homogeneous Thurston geometries (Table 1) one can introduce translations, mapping any point onto any other point. Then arc-length-square and Riemann metric can be introduced by pull back transform. Consider a unit tangent vector at an arbitrarily distinguished origin. Translations carry this vector to a tangent vector any other point. If a curve  $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$  has just the translated vector as its tangent vector at each point, then the curve is called a translation curve. This assumption leads to a system of first order differential equations. Thus translation curves are simpler than geodesics and differ from them in Nil,  $\widetilde{\text{SL}_2\mathbf{R}}$  and Sol geometries.

In  $E^3$ ,  $S^3$ ,  $H^3$ ,  $S^2 \times \mathbf{R}$  and  $H^2 \times \mathbf{R}$  geometries, the translation and geodesic curves coincide with each other. But in Nil,  $\widetilde{\text{SL}_2\mathbf{R}}$  and Sol spaces, translation curves are more natural than geodesics in many aspects.

In our opinion, translational distances play just as important a role in the three Thurston geometries as geodetic distances. As we have indicated here and in the References, the same problems can be interesting for both type concept. The differences and analogies give rise newer interesting questions.

The authors thank the Chief Editor Professor Daniela Velichova for the kind invitation to publishing this paper in the Journal of great tradition, G - Slovenský Časopis pre Geometriu a Grafiku with the Best Wishes to the Staff of the Journal.

## References

- [1] BÖLCSKEI, A., MOLNÁR, E. Classification and projective metric realizations of tile-transitive triangle tilings. In *J. Geometry and Graphics* 11/2, 2007, pp. 137-163.
- [2] BRODaczewska, K. *Elementargeometrie in Nil*. Dissertation (Dr. rer. nat.) Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Dresden. 2014.
- [3] CAVICHIOLI, A., MOLNÁR, E., SPAGGIARI, F., SZIRMAI, J. Some tetrahedron manifolds with Sol geometry. In *J. Geometry*, 105/3, 2014, pp. 601-614.
- [4] FEJES TÓTH, L. *Regular Figures*, Pergamon Press, 1964
- [5] KATONA, J., MOLNÁR, E., PROK, I., SZIRMAI, J. Visualization with visibility of higher dimensional and non-Euclidean geometries. In *Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics*, H. Schröcker, M. Hustý (ed.); Innsbruck University Press, Innsbruck, No. 60, 10 pages, 2014, ISBN 978-3-902936-46-2.
- [6] MOLNÁR, E., SCHULTZ, B. Geodesic lines and spheres, densest(?) geodesic ball packing in Nil geometry. In *Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics*, 2015, pp. 177-185.
- [7] MOLNÁR, E. Projective Metrics and hyperbolic volume. In *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, 32, 1989, pp. 127-157.
- [8] MOLNÁR, E. Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations. In *Acta Math. Hung.*, 59/1-2, 1991, pp. 175-216.
- [9] MOLNÁR, E. Combinatorial construction of tilings by barycentric simplex orbits (D symbols) and their realizations in Euclidean and other homogeneous spaces. In *Acta Cryst.*, 2005 A61, pp. 541–552.
- [10] MOLNÁR, E. The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries. *Beitr. Alg. Geom., (Contr. Alg. Geom.)*, 38/2, 1997, pp. 261-288.
- [11] MOLNÁR, E. On projective models of Thurston geometries, some relevant notes on Nil orbifolds and manifolds. In *Siberian Electronic Mathematical Reports*, <http://semr.math.nsc.ru>, 7, 2010, pp. 491-498.
- [12] MOLNÁR, E., SZIRMAI, J. Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries. In *Symmetry Cult. Sci.*, 21/1-3, 2010, pp. 87-117.
- [13] MOLNÁR, E., SZIRMAI, J. Classification of Sol lattices. In *Geom. Dedicata*, 161/1, 2012, pp. 251-275, DOI: 10.1007/s10711-012-9705-5.
- [14] MOLNÁR, E., SZILÁGYI, B. Translation curves and their spheres in homogeneous geometries. In *Publ. Math. Debrecen.*, 78/2, 2011, pp. 327-346.
- [15] MOLNÁR, E., PROK, I., SZIRMAI, J. Classification of tile-transitive 3-simplex tilings and their realizations in homogeneous spaces. In A. Prékopa and E. Molnár, (eds.). *Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume, Mathematics and Its Applications*, Springer, Vol. 581, 2006, pp. 321-363.
- [16] MOLNÁR, E., SZIRMAI, J., VESNIN, A. Packings by translation balls in  $\widetilde{\text{SL}_2\mathbf{R}}$ . In *J. Geometry* 105/2, 2014, pp. 287-306, DOI: 10.1007/s00022-013-0207-x.
- [17] PALLAGI, J., SCHULTZ, B., SZIRMAI, J. Equidistant surfaces in Nil space. In *Studies of the University of Zilina, Mathematical Series*, 25, 2011, pp. 31–40.

- [18] PALLAGI, J., SCHULTZ, B., SZIRMAI, J. Visualization of geodesic curves, spheres and equidistant surfaces in  $S^2 \times \mathbf{R}$  space. In *KoG*, 14, 2010, pp. 35-40.
- [19] PALLAGI, J., SCHULTZ, B., SZIRMAI, J. Equidistant surfaces in  $H^2 \times \mathbf{R}$  space. *KoG*, 15, 2011, pp. 3-6.
- [20] SCHULTZ, B., SZIRMAI, J. On parallelohedra of Nil-space. In *Pollack Periodica*, 7. Supplement 1, 2012, pp. 129-136.
- [21] SZIRMAI, J. On lattice Coverings of Nil space by Congruent Geodesic Balls. In *Mediterr. J. Math.* 10, 2013, pp. 953-970.
- [22] SZIRMAI, J. Bisector surfaces and circumscribed spheres of tetrahedra derived by translation curves in Sol geometry. In *New York J. Math.*, 25, 2019, pp. 107-122.
- [23] SCOTT, P. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15, 1983, pp. 401-487.
- [24] SZIRMAI, J. The optimal ball and horoball packings to the Coxeter honeycombs in the hyperbolic  $d$ -space. In *Beitr. Alg. Geom.*, (Contr. Alg. Geom.), 48/1, 2007, pp. 35-47.
- [25] SZIRMAI, J. The densest geodesic ball packing by a type of Nil lattices. In *Beitr. Alg. Geom.*, (Contr. Alg. Geom.), 48/2, 2007, pp. 383-397.
- [26] SZIRMAI, J. The densest translation ball packing by fundamental lattices in Sol space. In *Beitr. Alg. Geom.*, (Contr. Alg. Geom.), 51/2, 2010, pp. 353-373.
- [27] SZIRMAI, J. Geodesic ball packing in  $S^2 \times \mathbf{R}$  space for generalized Coxeter space groups. In *Beitr. Alg. Geom.*, (Contr. Alg. Geom.), 52, 2011, pp. 413-430.
- [28] SZIRMAI, J. Lattice-like translation ball packings in Nil space. In *Publ. Math. Debrecen*, 80/3-4, 2012, pp. 427-440, DOI 10.5486/PMD.2012.5117.
- [29] SZIRMAI, J. A candidate to the densest packing with equal balls in the Thurston geometries. In *Beitr. Algebra Geom.*, 55/2, 2014, pp. 441-452, DOI 10.1007/s13366-013-0158-2.
- [30] THURSTON, W. P. (and LEVY, S. editor) *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, Vol.1, 1997.
- [31] VRÁNICS, A., SZIRMAI, J. Lattice coverings by congruent translation balls using translation-like bisector surfaces in Nil Geometry. In *KoG*, 23, 2019, pp. 6-17.
- [32] WEEKS, J. R. Real-time animation in hyperbolic, spherical, and product geometries. In *A. Prékopa and E. Molnár, (eds.). Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume, Mathematics and Its Applications*, Springer, Vol. 581, pp. 287-305, 2006.

---

**Dr. Emil Molnár, PhD., Dr. Jenő Szirmai, PhD.**

Budapest University of Technology and Economics,  
Institute of Mathematics, Department of Geometry  
Müegyetem rkp. 3., H-1111 Budapest, Hungary  
e-mail: emolnar@math.bme.hu, szirmai@math.bme.hu

# Objavia sa Euklidove *Základy* (konečne v slovenčine) na knižničnom trhu v roku 2022?

Zita Sklenáriková

## Abstrakt

Výnimočná a už dlhšie očakávaná publikácia prekladu Euklidových *Základov* mala vyjsť na jeseň 2021 vo vydavateľstve Perfekt a. s. Dielo je výsledkom viacročnej práce profesora Jána Čižmára, PhD. na preklade originálneho textu, ako aj na vypracovaní komentárov, ktoré sú neoddeliteľnou časťou diela tým, že významne uľahčujú pochopenie textu v dnešnom výklade (hlavne pokiaľ ide o terminológii).

