SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 19, číslo 38, 2022
ISSN 1336-524X

G
Slovenský časopis pre geometriu a grafiku

Ročník 19 (2022), číslo 38
ISSN 1336-524X

Vydáva:
Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku
IČO: 31 816 304
Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Námestie slobody 17
812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:
Redakcia G - SSGG
ÚMF SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava
ssgg@ssgg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.
Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.
Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adrese: www.ssgg.sk

Tlačí: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

Časopis G je citovaný v: Zentralblatt für Mathematik

SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
SLOVAK JOURNAL FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

ročník 19, číslo 38, 2022
volume 19, number 38, 2022

Obsah – Contents

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ

PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie

b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR

c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania

d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike

e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike

f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť

g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy a i., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG
Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Plocha šikmého průchodu

Dana Kolářová

Abstrakt
V příspěvku je představena plocha šikmého průchodu v širším kontextu z pohledu deskriptivní geometrie, statiky, stavební mechaniky a kamenictví. Řešení klenby nad šikmým průchodem se měnilo jednak v průběhu století, jednak v závislosti na ekonomických a technických podmínkách místa realizace. Velké rozšíření šikmého přemostění je spojeno především s rozvojem železniční dopravy. V textu je představeno řešení šikmého průchodu metodou ortogonální, šroubovou a logaritmickou.

Klíčová slova: plocha šikmého průchodu, zborcené přímkové plochy, kamenořez

Abstract
The paper presents an area of oblique passage in a wider context from the perspective of descriptive geometry, statics, building mechanics and stonemasonry. The solution of the skew arch had changed mainly between the 15th to 18th centuries and also depended on the economic and technical conditions of the place of realisation. The large expansion of oblique bridges was mainly linked to the development of railway transport. The text introduces the solution of oblique passage by the orthogonal, helicoidal and logarithmic methods.

Keywords: skew arch, warped ruled surfaces, stonecutting

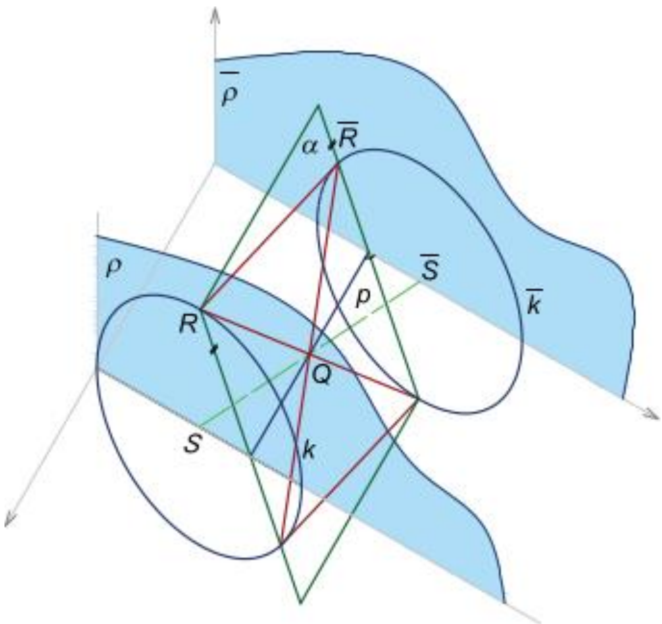
Text článku je věnován využití klenby šikmého průchodu v mostním stavitelství, představuje vývoj a porovnání různých způsobů řešení z pohledu teorie deskriptivní geometrie a stavební praxe.

1 Plocha šikmého průchodu – definice

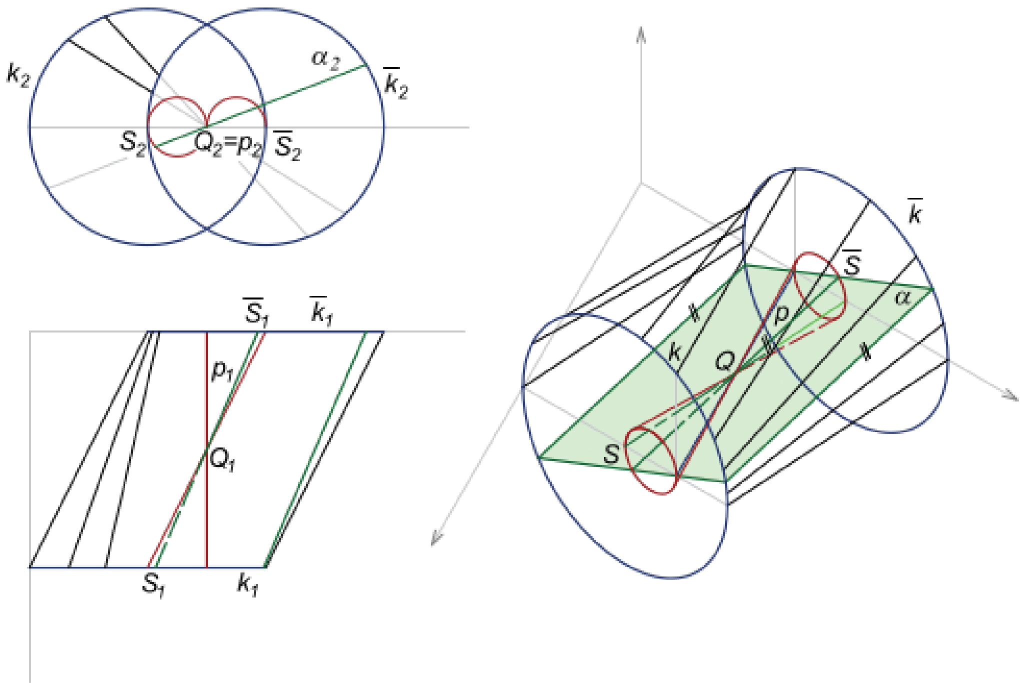
Plochu šikmého průchodu řadíme mezi zborcené přímkové plochy. Řídicími útvary plochy jsou dvě shodné kružnice $k(S; r)$, $\bar{k}(\bar{S}; r)$ ležící v rovnoběžných rovinách ρ a $\bar{\rho}$. Spojnice jejich středů $S\bar{S}$ svírá s rovinami kružnic úhel $\phi \neq \pi/2$. Další řídicí útvar je přímka p, která prochází bodem Q, který je středem úsečky $S\bar{S}$. Přímka p je kolmá k rovinám ρ a $\bar{\rho}$ těchto kružnic ([18] str. 151-152).