Ide o najvýznamnejšie dielo starovekej matematiky, ktoré okolo roku 300 pred n. l. vytvoril grécky učenec Euklides pôsobiaci vo vrcholnej vedecko-umeleckej inštitúcii Museion v Egyptskej Alexandrii.

Dielo je prvou historicky úspešnou realizáciou Aristotelovej koncepcie výstavby vedeckej teórie špeciálnej vedy. Je systematickým záchytením celej súdobej vedeckej matematiky spracovanej axiomaticko-deduktívou metódou.

**Kľúčové slová:** Euklidove *Základy*, axiomaticko-deduktívna metóda výstavby vedeckej teórie

## Abstract

An exceptional and a long time expected translation of the Euclid's Elements was to be published last autumn by the publishing house Perfekt, a. s. The translation and the commentaries were elaborated by professor Ján Čižmár who spent several years on the preparation of this work. The commentaries represent an indispensable component of the complete translation as they significantly facilitate understanding of the original text in today's terminological explanation.

The Elements are the most famous and significant work of the ancient mathematics composed about 300 BC by Greek scholar Euclid – a notable scientist, teacher and author in the top scientific-artistic institution Museion in Egyptian Alexandria.

The work is the first historically successful completion of the Aristotelian concept of a scientific theory in a particular science. It provides a systematic survey of all contemporary scientific mathematics treated by the axiomatic-deductive method.

**Keywords:** Euclid's Elements, axiomatic-deductive method

## 1 Prefazione

Vrátim sa ešte (nie samoúčelne) ku knihe *Dejiny matematiky* napísanej profesorom Čižmárom, ktorá vyšla dvakrát (prvé vydanie r. 2017, druhé r. 2020) a zožala mimoriadny úspech. Inak to ani nemohlo byť – profesora Čižmára zdobila vždy múdrost', korektnosť', skromnosť', prajnosť' a predovšetkým nesmierna pracovitosť'.

Z môjho pohľadu bolo prepisovanie *Základov* do elektronickej podoby oveľa náročnejšie, ako to bolo v práci na *Dejinách matematiky*. *Dejiny matematiky* pre mňa boli veľmi zaujímavou

históriou. Ešte stále po nich siaham, teraz hlavne v súvislosti so záverečnými prácami nad Euklidovými *Základmi*. Preto by som potenciálnym čitateľom *Základov* rada poradila, že by bolo veľmi užitočné (ešte pred čítaním prvých riadkov diela) vopred sa oboznámiť s úrovňou matematického poznania v antickom Grécku v čase Euklidovho pôsobenia v Museione, aj so všetkými výsledkami, ktoré dosiahli významní grécki matematici v iónskom období (cca 600 rokov p. n. l. – 450 rokov p. n. l.) a v aténском období (cca 450 rokov p. n. l. – 300 rokov p. n. l.). Všetko toto možno nájsť vo štvrtej kapitole spomenutých Dejín matematiky s názvom „Matematika v starovekom Grécku a helenistickom svete.“

Priznám sa, že táto práca bola mojom prvou skúsenosťou s úplným prekladom *Základov*. Vedela som, že forma jazyka *Základov* je rétorická, značne vzdialená od dnešnej terminológie. Napriek tomu som neočakávala takú záplavu „definícií“ temer v každej knihe *Základov*. Formulácie úloh si vyžadovali dokonalé poznanie definícií; udržať si všetky v hlave na jedno prečítanie bolo nereálne! Návrat k definíciam tak spôsoboval isté, i keď nie veľké zdržanie.

Druhým problémom bola nerozvinutá symbolika (temer žiadna). Jedinými symbolmi boli písmaná zväčša veľkej abecedy pre všetky základné útvary (body, priamky, roviny; priamky niekedy označené ako úsečky dvoma krajnými bodmi, inokedy len jedným krajným bodom. U čitateľov to nemôže vyvolat žiadnen zmätok, lebo zadanie každej úlohy je ilustrované veľmi zrozumiteľným obrázkom. To, čo robilo problémy mne, bola skutočnosť, že v zápise riešenia úlohy sa to „hemžilo“ označeniami temer v každom riadku. Nuž, a keď sedenie za počítačom presiahlo dobrých párov hodín, zákonite som od únavy preskočila zopár riadkov v texte, ktorý som prepisovala z rukopisu prekladateľa. O opravách ani nejdem hovoriť; už veru neviem, koľkokrát som všetko prečítala! A to ešte nie je koniec, čaká nás oboch ešte jedno (dúfam posledné) čítanie.

Prvá kniha *Základov* bola napísaná v čase prezentácie Dejín matematiky v roku 2017. Profesor Čižmár mal dávno predtým premyslenú koncepciu prekladu *Základov*, aj tvorbu komentárov. Veľmi ho trápilo, že Slovensko je jednou z mála krajín, ktoré nemajú ešte preložené toto jedinečné dielo svetového významu. Preto som sa rozhodla dokumentovať to nasledujúcim výňatkom, ktorý som našla v knihe profesorky Martiny Bečvářovej *Eukleidovy Základy*, jejich vydání a preklady (Dějiny matematiky, svazek 20, Prometheus Praha, 2002).

V texte uvediem len tie preklady, ktoré vznikli po uverejnení novej gréckej edície *Základov* Johana Ludviga Heiberga (1854 – 1928) v rokoch 1883 až 1888. Heibergova edícia zhrnula všetky dostupné poznatky o Euklidových *Základoch* a stala sa ich prvou kritickou verziou, z ktorej vychádzali všetky ďalšie moderné preklady. Reprint tohto slávneho diela vychádzal v Lipsku v rokoch 1969 – 1977. V Európe – a nielen – nastal **boom** prekladov Euklidových *Základov* do národných jazykov. Zatiaľ drží Slovensko veľmi zahanbujúce – posledné miesto v rebríčku národných prekladov *Základov* (žiadnen preklad). Verím, že to už o pári mesiacov pravda nebude (ak nás, znova, nezasiahne nejaká nová pohroma!) a budeme sa všetci tešiť z prezentácie tohto výnimočného diela v slovenčine! (Nová pohroma! ... A to som ešte o vojne na Ukrajine ani nechyrovala ...)

### Johan Ludvig Heiberg (1854 – 1928)

J. L. Heiberg bol slávny dánsky klasický filológ, ktorý bol jedným z najväčších svetových odborníkov na starogrécku matematiku. V rokoch 1896 – 1925 prednášal gréčtinu na kodanskej univerzite, v r. 1880 – 1881 vydal tri zväzky Archimedových prác, druhé vydanie v r. (1910 –

1915) a dva zväzky Apolloniových prác (r. 1891 – 1893). V r. (1883 – 1888) vydal novú grécku edíciu *Základov*. Novšiu, tzv. *kritickú verziu* Euklidových *Základov* zostavil na základe štúdia väčšiny zachovaných gréckych rukopisov. Reprint vychádzal v Lipsku v rokoch (1969 – 1977) a z neho vychádzali temer všetky preklady do národných jazykov.

*Talianiske preklady:* G. Vacca (1916, Florencia), 1. kniha), preklad z gréčtiny; F. Enriques, (1925 – 1936), (knihy I – IV Rím; knihy V – IX, kniha X, Bologna); najnovší taliansky preklad je od autorov A. Frajese, L. Maccioni (1970, Turín).

*Anglické preklady:* G. Phillips, ešte študent (1826, Cambridge – podľa Peyrardovej verzie), knihy I – XII; T. L. Heath (1908 – 1920, Cambridge), knihy I – XIII, trojzväzkové dielo podľa Heibergovej kritickej verzie. Heath bol najväčším anglickým znalcom gréckej matematiky. Jeho preklad sa stal vzorom pre všetky neskoršie edície *Základov* v angličtine.



Obr. 1. Euklides (jeden z hypotetických portrétov)

*Nemecké preklady:* E. S. Unger, (1833, Viedeň) – táto verzia prekonala všetky predchádzajúce nemecké vydania; J. F. Lorenze (1860, Halle), Osem geometrických kníh; M. Simon (1901, Lipsko), 6 kníh – prvé nemecké vydanie preložené z Heibergovej kritickej verzie; Clemence Thaer (1933 – 1937, Lipsko). Kompletný nemecký preklad trinástich kníh *Základov*, ktorý vychádza z Heibergovej kritickej verzie.

*Francúzske preklady:* J. Itard, (1961), knihy VII. až IX., J. G. Kajas (1978), knihy I, II vo verzii grécko-francúzskej. Kompletný preklad ešte donedávna chýbal. Najnovšiu francúzsku edíciu *Základov* vydáva B. Vitrac v edícii knižnice *Dejín vedy* v Paríži (podľa Heibergovej kritickej verzie).

*Ruské preklady:* V Rusku si získali najväčšiu obľubu nemecké a francúzske preklady *Základov*. Nové ruské preklady sa objavili po preklade Heibergovej kritickej verzie v dvadsiatom storočí. Najlepším ruským vydaním *Základov* je trojzväzkové, bohatu komentované vydanie D. D.

Morduchaja-Boltovského (1876 – 1952), ktoré je prekladom Heibergovej kritickej verzie. (Prvý diel, 1948 – kniha I – VI, druhý diel, 1949 – kniha VII – X, tretí diel 1950 – kniha XI – XV).

*Dánske preklady:* V r. 1803 vydal H. C. Linderup preklad prvých šiestich kníh *Základov*. V rokoch 1897 – 1912 boli postupne nahradené kompletným prekladom kritickej Heibergovej verzie Thyrom Eibem.

*Švédske preklady:* V 19. storočí sa objavil veľký počet prekladov *Základov* do švédčiny. V roku 1814 vydal C. L. Lithander preklad ôsmich geometrických kníh; v r. 1836 sa v preklade H. Falka objavilo vydanie prvých šiestich kníh; v r. 1844 vyšlo prvých 6 kníh, toto vydanie sa v r. 1859 doplnilo o preklad kníh XI a XII. V 19. storočí vyšlo niekoľko verzií niektorých kníh *Základov* upravených pre potreby študentov stredných a vysokých škôl.

*Poľské preklady:* V r. 1911 preložil W. Arway prvú knihu *Základov* z Heibergovej kritickej verzie. Kompletný preklad Euklida v 20. storočí v Poľsku nevyšiel.

*Maďarské preklady:* V r. 1856 preložil S. Brassai všetkých 13 kníh Základov do maďarčiny. V rokoch 1903 – 1905 vydal A. Baumgartner preklad prvých 6 kníh z Heibergovej kritickej verzie. V r. 1983 vydali nový maďarský preklad podľa Heibergovej kritickej verzie G. Mayer a A. Szabó.

*Rumunský preklad:* V. Marian – preložené v r. 1939 – 1941 (bez zmienky o knihách).

*Srbské preklady:* A. Bilimovich – preložené v r. 1949 – 1953 (bez zmienky o knihách).

*Japonský preklad:* Ito, Ikeda – preložené v r. 1961 (bez zmienky o knihách).

*Grécky preklad:* J. L. Heiberg, 1969 – 1977 (reprint).

Nezmienila som sa o prekladoch do češtiny. Myslím, že autor diela im venoval pomerne dosť priestoru v *Doslove* za komentármu prekladu; podrobne informácie možno okrem toho získať priamo v zozname Literatúry [4]; [4,1] – [4,5], kde čitateľ nájde autora prekladu, záznam preložených kníh a roky prekladov.

## 2 Intermezzo

Už oddávna mám doma veľmi pútavú knižku o osudoch *Omara Chajjáma* (1048 – 1131), skvelého matematika a astronóma z Nišapúru (Chorasám, časť historickej Perzie, dnešný severovýchodný Irán), jedného z najvýznamnejších komentátorov Euklidových *Základov*, i teórie rovnobežiek. Knihu napísal Javdat Il'jasov pod názvom *Zaklínač hadov*, vyšla v edícii osudy slávnych vo vydavateľstve Tatran r. 1982. Preložila E. Linzbothová, verše prebásnil L. Feldek (z ruského originálu *Zaklinateľ zmej*). Z tiráže vyberám:

Príbeh o ťažkom osude,

úspechoch a neúspechoch,

samopašného šejka, básnika, učenca,

neporovnateľného

**ABU'L FATHA OMARA CHAJJÁMA NIŠÁPÚRSKEHO**

Nech sa ho nedotknú zlé jazyky nepriateľov a priateľov.

Je oheň priateľ alebo nepriateľ? V kozube a v lampe, v pastierskej vatre, v železnej piecke cez zimu je priateľ. Na streche domu, v drevárni, na dozretom obilnom poli je vrah. V rukách dobrého človeka oheň znamená život, v rukách zlého – smrť. Hlavné je, v čich je rukách. Práve tak je to aj s gramotnosťou. Vzdelanie je dobré, kto by o tom pochyboval? Ale jeden píše vedecký traktát, užitočné ponaučenie, verše o láske, druhý – klebetu, udanie ... No kde je oheň, prečo ho už nenesú? Aha, hen pri vchode vzbíkla žltá žiara. Zatiaľ si pripomienime niečo z Euklida, päť základných názorov k piatemu postulátu. Nuž teda, päť všeobecných zásad o porovnaní veličín.

1. Veličiny, ktoré sa rovnajú tej istej veličine, sú si navzájom rovné.
2. Ak k rovnakým veličinám pripočítame rovnaké veličiny, aj výsledky budú rovnaké.
3. Ak od rovnakých veličín odpočítame rovnaké veličiny, aj zvyšky budú rovnaké.
4. Navzájom totožné veličiny sa rovnajú.
5. Celok je viac ako časť.

Všetko sa zdá nesporné. Lenže ... aká bezkrídla je táto geometria! Bojí sa vzletu, nečakanej krivky, nepredvídaneho pohybu! Všetko je v nej tak vysušujúco správne, že nezostáva miesto na hľadanie, na odvážnu prácu rozumu. Niet vybočenia, prudkého osvetenia! Je to geometria kružidla a pravítka! A pomocou nich, ako sa Omar presvedčil pri svojich rovniciach, sa nedá vyriešiť každá úloha. Ved' priestor nemôže pozostávať zo samých vycivených rovín...

Naozaj je Euklides taký nevyvrátitelný? Omar narysoval v duchu zreteľnú čiaru k nesmierne vzdialenej modrej Vege. A vedľa nej druhú. A predlžil ich ďalej, do nekonečna. Či azda v tejto strašnej prieplasti existujúcej podľa zákonov, ktoré zatiaľ nik nepozná, bude tá čiara stále sledovať poslušne prvú, neodváži sa od nej oddialiť, ani sa k nej priblížiť? Napriek strašidelným prepadlinám, vychýleniam a vírom v kozmických priestoroch?

Omar mal v tom čase dvadsaťšesť a pol, Homérova Illias tišic deväťsto dvadsaťpäť rokov.

Astronóm Ptolemaios zomrel pred deväťstom štyrmi rokmi. Hypatiu zabili dvesto štyridsaťpäť rokov po ňom, Akadémiu v Aténach zavreli stoštrnásť rokov po strašnej smrti tejto učenej ženy. Galilei sa narodí o štyristo deväť rokov, Giordana Bruna upália o päťsto dvadsaťšesť rokov.

Piaty postulát. Och! Piaty, piaty, prekliaty postulát. Čertovský starký Euklides, ten zavaril kašu. Omar má prázdro v hlave.

Človek horko-ťažko uloví myšlienku, no len čo sa jej ujme, hned' ju niekto zaplaší!

Teda ... nože si spomeňme na Aristotelovu štvrtú východiskovú poučku; bez nej si s Euklidom neporadíme:

„Dve zbiehavé priamky sa pretínajú, a je nemožné, aby sa dve zbiehavé priamky rozbiehali v smere zbiehavosti.“ Čiže ... dve kolmice na jednu priamku ... sa nemôžu pretínať, pretože v tom prípade, ... Omar sa sklonil, ostrím noža si to načrtol do zmrznutého bieleho piesku, – by sa museli pretínať v dvoch bodoch po oboch stranách danej priamky. Z toho vyplýva, že dve kolmice k jednej priamke sa nemôžu zbiehať.

... Ked' sú v pravouholníku protiľahlé strany rovnaké, nie je potom akákoľvek kolmica na jednu z dvoch kolmíc priamky ich spoločnou kolmicou? Aha! Tu sa niečo črtá. Ak sú dve priamky

rovnobežné podľa Euklida, čiže sa nepretínajú, potom sú to dve kolmice jednej priamky. A ak dve rovnobežky pretína tretia priamka, potom sú vrcholové a vedľajšie uhly rovnaké, a vnútorné príahlé tvoria spolu pravý uhol ...

Pozrime, ako to vychádza, čo? Zdá sa, že preslávený piaty postulát je teda vyriešený. Či skôr *nahradený jednoduchším a názornejším*.

Treba ešte spresniť nejaké drobnosti, vyjadriť všetko v podrobnych nákresoch. Ale potom – čo s tým má spoločné Euklides?

To už nie je Euklides. To je už Omar Chajjám.

Teraz azda možno ľahko povedať: „Bodom, ktorý leží mimo danej priamky, môžeme v tej istej rovine viesť viac ako jednu priamku, ktorá danú priamku nepretína.“

Omar užasol: urobil som to ja, alebo neurobil? Nie je možné, že ja. Nezdá sa. Nie, predsa som sa k tomu ja dopracoval! Čo som ja zač?

Žiaľ, nebol tu nikto, kto by bol mohol poznamenať:

– Ty si to prvý urobil! Prvý na svete!

Sedemsto päťdesiatštyri rokov pred Nikolajom Lobačevským! Ináč, ani on sa za svoj objav nedožije uznania. Urobil si *prvý krok* k objaveniu nových, celkom iných geometrií.