Tvořicí přímky plochy získáme tak, že řídicí přímkou p proložíme pomocnou rovinu α kolmou k rovinám ρ a $\bar{\rho}$. Najdeme společné body roviny α a řídicích kružnic, které určí površky plochy. Površky procházející bodem Q vytvoří kuželovou plochu. Zborcenou přímkovou plochu tedy tvoří jen ty površky, které bodem Q neprocházejí. Každá volba pomocné roviny α určí dvě přímky plochy, které jsou vzájemně rovnoběžné. Vedeme-li bodem Q, tj. středem této plochy, přímky rovnoběžné se všemi tvořicími přímkami plochy, pak dostaneme asymptotickou kosou kuželovou plochu pro zvolenou plochu šikmého průchodu (obr. 2).

Zborcená přímková plocha šikmého průchodu je plocha čtvrtého stupně ([9], str. 711). Tato plocha je středově symetrická podle bodu Q, rovinou souměrnosti plochy je rovina určená přímkou p a středy řídicích kružnic $S\overline{S}$.



Obr. 1. Plocha šikmého průchodu, řidicí útvary jsou modře, vytvořené površky jsou červeně

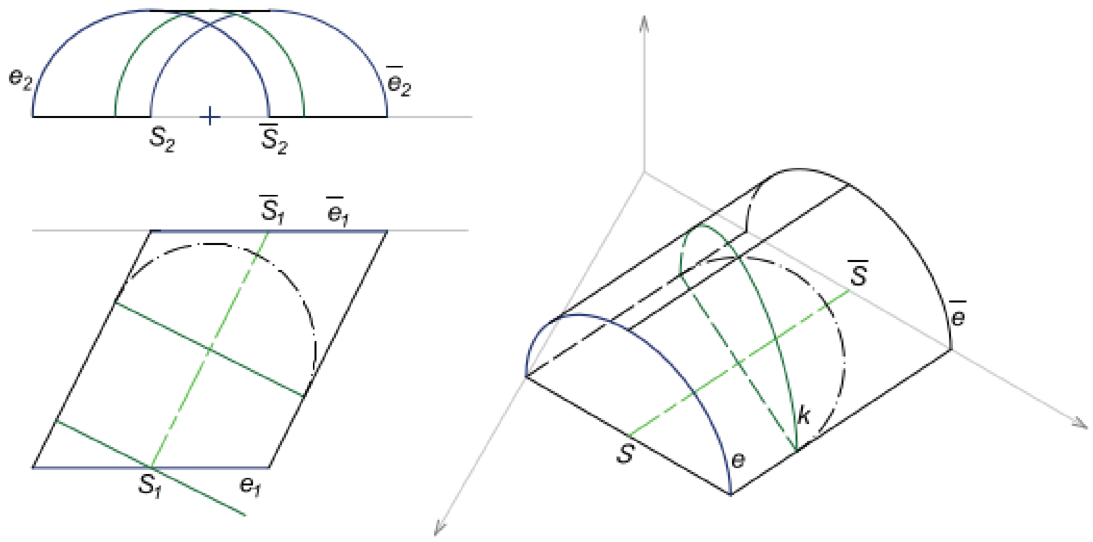


Obr. 2. Asymptotická kuželová plocha pro plochu šikmého průchodu

2 Klenba šikmého průchodu – teorie a praxe

Plochu šikmého průchodu nalézáme ve stavebně technické praxi. Zde je využívána její část k zaklenutí půdorysu tvaru kosoúhelníku především u různých typů mostních konstrukcí.

Geometricky jednoduché řešení – použití rotační válcové plochy a jejího eliptického řezu (obr. 3) bylo v praxi v historickém období zděných staveb zcela neproveditelné, neboť klenba se neměla v krajní poloze „o co opřít“. V dnešní době nových materiálů a jiných stavebních technologií tento problém ustupuje do pozadí. Nicméně pro rekonstrukci existujících kamenných kleneb je stále důležité pochopení původních způsobů klenutí.



Obr. 3. Šikmým řezem rotační válcové plochy jsou elipsy, kruhový oblouk v čele klenby nemá oporu, tj. v této podobě ji nelze použít v praxi

Je třeba si uvědomit, že v praxi bylo nutné vyřešit nejen líc klenby, ale i vazbu a rub klenby, u jednotlivých kamenů tedy jak přesný tvar, tak i jejich umístění v klenbě. Takzvaný kamenořez byl v publikaci *Kamenořez* autorů Klímy a Šimka ([10], str. 2) definován takto:

„Kamenořezem rozumíme nauku, která ukazuje, jak kamenné stavby (zdi, políře, klenby, schody aj.) děliti v části, jednotlivé stavební prvky – kameny – a jak získávati tvary těchto kamenů podle zásad stavební mechaniky a podle požadavků praxe prostředky co nejjednoduššími… Kamenořez je tedy aplikací geometrie, deskriptivní geometrie, statiky, stavební mechaniky a kamenictví. Zasahuje tedy do theorie i praxe stejnou měrou.“

Plochou šikmého průchodu se zabývali stavitelé, architekti i geometři již od časů říše římské. Pokud dnes zcela jednoznačně definujeme ***plochu šikmého průchodu*** jako zborcenou přímkovou plochu, pak toto označení nemuselo mít vždy stejný význam. V minulosti nebývala klenba nad šikmým průchodem řešena jen pomocí zborcených přímkových ploch, ale přesto byla takto označována.

V následujícím pojednání se zaměříme na historický pohled na různé metody řešení klenby nad šikmým průchodem. Zdrojem jsou především historické publikace věnované stereotomii, jak se kamenořezu říkalo, tato nauka byla u počátků samotné deskriptivní geometrie.

Vysoká technická úroveň stavebnictví ve Francii v období renesance tvoří základ francouzských pojednání o stereotomii, o stavbě mostů, a tudíž i o klenbě nad šikmým průchodem. Rozvoj stavebnictví ve Francii pak vyvolal potřebu řešit mnoho praktických otázek v obecnější poloze. Tomu odpovídala nutnost zobrazení konstrukcí i jiným způsobem než byl obvyklý ve stereotomii, a to už je jen krůček ke vzniku deskriptivní geometrie.

Význam mostního stavitelství byl posílen založením Ecole des Ponts at Chausses v Paříži roku 1747. Škola byla předchůdcem Ecole des Ponts Paris Tech. Jejím prvním ředitelem byl Jean-Rodolphe Perronet, zakladatel moderního stavitelství kamenných mostů, sám projektoval nejméně třináct velkých kamenných mostů ve Francii. Stavěl klenby v té době neuvěřitelně ploché a na několika z nich použil zborcenou přímkovou plochu „corne de vache“. Výuka v této technické škole byla založena na tehdejších teoretických poznatcích v oborech geometrie, algebry, mechaniky a hydrauliky.

I v dalších zemích Evropy jsou zakládány technické školy, mladí konstruktéři přinášejí do stavitelství vědecké poznatky tehdejší doby, dochází k odlehčení konstrukcí a změně tvaru klenby. Významnou roli hrají finance a časová náročnost stavby. Dochází k velkému rozvoji dopravy železniční, později i automobilové. Významně se mění požadavky na konstrukci mostů, jejich zatížení. Původní představa mostu, který nejkratší spojnicí překonává vodní plochu nebo jinou přírodní překážku, doznává značné změny. Předmostí hraje významnou roli a železnice požaduje co nejmenší výškové rozdíly a co nejmenší změny směru, tedy potřeba šikmého přemostění roste.

Potřeba řešit klenbu nad šikmým průchodem se zvyšuje v souvislosti s rozvojem železniční dopravy i v Anglii, v důsledku toho vycházejí další publikace v jazyce anglickém.

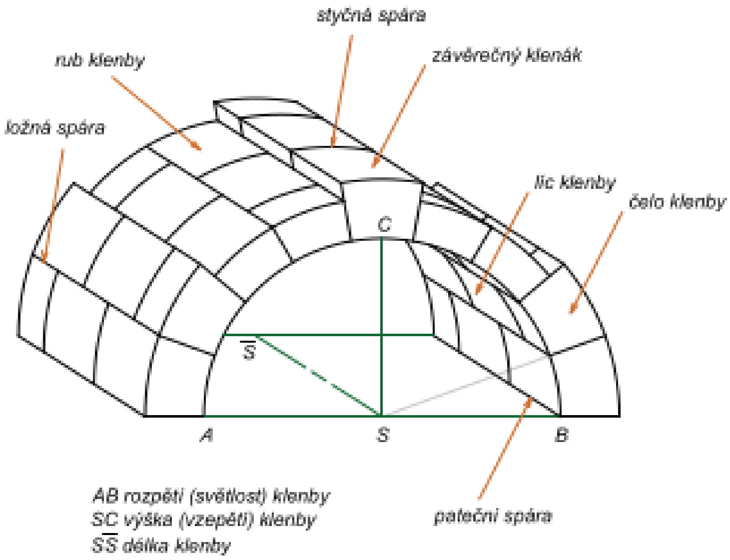
Ve starších česky psaných učebnicích deskriptivní geometrie najdeme kapitoly o klenbách včetně zmínek o různých způsobech řešení klenby šikmého průchodu. V učebnici *Deskriptivní geometrie II* pro stavební fakultu ČVUT v Praze z roku 1978 se píše:

„*Při řešení klenby z kamene leží styčné spáry ve tvořících přímkách plochy. Provedení ložných spár musí vyhovovat požadavkům kladeným na díla z tesaného kamene, užívají se k tomu dva způsoby, a to tzv. francouzské (starší), příp. anglické (novější) zřízení.*“ ([6])

Podrobnější vysvětlení však zde již není. Ve starší učebnici *Deskriptivní geometrie II* autorů Kadeřávek, Klíma, Kounovský z roku 1932 najdeme podrobné pojednání o ploše, a to jak v kapitole o zborcených přímkových plochách, tak v kapitole Úvod do stereotomie, kde je podrobně rozebráno tzv. francouzské zřízení, anglické jen lehce zmíněno. ([9], str. 711-716, 822-831).