Tak vznikol „*Výklad ťažkostí v úvodoch k Euklidovi*“, jedno z najcennejších diel Omara Chajjáma. Ale Omar sa v tomto pojednaní neobmedzil iba na piaty postulát. V druhej a tretej knihe „Výkladu“ rozpracoval skvelé učenie o číslach a postavil ho do protikladu k antickému. Pomer u neho vystupuje ako číslo – buď v starom, pravom zmysle, ako celé číslo, alebo v novom, nepravom, ako nie celé – zlomok, nesúmerateľné s jednotkou. Zostavenie pomerov sa viac neodlišuje od násobenia čísel, rovnakosť pomerov od ich rovnosti, pomery sú vhodné na meranie ľubovoľných skúmaných veličín.

Začal prevrat v učení o číslach tým, že odstránil zásadnú hranicu, čo oddelovala iracionálne veličiny od čísla:

Vedz, že do tohto pojednania, najmä do jeho posledných dvoch kníh, sme včlenili otázky veľmi zložité, ale povedali sme všetko, čo s nimi súvisí, v súlade s našim cieľom. Preto, ak sa ten, kto bude nad nimi uvažovať a skúmať ich, aj sám do nich pustí, vychádzajúc z týchto predpokladov ... získa vedomosti z hľadiska rozumu.“ *Vedomosti. Z hľadiska rozumu. Práve rozumu! Ako len ľudstvu chýba ...*

Len obdiv a nesmierna úcta k Euklidovi nedovolili Oмарovi Chajjámovi prekročiť prah euklidovskej geometrie. Prostredníctvom *At-Túsího* (1201 – 1274) „Výkladu Euklida“, ktorý vyjde roku 1594 v Ríme, dostane sa Chajjámova teória pomerov a učenie o číslach do Európy. Ale to ešte tak skoro nebude. To bude až o päť storočí ...

Avšak, nebyť *Euklida*, možno by ani dvadsiate storočie nepoznalo neeuklidovské geometrie. Som rada, že som sa s *Euklidom* oboznámila, aspoň na istej úrovni. Veľmi d'akujem autorovi diela, že mi to umožnil. Ešteže som na začiatku nešípila, čo ma bude čakať! Keby nie toho, čo teraz všetci zažívame, tešila by som sa z ďalšieho, už *n* – tého čítania *Základov* a komentárov.

Len už málo verím, že mi to môj čas dovolí. Žijeme v dobe veľmi náročnej. Preto chcem pozdraviť všetkých čitateľov tohto krásneho časopisu a zaželať im všetko najlepšie, hlavne pokoj, mier a dobré zdravie! Ked' sa môjho prasynovčeka Dávidka (6 rokov) spýtam „Dávidko, čo je v živote najdôležitejšie, odpovie mi: „Teta Zitka“ – najdôležitejšia je *láska, voda a pevné zdravie!* To som ho naučila; tá voda preto, lebo pil málo vody; dnes je to už dobré. Len musíme k tomu pridať *mier a šťastie pre všetky detičky na celom svete!* Bola som veľmi naivná, keď som si myslela, že to tak veru byť nemusí ... A Dávidko k tomu ešte dodáva: *A aby už nikdy na svete vojna nebola!*

### 3 Finale

Nejdem teraz opisovať všetky peripetie, ktoré som zažívala pri písaní *Základov*. Už opravené chyby sa často opakovali, dokonca sa hromadili nové, takpovediac nezmyselné (nie na mojej verzii v počítači), ale najviac po jazykovej úprave vo vydavateľstve. Pravdepodobne to boli nejaké automatické opravy, ale chybné. A v dôsledku enormného zdražovania v „covidovej ére“ nastali problémy s papierom. To všetko však ide nejako zvládnúť; horšie sú psychické problémy v tomto vypätom čase.

Najlepšie bude, keď napíšem, čo som u Euklida v čase úpravy textu do elektronickej podoby obdivovala najviac.

Nebola to prvá historicky úspešná realizácia Aristotelovej koncepcie výstavby vedeckej teórie špeciálnej vedy axiomatiko-deduktívou metódou, čo ma u Euklida fascinovalo najviac. O tom som už, samozrejme, nepochybovala, lebo počas môjho pôsobenia na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK som prednášala okrem iných predmetov aj elementárnu geometriu euklidovskej roviny.

Úchvatným poznáním bola Euklidova prezentácia *iracionalít*. Takú hĺbku a detaily som po obvyklých sporadických informáciách o významnom Teaitetovom prínose neočakávala! – Ach, nešťastná desiata kniha! Tak rozsahom, ako aj náročnosťou ... Hlboko sa skláňam pred Euklidom, ako majstrovsky dokázal priblížiť takú krkolomnú teóriu. Najmä tátu rozsiahla partia Základov presvedčivo dokumentuje, že Euklides bol nielen špičkovým vedcom svojej doby, ale aj skvelým didaktikom, metodikom a učiteľom pre celé plejády nasledovníkov. Ešte v 19. storočí sa podľa jeho Základov vyučovalo na vyšších stredných školach v Anglicku (a iste aj v niektorých iných krajinách). – Môžeme podčakovať Euklidovi, že našej generácii ponechal aspoň kúsok priestoru na skromný didaktický príspevok k jeho výkladu: azda možno zaň považovať súbornú prehľadnú tabuľku iracionalít v závere komentárov k desiatej knihe Základov. Pre mňa to bol konečne záblesk svetla v hustej tme!

Profesor Čižmár mal v prvom pláne vytlačenie komentárov k Základom v osobitnej knižke, čo by bolo čitateľovi veľmi uľahčilo plynulé čítanie a porozumenie textu. Žiaľ, nešlo to, pretože by tým značne narástli výdavky na vydanie diela.

Predsa sa ešte vrátim k niektorým problémom, s ktorými som sa stretala pri prepisovaní rukopisu. Po výmene počítača som stratila možnosť kresliť obrázky. Našťastie boli už všetky narysované v programe Corell; šlo len o nepatrné vylepšovanie indexov. To v redakcii vyriešili „kreslením indexov rukou“. Po zavedení internetu nasledovala záplava ponúk na kúpu nového („vylepšeného“) kresliaceho programu (Corell) za sumu, pre mňa pomerne veľkú. I keď sa

náklady ponúk postupne znižovali, zatiaľ váham (ešte by som rada naučila kresliť prasynovca Dávidka).

Najviac ma mrzí, že som nemohla dorobiť k obrázku 12.17 ešte jeden tak, aby zodpovedal exaktnému zobrazeniu priestorových telies. To som už mala zablokovany Corell. Každému čitateľovi musí byť zrejmé, že útvar na obrázku nie je obrazom opísaného objektu v žiadnej zobrazovacej metóde. Nemožno to považovať za chybu; žiadna exaktná zobrazovacia metóda priestorových objektov v tom čase nebola k dispozícii, pretože neexistovala!

## Literatúra

- [1] ČIŽMÁR, J., *Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť*. Vyd. Perfekt, a.s., Cukrová 14, Bratislava, dve vydania (2017, 2020). Matematika v starovekom Grécku a helenistickom svete; 4. 4 Iónske obdobie, 4. 5 Aténske obdobie, 4. 6 Alexandrijské obdobie.
- [2] ČIŽMÁR, J., *Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť*. Matematika v stredovekých islamských krajinách. Omar Chajjám, Násir ad Dín at-Túsí. (6. 4. 3 – Teória rovnobežiek v stredovekej islamskej matematike).
- [3] ILJASOV, J., *Zaklínac hadov*, Vyd. Tatran, r. 1982.
- [4] BEČVÁŘOVÁ, M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*. Výzkumné centrum pro DĚJINY VĚDY; Dějiny Matematiky, svazek 20, Praha 2002, Prometheus.  
Eukleidovy ZÁKLADY v devatenáctém a dvacátém století (s. 101 – 110).

Tešíme sa, že už môžem temer s istotou povedať, že blížiaca sa inaugurácia nového diela profesora Čižmára bude pre nás všetkých veľkým sviatkom! Profesorovi Čižmárovi želám do ďalších rokov dobré zdravie a ešte veľa tvorivej invencie a síl. – Ako ho poznám, isto mu leží na srdeci ďalšia téma, ktorú by bolo vhodné (či priam nevyhnutné) vypracovať. –

Čitateľom Euklidovho diela prajem veľa potešenia pri čítaní diela, dobré zdravie a veľa šťastia, pohody, spokojnosti a úspechov.

---

RNDr. Zita Sklenáriková, PhD.

Bakošová 22, 841 03 Bratislava, Slovenská republika  
e-mail: sklenarikovazita80@gmail.com

# Využitie dynamickej geometrie transformačným spôsobom

Jana Trgalová

## Abstrakt

V 80-tych rokoch, s nástupom digitálnych technológií do vzdelávania, bolo používanie počítačov postavené do protikladu v dvoch metaforách: v metafore zosilnenia (*amplifier metaphor*) technológia umožňuje vykonávať tradičné úlohy rýchlejšie, efektívnejšie a presnejšie, zatiaľ čo v metafore reorganizácie (*reorganizer metaphor*) technológia kvalitatívne mení obsah a kognitívne procesy zapojené do riešenia problémov. V tomto článku na príklade dynamickej geometrie ilustrujeme rôzne spôsoby, ako možno použiť digitálne technológie, s odkazom na model SAMR. Zamerajúc sa na funkciu presúvania (*drag mode*), kľúčovú vlastnosť systému dynamickej geometrie, zdôrazňujeme rôzne použitia a zodpovedajúce matematické konceptualizácie. Na záver uvádzame niekoľko dôsledkov, ktoré odhalujú výzvy, ktorým čelia učitelia matematiky pri používaní digitálnych technológií.

**Kľúčové slová:** digitálne technológie, výuka matematiky, dynamická geometria, model SAMR

## Abstract

In 1980s, with the uptake of digital technology in education, the use of computers was contrasted in two metaphors: in the amplifier metaphor, technology allows performing traditional tasks faster, more efficiently and accurately, whereas in the reorganizer metaphor, technology qualitatively changes the content and the cognitive processes engaged in problem solving. In this paper, we take dynamic geometry as an example of digital technology to illustrate various ways in which it can be used, referring to the SAMR model. Focusing on the dragging functionality, the pivotal feature of dynamic geometry system, we highlight a variety of uses and the corresponding mathematical conceptualizations. We conclude with some implications bringing to light challenges that mathematics teachers face with the use of digital technologies.

**Keywords:** digital technology, mathematics education, dynamic geometry, SAMR model

## 1 Úvod: Digitálne technológie vo vzdelávaní

Či používať alebo nepoužívať digitálnu technológiu vo výuke matematiky už dnes nie je otázkou, tá sa skôr presunula na to, ako technológiu využívať efektívnejšie a ako z jej výhod čo najlepšie využiť. Od 80. rokov minulého storočia sa úloha, ktorú by technológie mali zohrávať vo vzdelávaní, stala predmetom výskumu. Pea [13] zdôraznil dve odlišné úlohy a opísal ich pomocou metafor zosilnenia a reorganizácie. Metafora *zosilnenia* naznačuje, že technológia mení ako efektívne robíme tradičné úlohy, pričom zosilňuje alebo rozširuje naše schopnosti, za predpokladu, že tieto úlohy zostanú v podstate rovnaké, zatiaľ čo metafora *reorganizácie* predpokladá, že technológia mení úlohy, ktoré vykonávame reorganizáciou nášho duševného fungovania, a nielen jeho rozšírením. Zjednodušená vízia týchto dvoch metafor vedie k úvahám

o použití digitálnej technológie buď na vykonávanie tradičných úloh, hoci iným spôsobom, alebo na vykonávanie nových úloh, ktoré sa bez tejto technológie nezaobídu [16]. Podobne Thomas a Lin [18] poukazujú na to, že kľúčové výhody technológie vychádzajú z úloh, ktoré sa s ňou používajú. Avšak navrhovanie úloh zahŕňajúcich technológiu, a ktoré majú aj nejakú pridanú hodnotu, nie je pre učiteľov matematiky triviálne.

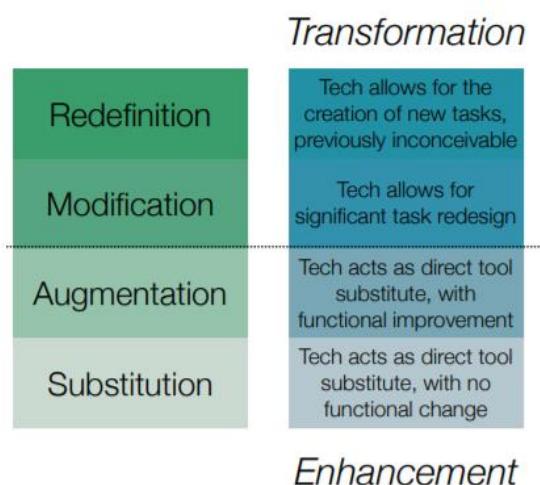
V tomto článku chceme poukázať na to, že danú (matematickú) digitálnu technológiu možno mobilizovať rôznymi spôsobmi s rôznym vzdelávacím potenciálom. Tieto úvahy ilustrujeme na príklade dynamickej geometrie. Voľba dynamickej geometrie je motivovaná rozdielom medzi jej potenciálom podporovať učenie sa žiakov, doloženým početnými výskumami (napr. [1], [2], [10]) na jednej strane a jeho obmedzeným využívaním v triedach matematiky (napr. [3], [6], [12]).

Jones [5] tvrdí, že starostlivo navrhnuté úlohy s ich primeranou implementáciou učiteľom sú nevyhnutné pre efektívne využitie dynamickej geometrie na podporu učenia sa žiakov. Tento článok preto ponúka analýzu vybraných úloh s dynamickou geometriou s cieľom poukázať na ich rozdiely, pokiaľ ide o kognitívnu aktivitu žiakov, a tak ukázať rozsah potenciálneho využitia dynamickej geometrie.

Úlohy, analyzované v časti 3, sú kategorizované podľa modelu SAMR prezentovaného v časti 2. Záverečná časť 4 pojednáva o dôsledkoch analýz pre vyučovanie a učenie sa matematiky s technológiou.

## 2 Model SAMR

Model SAMR [14] identifikuje štyri rôzne úrovne integrácie technológií vo výuke. Skratka „SAMR“ znamená Substitution (substúcia), Augmentation (rozšírenie), Modification (modifikácia) a Redefinition (redefinícia) (Obr. 1), štyri úrovne, ktoré umožňujú skúmať, ako je technológia integrovaná do vyučovacích a vzdelávacích procesov. Stručne predstavme štyri úrovne využitia technológie od substitúcie po redefiníciu a ilustrujme si ich na príklade kvízu.



Obr. 1. Model SAMR<sup>1</sup>[14]

<sup>1</sup> [http://hippasus.com/resources/tte/puentedura\\_tte.pdf](http://hippasus.com/resources/tte/puentedura_tte.pdf)

Na úrovni *substúcie* technológia jednoducho nahrádza tradičné vyučovacie pomôcky alebo metódy. Napríklad, online verzia tradičného papierového kvízu, kde žiak vyznačí odpovede, ktoré považuje za správne, neponúka žiadnu funkčnú zmenu. Technológia sa teda v tomto prípade používa ako náhrada, substitúcia papierového kvízu, hoci môže uľahčiť zadanie kvízu (napríklad prostredníctvom adresy URL namiesto papierových kópií) a vyzbieranie odpovedí žiakov.

Na úrovni *rozšírenia* technológie nahrádzajú tradičné nástroje alebo metódy, ale s výraznými vylepšeniami z hľadiska žiakovej aktivity. Ak softvér, v ktorom je kvíz implementovaný, môže poskytnúť spätnú väzbu o správnosti odpovede, toto funkčné zlepšenie podporuje učenie sa žiakov. Mnohé štúdie skutočne naznačujú, že spätná väzba je najefektívnejšia, keď sa poskytuje okamžite, a nie o niekoľko dní alebo týždňov neskôr, a ukazuje sa, že má pozitívny vplyv na študijné výsledky žiakov (napr. [15]) ako aj na ich motiváciu (napr. [17]).

Na úrovni *modifikácie* technológia výrazne mení úlohy zadané žiakom a ponúka im bohatšie vzdelávanie skúsenosti. Ak softvér, v ktorom je kvíz navrhnutý, poskytuje nielen spätnú väzbu o správnosti ich odpovedí, ale aj prepracovanejšiu spätnú väzbu, ako sú rady v prípade nesprávnych odpovedí (napr. odkaz na učivo, v ktorom má žiak medzery), žiakov prístup k učeniu sa výrazne zmení: takáto spätná väzba podporuje učenie sa nasmerovaním žiaka na vhodné aktivity na doplnenie chýbajúcich vedomostí.

Na úrovni *redefinície* technológia umožňuje vytvoriť vzdelávanie aktivity, ktoré bez nej nie sú možné. Kvíz, ktorý prispôsobuje otázky položené žiakovi na základe jeho predošlých odpovedí, je možné vytvoriť iba pomocou technológie.

Ako ukážeme v nasledujúcej časti, štyri úrovne modelu SAMR sú v súlade so štyrmi funkciemi dynamickej geometrie, ktoré identifikovala Laborde [8]. Z tohto dôvodu sa pri zvažovaní rôznych použití dynamickej geometrie odvolávame na tento model.