Významnou roli hrálo opracování kamene, kámen byl vybírán většinou z lomů poblíž stavby, neboť doprava by stavbu prodražila. Způsob opracování kamene je pak významným vodítkem pro určení stáří klenby. Neméně důležité je určení způsobu spojení klenebních kamenů a velikosti spár. Opracování kamene bylo velmi náročné a drahé, proto se v Anglii objevují klenby zděné z vysoce kvalitních cihel.

Teorie a stavební praxe používají pro klenby specifické názvosloví, které je podrobně uvedeno v obr. 4.

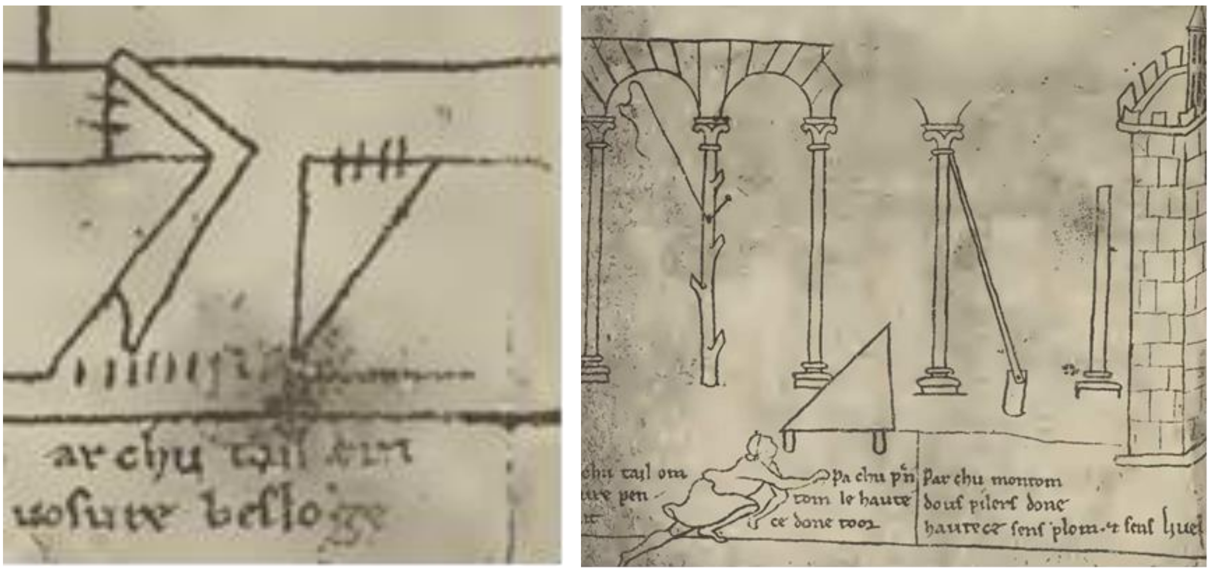


Obr. 4. Názvosloví – klenba

3 Historický vývoj řešení klenby šikmého průchodu

3.1 První písemná zmínka o řešení šikmého průchodu

Villard de Honnecourt (13. století) byl francouzský architekt a putující stavitel. Dochoval se nám jeho skicář, kde vedle náčrtů různých postav najdeme i náčrty týkající se stavebnických prací. Zda je v dochovaném skicáři opravdu schéma šikmého průchodu není jasné a vedou se o tom vědecké polemiky. Rozhodně v něm nalezneme praktické návody, které kameníci tehdejší doby potřebovali pro stavbu kleneb. Na obr. 5 vlevo je návod, jak otesat šikmý klenák. Skicář je důležitým dokladem o znalostech v oboru stavebnictví ve 13. století.



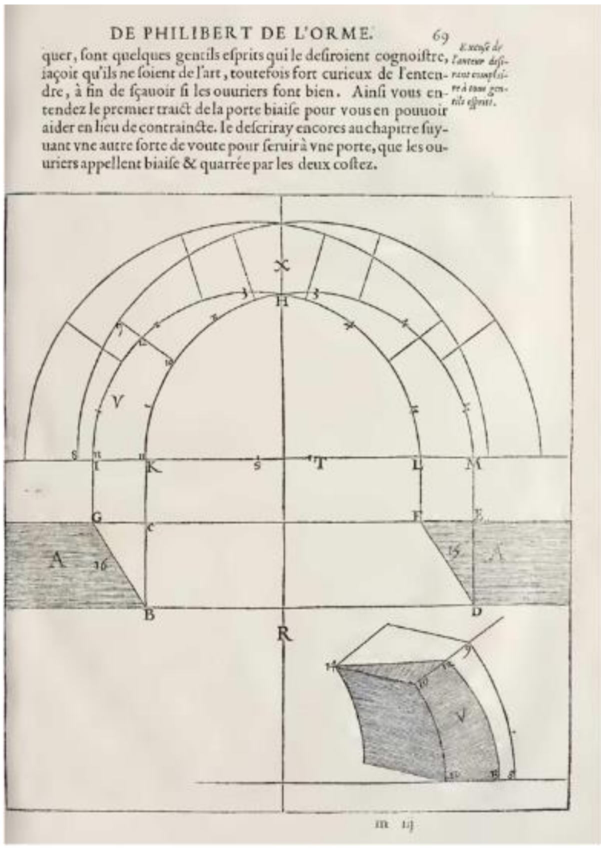
Obr. 5. Ukázky ze skicáře Villarda Honnecourta (tabulka XXXIX a XL)

3.2. Řešení pomocí zborcené přímkové plochy ve francouzských historických pojednáních

Vynález knihtisku v patnáctém století přinesl novou epochu ve stavebnictví a architektuře. Vznikalo velké množství pojednání zaměřených na pravidla navrhování i realizace staveb, vznikala pravidla pro zobrazování objektů, grafický jazyk se standardizoval. Informace tak mohly být předávány nejen ústní formou.

Francie té doby byla vyspělou zemí, není tedy divu, že zde jsou v průběhu let publikovány zásadní texty o stereotomii a mostním stavitelství.

Způsobem řešení zaklenutí šikmého průchodu se zabývali například Philibert de l´Orme (1567), Francois Derand (1743), Francois Frézier (1768), Joseph Adhémar (1853), Leroy (1870), S. Loignon (1872), a to v pojednáních o stereotomii a deskriptivní geometrii nebo o mostním stavitelství.


DE PHILIBERT DE L'ORME. 69

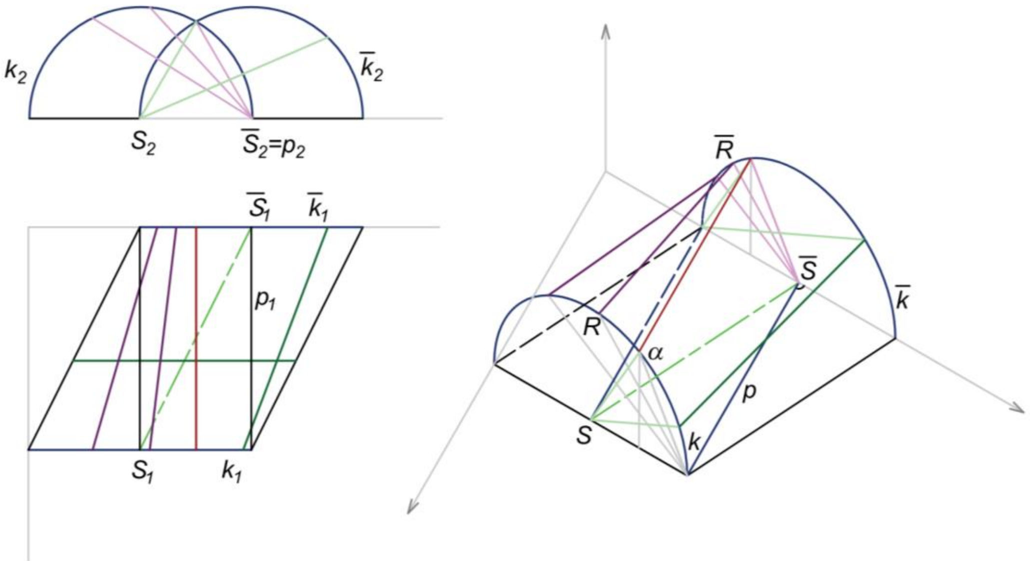
quer, font quelques gentils esprits qui le desiroient cognoistre, iaçoit qu'ils ne soient de l'art, toutefois fort curieux de l'entendre, à fin de sçauoir si les ouuriers font bien. Ainsi vous entendez le premier traict de la porte biaise pour vous en pouuoir aider en lieu de contraincte. Ie descriray encores au chapitre suyuant vne autre sorte de voute pour seruir à vne porte, que les ouuriers appellent biaise & quarrée par les deux costez.

Excuse de l'auteur desirant complaire à tous gentils esprits.

Obr. 6. Philibert de l´Orme Šikmý průchod ([4] III. Kniha o architektuře, str. 69)

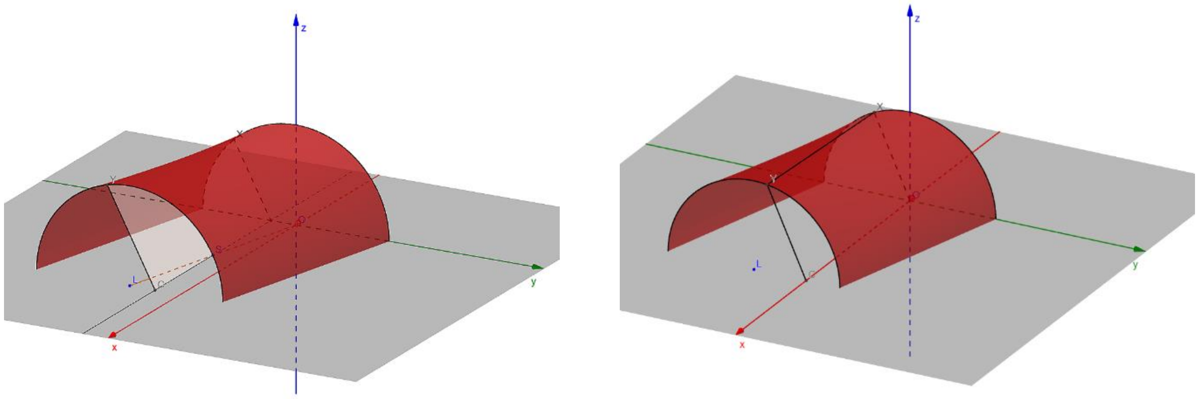
Řešení využitím zborcené přímkové plochy se objevuje již v knihách o architektuře Philiberta de l´Orme z roku 1567 [4], viz obr. 6. Jeho postup konstrukce je ilustrován na obr. 7. Plocha je rozdělena do dvou shodných částí. Řídicími útvary plochy jsou dvě shodné půlkružnice $k(S, r)$, $\bar{k}(\bar{S}; r)$ ležící v rovnoběžných rovinách, spojnice jejich středů $S\bar{S}$ svírá s rovinami kružnic úhel $\phi \neq \pi/2$, další řídicí útvar je přímka p, která prochází bodem $\bar{S}$, který je středem půlkružnice, přímka p je kolmá k rovinám kružnic, pro druhou polovinu je jiná řídicí přímka, která má stejný směr, ale vede středem S druhé kružnice.