### 3 Rôznorodé využitie dynamickej geometrie

Laborde [8] identifikovala štyri rôzne funkcie dynamickej geometrie:

- Dynamická geometria sa používa najmä na uľahčenie materiálnych aspektov úlohy bez toho, aby sa táto koncepčne menila. Ide napríklad o konštrukčné úlohy, v ktorých jediný rozdiel spočíva v možnostiach kreslenia, ktoré ponúka dynamická geometria. Dynamickú geometriu možno teda považovať za náhradu (*substúciu*) tradičných nástrojov.
- Dynamická geometria má uľahčiť matematickú úlohu, ktorá sa považuje za nezmenenú. V tomto prípade sa dynamická geometria používa ako *vizuálny zosilňovač* najmä v úlohách, kde má žiak identifikovať geometrické vlastnosti útvarov. Skutočne, geometrické vlastnosti útvarov sú zachované pri presúvaní jej voľných prvkov, ich vizuálne rozpoznanie je preto uľahčené. Dynamická geometria nielen nahrádza tradičné nástroje, ale prináša aj určité funkčné zlepšenie (*rozšírenie*).
- Dynamická geometria má modifikovať stratégie riešenia úlohy vzhľadom na použitie niektorých jej nástrojov. Zatiaľ čo zstrojenie geometrického útvaru pomocou tradičných nástrojov môže viest' k vizuálne správnemu obrázku, hoci je kontrolované

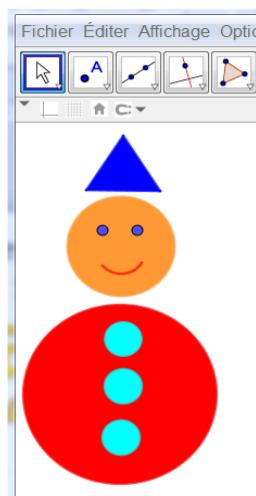
len percepciou, rovnaká úloha v prostredí dynamickej geometrie vyžaduje použitie geometrických vlastností na zstrojenie útvaru, ktorý si zachováva vlastnosti pri presúvaní voľných prvkov. Stratégie riešenia v prostredí dynamickej geometrie sú tak hlboko zmenené (*modifikácia*).

- Úloha existuje len v prostredí dynamickej geometrie. Laborde [8] evokuje takzvané úlohy „čiernej skrinky“ (black box), v ktorých majú žiaci rekonštruovať dynamický útvar vytvorený v prostredí dynamickej geometrie, ktoré zachováva geometrické vzťahy pri presúvaní voľných prvkov (*redefinícia*).

V nasledujúcich častiach (3.1-3.4), usporiadaných podľa úrovni modelu SAMR, diskutujeme o rôznych možných použitiach dynamickej geometrie. Zameriavame sa na funkciu presúvania, ktoré charakterizuje tento softvér, a ktoré má potenciál podporovať formovanie matematických konceptov u žiakov (napr. [10], [11]).

### 3.1 Úlohy na úrovni substitúcie

Vytvoriť ľubovoľný obrázok pomocou nástrojov dynamickej geometrie bez toho, aby bola venovaná pozornosť geometrickým vzťahom je možno najjednoduchšia úloha (Obr. 2).



Obr. 2. Ukážka

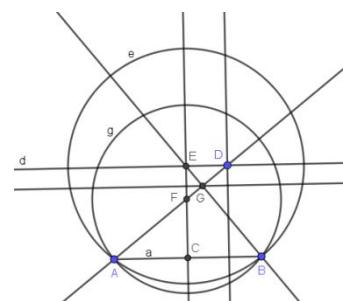
Takáto úloha môže poskytnúť žiakom príležitosť zoznámiť sa s nástrojmi dynamickej geometrie, alebo môže tiež byť príležitosťou na využitie semiotického potenciálu nástrojov dynamickej geometrie ich porovnaním s tradičnými nástrojmi. Napríklad skutočnosť, že na nakreslenie priamky musí používateľ kliknúť na dve rôzne miesta na obrazovke, čo viedie k vytvoreniu dvoch rôznych bodov a následne priamky prechádzajúcej týmito bodmi, vyjadruje myšlienku, že priamka prechádza cez dva dané rôzne body. V prípade použitia pravítka dva body nie sú vždy potrebné.

Ďalším príkladom úlohy na úrovni substitúcie je zstrojenie geometrického útvaru podľa konštrukčného programu (t. j. séria inštrukcií). V príklade na Obr. 3 je úloha zadaná žiakom základných škôl. Použitie dynamickej geometrie predstavuje niekoľko výhod. Útvary, ktoré žiaci konštruujú, môžu byť dosť zložité, keďže úloha je uľahčená v prostredí dynamickej

geometrie. Žiaci s motorickými problémami používania tradičných nástrojov môžu túto úlohu zvládnuť. Samo-overovanie je tiež jednoduchšie, keďže konštrukcie sú presnejšie a žiaci môžu upravovať prvky obrázku bez vymazania správnych krokov.

Dynamika softvéru sa v týchto úlohách používa v obmedzenej miere, ak vôbec: na dosiahnutie krajšieho vzhľadu obrázku v prípade voľnej kresby, alebo na separáciu prvkov útvaru na uľahčenie jej konštrukcie (napríklad keď dva body sú príliš blízko seba, takže pri výbere jedného z nich môžu byť zamenené).

Construction steps	Self-evaluation
Draw a segment [AB] called <i>a</i> .	
Create C, the midpoint of [AB].	
Draw a line <i>b</i> perpendicular to [AB] and passing through C.	
Create a point D wherever you want, but neither on [AB], on <i>a</i> nor on <i>b</i> .	
Draw a line <i>c</i> parallel to <i>b</i> passing through D.	
Draw a line parallel to [AB] passing through D.	
Create E the point of intersection of <i>b</i> and <i>d</i> .	
Draw a circle <i>e</i> with center E and radius EB.	
Draw a line <i>f</i> passing through A and D.	
Create F the point of intersection of [EC] and (AD).	
Draw a circle <i>g</i> with center F and radius FB.	
Draw a line perpendicular to (AD) and passing through B. It cuts (AF) in G.	
Draw a line parallel to (ED) passing through G.	



Obr. 3. Konštrukčný program (vľavo) a výsledný útvar (vpravo)

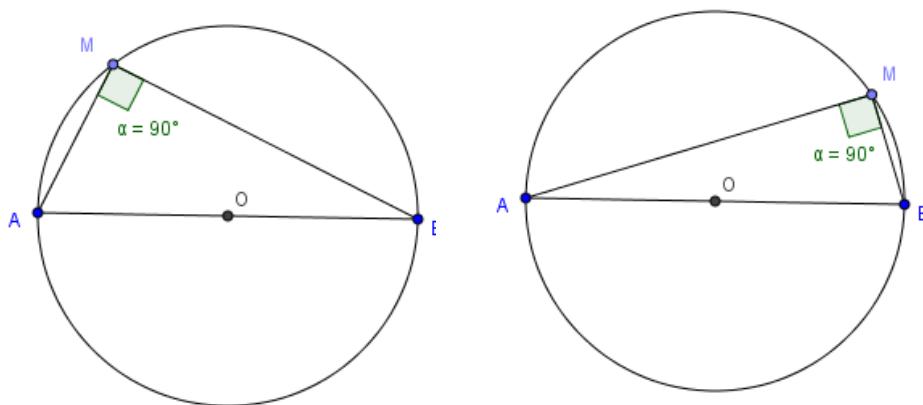
Avšak nie je zriedkavé nájsť aj úlohy, v ktorých sa dynamická geometria používa len ako náhrada tradičných nástrojov, hoci jej potenciál by mohol byť využitý vo väčšej miere, a to najmä vtedy, keď sa nevyužíva dynamika softvéru.

### 3.2 Úlohy na úrovni rozšírenia

Úlohy analyzované v tejto časti spadajú pod paradigmu robustnej konštrukcie (robust construction). Laborde [7] charakterizuje robustné konštrukcie ako tie, v ktorých sa vlastnosti pri presúvaní zachovávajú. Autorka uvádza príklad uhla AMB vpísaného do kružnice (Obr. 4). Keď je bod M presúvaný po kružnici, možno pozorovať, že uhol AMB zostáva pravý. Táto robustná konštrukcia ukazuje, že pre akýkoľvek bod M na kružnici (okrem A a B) je uhol AMB pravý.

Typické úlohy v rámci tejto paradigmy spočívajú v skúmaní robustných konštrukcií. Žiaci sú vyzvaní, aby presúvali prvky geometrického útvaru (bod M vo vyššie uvedenom príklade) a aby rozpoznali alebo objavili geometrickú vlastnosť založenú na pozorovaní útvaru: príslušná vlastnosť zostáva nezmenená (veľkosť uhl'a AMB). Presúvanie prvkov geometrického útvaru v paradigmе robustnej konštrukcie umožňuje odlišenie vlastností útvaru, ktoré zostávajú nemenné (geometrické vlastnosti) od iných, ktoré sa pri presúvaní nezachovávajú (priestorovo-grafické vlastnosti). Vo vyššie uvedenom príklade umožňuje presúvanie bodov A a B napríklad pozorovať, že úsečka [AB] je vždy priemer kružnice, ale jej horizontálny smer nie je nevyhnutou podmienkou pre to, aby bol uhol AMB pravý. Táto robustná konštrukcia prispieva k učeniu súvisiacej geometrickej vety tým, že uľahčuje identifikáciu dôležitých aspektov vety, a to najmä dve podmienky pre získanie pravého uhl'a - [AB] musí byť priemer kružnice a M bod na kružnici [7].

Presúvanie prvkov robustnej konštrukcie umožňuje rýchlo vytvoriť množstvo rôznych útvarov, ktoré ale zdieľajú rovnakú geometrickú vlastnosť, čo žiakom pomáha rozšíriť ich vizuálne predstavy o danej vlastnosti a zavrhnuť niektoré priestorovo-grafické vlastnosti, ktoré by mohli považovať za ich geometrické vlastnosti. Takže presúvanie sa v tomto prípade používa ako nástroj na rozlíšenie medzi eventualitou a nevyhnutnosťou [7], čo predstavuje jasné funkčné zlepšenie v porovnaní s tradičnými nástrojmi.



Obr. 4. Uhol AMB vpísaný do kružnice

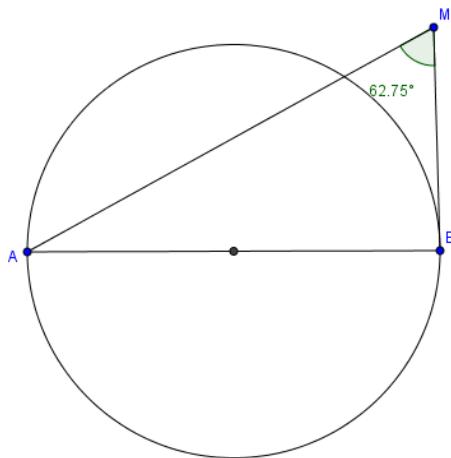
### 3.3 Úlohy na úrovni modifikácie

Robustné konštrukčné úlohy sú ďalším druhom úloh spadajúcich do robustnej konštrukčnej paradigmy. Žiaci majú zstrojíť geometrické útvary, ktoré splňajú dané podmienky, aj keď sa ich prvky presúvajú, napríklad zstrojíť štvorec, keď je daná jeho strana alebo uhlopriečka. Ako Laborde [7] špecifikuje, konštrukcie, ktoré sú kontrolované vizuálne, sú v dynamickej geometrii neprijateľné, pretože pri presúvaní ich prvkov je zrejmé, že niektoré z podmienok nie sú splnené. Presúvanie poskytuje vizuálnu spätnú väzbu poukazujúc na to, že konštrukcia nespĺňa všetky požadované podmienky. Pri takýchto konštrukčných úlohách v dynamickej geometrii je preto presúvanie kľúčovým faktorom, ktorý umožňuje poukázať na teoretickú slabinu konštrukcie.

Nutnosť uchýliť sa ku geometrickým vlastnostiam pri konštrukcii útvaru (napríklad štvorca, keď je daná jeho strana alebo uhlopriečka) výrazne modifikuje konštrukčnú úlohu v porovnaní s rovnakou úlohou realizovanou tradičnými nástrojmi na papieri, kde sa žiaci často snažia len dostať vizuálne prijateľnú konštrukciu z grafického hľadiska [7]. Presúvanie poskytuje žiakom vizuálnu spätnú väzbu o správnosti ich konštrukcie; používa sa preto ako nástroj na overovanie konštrukcií (nazývaný aj test presúvaním, napr. [1]) a pomáha žiakom uvedomiť si rozdiel medzi obrázkom (materiálna kresba reprezentujúca geometrický útvar) a útvarom (teoretický pojem) definovaným svojimi vlastnosťami [9].

Menej časté sú úlohy, v ktorých majú žiaci hľadať podmienky, za ktorých sa získajú určité konfigurácie. V príklade prevzatom z [7] je daná kružnica s priemerom [AB] a bod M, ktorý nie je na kružnici. Žiaci majú nájsť polohu bodu M mimo diskus tak, aby uhol AMB bol tupý (Obr. 5). Cieľom tejto úlohy je umožniť žiakom preskúmať situáciu a všimnúť si, že uhol AMB je ostrý, keď je M mimo diskus a tupý, keď je vo vnútri, a prípadne objaviť vzťah medzi polohou bodu M vzhľadom ku kružnici a veľkosťou uhla AMB.

Táto konštrukcia sa nazýva mäkká (soft construction), v protiklade k robustnej konštrukcii, pretože bod M nie je skonštruovaný ako bod na kružnici, a tak cielená geometrická vlastnosť, konkrétnie skutočnosť, že uhol AMB je pravý, ked' M je na kružnici, nie je priamo viditeľná, ako je to v prípade robustnej konštrukcie (Obr. 4). Táto vlastnosť je skôr odvodená z pozorovania, že kružnica je hranicou medzi dvoma časťami roviny: jednou, v ktorej je uhol AMB tupý, a druhou, v ktorej je uhol AMB ostrý, preto uhol AMB musí byť pravý, ked' je M na kružnici.



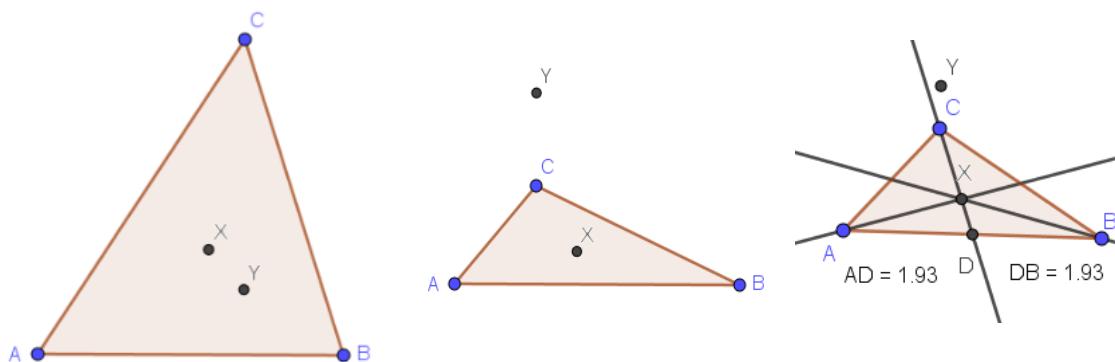
Obr. 5. Úloha, kde možno skúmať vzťah medzi polohou bodu M vzhľadom na kružnicu a veľkosťou uhla AMB

Mäkké konštrukcie predstavujú niekoľko funkcií, ktoré ponúkajú zaujímavé možnosti učenia. Po prvé, úlohy využívajúce mäkké konštrukcie sú motivujúcejšie ako ich robustné verzie. Ponúkajú skutočné problémy na vyriešenie a dynamická geometria je podporou pri skúmaní daných situácií. Takáto úloha založená na mäkkej konštrukcii je výrazne modifikovaná, pretože ponúka podporu pre generovanie a overovanie rôznych hypotéz. Presúvanie hrá pri tomto prieskume kľúčovú úlohu. Okrem toho, skúmanie mäkkej konštrukcie vedie k väčšiemu dôrazu na vzťah medzi podmienkou (v našom prípade M je bod na kružnici) a jej dôsledkom (uhol AMB je pravý), čo uľahčuje pochopenie významu geometrickej vlastnosti ako implikácie, ktorá je obzvlášť dôležitá v úlohách zameraných na dôkazy.

### 3.4 Úlohy na úrovni redefinície

Medzi úlohy, ktoré môžu existovať len v rámci dynamickej geometrie, patria úlohy tzv. „čiernej skrinky“ (black box). Clerc [4] popisuje čiernu skrinku v dynamickej geometrii ako geometrický útvar zložený z počiatočných prvkov a konečných prvkov, ktorých konštrukcia je založená na počiatočných prvkoch. Konštrukcia týchto finálnych prvkov je skrytá. Matematická úloha, ktorú možno zostaviť ako čiernu skrinku, spočíva v tom, že žiaci majú odhaliť skryté vzťahy medzi prvkami útvaru, aby dokázali zostrojiť daný útvar z pôvodných prvkov, a ich konštrukcia musí samozrejme odolávať pri presúvaní voľných prvkov. Obr. 6 zobrazuje čiernu skrinku, kde počiatočnými prvkami sú tri rôzne body A, B a C (alebo trojuholník ABC) a konečnými prvkami sú body X a Y.

Od žiakov sa očakáva, že budú skúmať daný útvar, robiť hypotézy, experimentálne ich overovať a nakoniec rekonštruovať body X a Y. Pri presúvaní môžu žiaci napríklad pozorovať, že bod X zostáva vo vnútri trojuholníka, zatiaľ čo bod Y sa môže dostať von (Obr. 6, stred). Žiaci môžu zostrojovať priamky, kružnice, kolmice atď., môžu merať vzdialenosť alebo uhly (Obr. 6, vpravo). Presúvanie jednoznačne zohráva rozhodujúcu úlohu pri hľadaní skrytých vzťahov. Používa sa ako na skúmanie daného útvaru, tak aj na overovanie predpokladaných geometrických vlastností testovaním ich invariantnosti.