Roku 1768 vydává Amadeé Francois Freziér svoje pojednání Traité de stereotomie a l'usage de l'architecture. V knize IV. nalezneme kapitolu, která je věnována šikmému průchodu. Kapitola končí zde zveřejněným nákresem Freziérovy představy řešení, viz obrázek 9. Z textu vyplývá, že takto sestrojenou plochu považuje Freziér za plochu válcovou ([8], str. 150 -156).



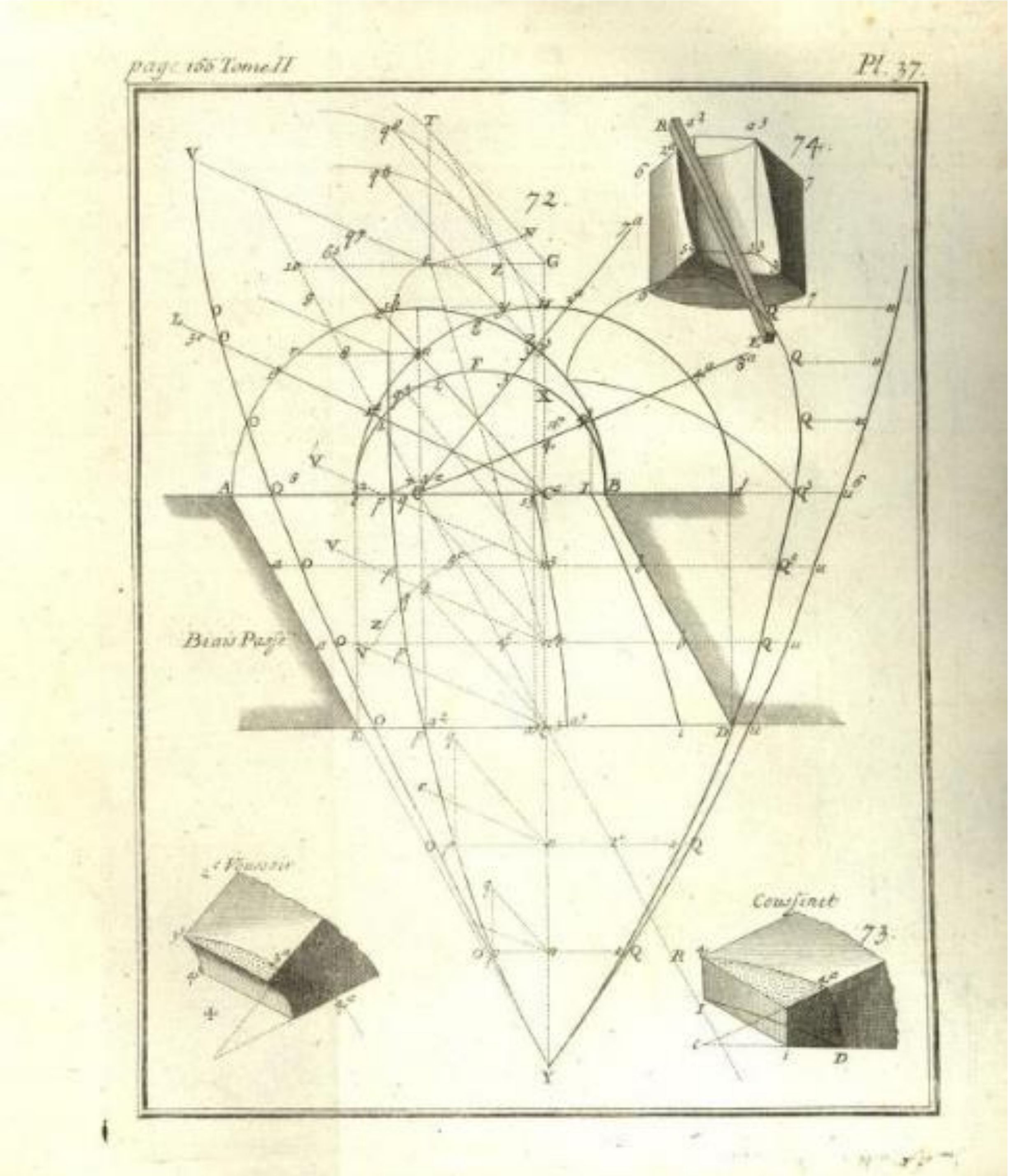
Obr. 7. Řešení šikmého průchodu pomocí dvou zborcených přímkových ploch, s řídicími přímkami procházejícími středy řídicích kruhových oblouků kolmo k rovinám těchto oblouků

Rozdíl mezi plochami lze vidět na obr. 8 na modelech vytvořených pomocí programu GeoGebra (autorka těchto modelů je RNDr. Stanislava Čečáková)



Obr. 8. Modely klenby šikmého průchodu,
vlevo klasické řešení, vpravo řešení popsané P. de l´Orme

Roku 1768 vydává Amadeé Francois Freziér svoje pojednání Traité de stereotomie a l'usage de l'architecture. V knize IV. nalezneme kapitolu, která je věnována šikmému průchodu. Kapitola končí zde zveřejněným nákresem Freziérovy představy řešení, viz obr. 9. Z textu vyplývá, že takto sestrojenou plochu považuje Freziér za plochu válcovou ([8], str. 150 -156).