Obr. 6. Úloha typu čierna skrinka

## 4 Záver

Našim cieľom v tomto článku bolo ukázať, že danú digitálnu technológiu možno vo výuke matematiky použiť mnohými rôznymi spôsobmi, od obyčajnej náhrady tradičných nástrojov až po jedinečné vzdelávacie príležitosti v nových úlohách, ktoré technológia umožňuje. Dynamická geometria nám poslúžila ako príklad a analyzované úlohy boli prevzaté z predošlých výskumov a učebných osnov.

Naše analýzy zdôrazňujú, že úlohy na úrovniach transformácie (modifikácia a redefinícia) vykazujú väčší potenciál pre pedagogické metódy zamerané na žiakov, ktoré ponúkajú žiakom riešenie problémov založených na bádaní, v porovnaní s úlohami na úrovniach vylepšenia (substitúcia a rozšírenie), ktoré sú skôr zamerané na učiteľa a vyžadujú od žiakov menej dôležitú kognitívnu činnosť.

Preto samotná digitálna technológia nie je transformačná; je to spôsob, akým sa používa, ktorý môže byť transformačný. Keďže úloha učiteľov vo vzdelávaní založenom na technológiách je klúčová, je naliehavé poskytnúť im podporu zameranú na zvýšenie ich povedomia o rôznorodom využitia technológií a pomôcť im rozvíjať výuku na transformačných úrovniach.

## Literatúra

- [1] ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D., ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. In *ZDM – Mathematics education*, 34(3), 2002, pp. 66-72.

- [2] BACCAGLINI-FRANK, A., MARIOTTI, M. A. Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining-dragging model. In *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 2010, pp. 225–253.
- [3] BRETSCHER, N. Dynamic geometry software: the teacher's role in facilitating instrumental genesis. In V. Durrand-Guerrier et al. (Eds.). *Proceedings of CERME 6*, 2010, pp. 1340-1348). Lyon: INRP.
- [4] CLERC, B. Boîte noire en géométrie dynamique. In *MathémaTICE*, 2., 2006, <http://revue.sesamath.net/spip.php?article13>
- [5] JONES, K. Research on the Use of Dynamic Geometry Software: implications for the classroom. In J. Edwards & D. Wright (Eds.). *Integrating ICT into the Mathematics Classroom*, 2005, pp. 27-29. Derby: Association of Teachers of Mathematics.
- [6] KRIEK, J., STOLS, G. Why don't all maths teachers use dynamic geometry software in their classrooms? In *Australasian Journal of Educational Technology*, 27(1), 2011, pp. 137-151.
- [7] LABORDE, C. Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In S.-C. Chu et al. (Eds.). *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics* (ATCM), 2005, pp. 22-35. Korea National University of Education.
- [8] LABORDE, C. Integration of technology in the design of Geometry tasks with Cabri-Geometry. In *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 2001, pp. 283–317.
- [9] LABORDE, C., CAPPONI, B. Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. In *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 14(1.2), 1994, pp. 165–210.
- [10] LEUNG, A. Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. In S. Cho (Ed.). *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, 2015, pp. 451–469. Cham: Springer.
- [11] LOPEZ-REAL, F., LEUNG, A. Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. In *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 2006, pp. 665-679.
- [12] MOLNÁR, P., LUKÁČ, S. Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education: Attitudes of Teachers. In *International Journal of Information and Communication Technologies in Education*, 4(4), 2015, pp. 19-33.
- [13] PEA, R. D. Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. In *Educational Psychologist*, 20(4), 1985, pp. 167-182.
- [14] PUENTEDURA, R. R. Transformation, Technology, and Education. Screencast of the presentation delivered August 18, 2006.  
Retrieved from <http://hippasus.com/resources/tte/>
- [15] RAZZAQ, R., OSTROW, K. S., HEFFERNAN, N.T. Effect of Immediate Feedback on Math Achievement at the High School Level. In I. Bittencourt., M. Cukurova, K. Muldner, R. Luckin, & E. Millán (Eds.). *Artificial Intelligence in Education*. AIED 2020. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 12164, pp. 263-267. Cham : Springer.
- [16] RIPLEY, M. Transformational computer-based testing. In F. Scheuermann & J. Björnsson (Eds.). *The transition to computer-based assessment*, 2009, pp. 92-98. Luxemburg: Office for Official Publications of the European Communities.

- [17] SANCHO-VINUESA, T., ESCUDERO-VILADOMS, N., MASIA, R. Continuous activity with immediate feedback: A good strategy to guarantee student engagement with the course. In *Open Learning*, 28(1), 2013, pp. 51-66.
- [18] THOMAS, M. O. J., LIN, C. Designing tasks for use with digital technology. In C. Margolinis (Ed.). *Task design in mathematics education*. Proceedings of ICMI Study 22, 2013, Vol. 1, pp. 111-119. Oxford.

---

**Jana Trgalová**

INSPE, S2HEP (UR4148)  
University Claude Bernard Lyon 1  
5 rue Anselme, 69004 Lyon, France  
e-mail: jana.trgalova@univ-lyon1.fr

# SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



## PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

### SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective  
to stimulate scientific research and teaching methodology  
in the fields of geometry and computer graphics  
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

---

#### SSGG

Institute of Mathematics and Physics  
Faculty of Mechanical Engineering  
Slovak University of Technology in Bratislava  
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR  
e-mail: [ssgg@ssgg.sk](mailto:ssgg@ssgg.sk), URL: [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

## Abstracts

### **Emil Molnár, Jenö Szirmai: On homogeneous 3-geometries, balls and their optimal arrangements, especially in NIL and SOL spaces**

János BOLYAI and – independently, in the same time (about 1823-1840) – Nikolay I. LOBACHEVSKY discovered the socalled hyperbolic geometry that opened new development in many fields of Mathematics, Physics and the whole science. Nowadays we know 8 homogeneous 3-geometries (called also THURSTON geometries, see Table 1) applicable also for describing our surrounding space and material structures. In the sense of Felix KLEIN, projective geometry provides us with a unified method to model and visualize these geometries, initiated by the first author. The second author extended these for describing extremal problems of so-called discrete geometry in the sense of László FEJES TÓTH. As illustration we discuss here Nil and Sol geometry in more details. The first one is near the Euclidean space, the second strange Sol space has some analogies with the LORENTZ-MINKOWSKI space-time.

### **Z. Sklenáriková: Will Euclid's *Elements* appear (finally in Slovak language) at the book market in the year 2022?**

An exceptional and a long time expected translation of the Euclid's Elements was to be published last autumn by the publishing house Perfekt, a.s. The translation and the commentaries were elaborated by professor Ján Čízmár who spent several years on the preparation of this work. The commentaries represent an indispensable component of the complete translation as they significantly facilitate understanding of the original text in today's terminological explanation.

The Elements are the most famous and significant work of the ancient mathematics composed about 300 BC by Greek scholar Euclid – a notable scientist, teacher and author in the top scientific-artistic institution Museion in Egyptian Alexandria.

The work is the first historically successful completion of the Aristotelian concept of a scientific theory in a particular science. It provides a systematic survey of all contemporary scientific mathematics treated by the axiomatic-deductive method.

### **J. Trgalová: On utilisation of dynamic geometry in transformation mode**

In 1980s, with the uptake of digital technology in education, the use of computers was contrasted in two metaphors: in the amplifier metaphor, technology allows performing traditional tasks faster, more efficiently and accurately, whereas in the reorganizer metaphor, technology qualitatively changes the content and the cognitive processes engaged in problem solving. In this paper, we take dynamic geometry as an example of digital technology to illustrate various ways in which it can be used, referring to the SAMR model. Focusing on the dragging functionality, the pivotal feature of dynamic geometry system, we highlight a variety of uses and the corresponding mathematical conceptualizations. We conclude with some implications bringing to light challenges that mathematics teachers face with the use of digital technologies.

**G**

Slovak Journal for Geometry and Graphics

Volume 19 (2022), No. 37

ISSN 1336-524X

Edited by:

Slovak Society for Geometry and Graphics

**SSGG**

**Editor-in-Chief:**

Daniela Velichová

**Managing Editors:**

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

**Editorial Board:**

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmet'ová

Margita Vajsálová

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

**Editorial office:** Slovak Society for Geometry and Graphics

IČO: 31 816 304

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

**Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:**

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

**Frequency:** One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per

volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

**Information and instructions for authors are available at the address:** [www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)

**Printed by:** ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

**G is cited in:** Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG June 2022, Bratislava

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific contents.

[www.ssgg.sk](http://www.ssgg.sk)