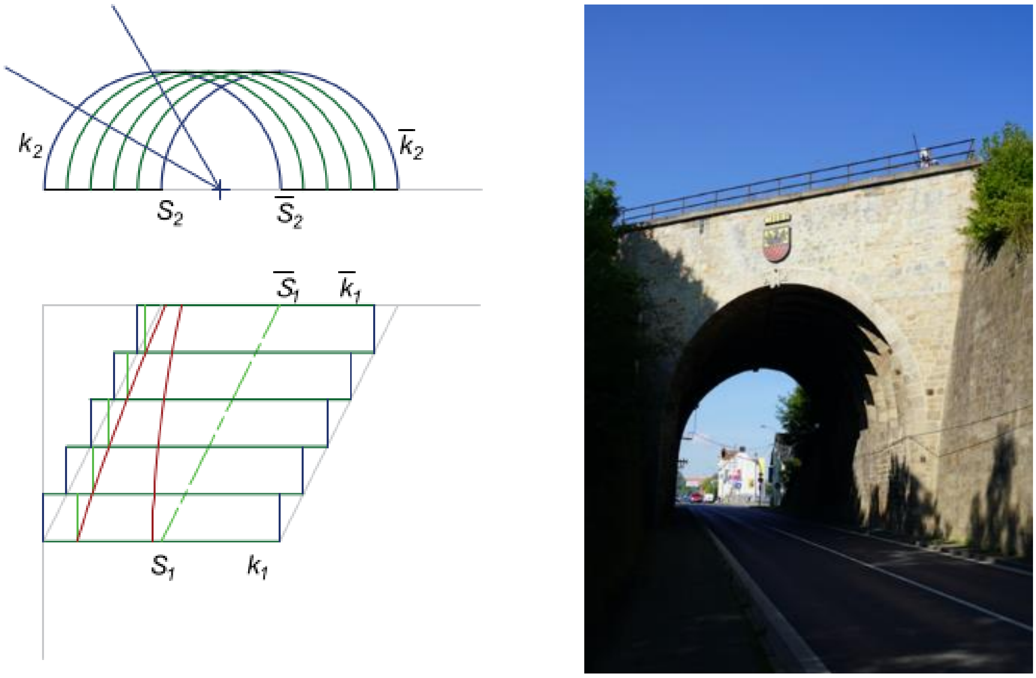
Obr. 9. Freziér - řešení šikmého průchodu ([8], str. 156)

Za povšimnutí stojí ještě následující dvě skutečnosti: za prvé způsob zobrazení objektu (již zde vidíme promítání na dvě k sobě kolmé průmětny), za druhé nákres způsobu opracování klenáků odebíráním hmoty, postup, který je ve francouzském stavitelství oblíbený i později.

V pojednáních z konce 19. století najdeme vedle řešení kleneb pomocí zborcených přímkových ploch i jiné způsoby klenutí, jak je dále popsáno.

3.3 Falešná šikmá klenba a z ní odvozená metoda ortogonální

Tato metoda je v učebnici Deskriptivní geometrie II autorů Kadeřávek, Klíma, Kounovský označena jako metoda ortogonální neboli francouzská ([9], str. 825). Jejím základem je tzv. falešný šikmý průchod. Celý úsek šikmého průchodu rozdělíme na pásy rovinami rovnoběžnými s čelem klenby, které po částech zakleneme valenou klenbou (obr. 10).

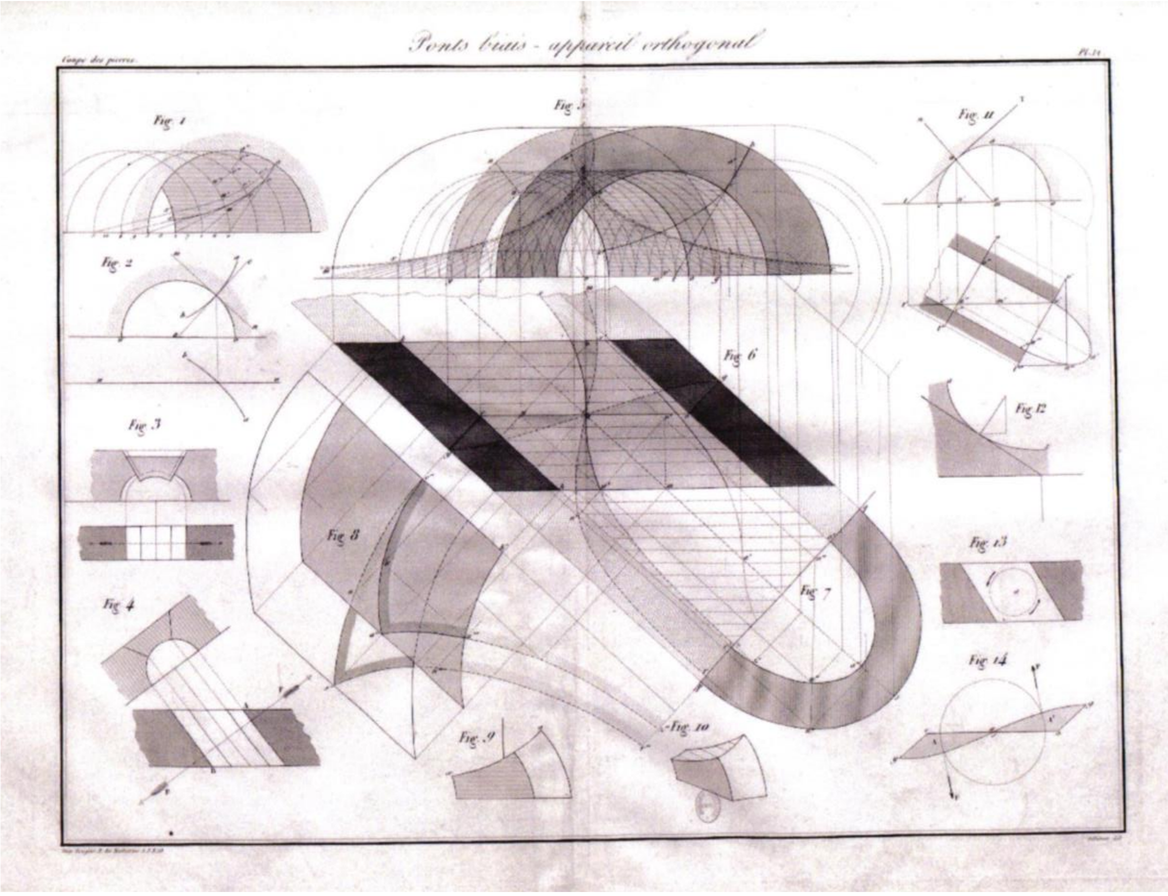


Obr. 10. Zaklenutí šikmého průchodu pomocí zřízení ortogonálního, náčrt řešení a viadukt v Chebu

Ložná spára je zde kolmá k čelu klenby, pokud uděláme pásy dostatečně jemné, pak přejde lomená čára do křivky kolmé k čelu klenby, tj. odtud plyne název ortogonální. V Čechách je takto řešen viadukt v Chebu přes řeku Ohři (viz obr. 10 a 11).

Obr. 11. Viadukt v Chebu, foto Martin Pospíšil

Nevýhodou tohoto způsobu klenutí je nedostatečná provázanost jednotlivých pásů klenby. Při velké zátěži se pak krajní bloky mohou odchýlit do vnější strany a tím ohrozit statiku mostu. Je tedy třeba řešit podrobně kamenořez i provázanost jednotlivých pásů.



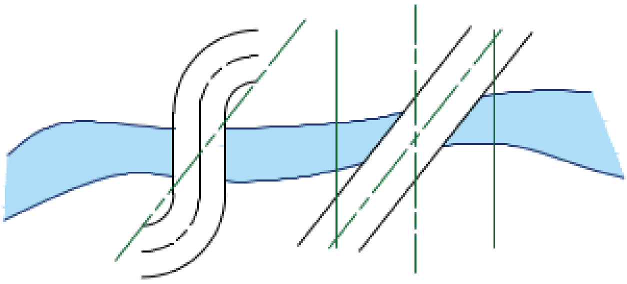
Obr. 12. Joseph Adhémar Pont biais - ortogonální zřízení ([1], tabulka 14)

V průběhu 19. století bylo publikováno několik knih týkajících se stavby mostů a většina z nich ukázala různé přístupy řešení klenby šikmého průchodu. Odkaz na ortogonální řešení najdeme ve většině z nich, například Joseph Adhémar napsal roku 1853 učební text pro stavební inženýry Pont biais, kde ukazuje všechna v té době známá řešení šikmé mostní klenby, a to nejen ortogonální řešení, ale i anglické šroubové (helicoidalní) řešení [1] (obr. 12). Z dalších autorů uveďme britského architekta a inženýra Petera Nicholsona a jeho A Practical Treatise on the Art of Masonry and Stone-cutting [17] nebo tisky francouzského autora Loignona Ponts biais [15]. Porovnání různých konstrukčních metod najdeme také v knize amerického autora Johna Culley Treatise on the Theory of the Construction of Helicoidal Oblique Arches [3] (na obr. 17 je jeho nákres logaritmické metody).

3.4 Metoda šroubová tzv. anglické zřízení (helicoidal)

Průmyslová revoluce v Anglii přinesla obrovský rozvoj železniční dopravy a potřebu budování nových tratí, v souvislosti s tím i změnu v pojetí konstrukce mostů. Dosud bylo zvykem překážku přemostit kolmo co nejkratší spojnicí. Železniční doprava však tyto požadavky změnila, neboť velké změny výšky i směru byly nevhodné, navíc bylo třeba přemostit velké množství plavebních kanálů.

Jedno z možných řešení bylo rozšíření mostů tak, jak naznačuje obr. 13, ale ne vždy to bylo možné vzhledem k předmostí, navíc se tím zvýšila cena mostu. Takže vzrostla potřeba řešení pomocí klenby nad šikmým průchodem. Toho si byli angličtí projektanti dobře vědomi.



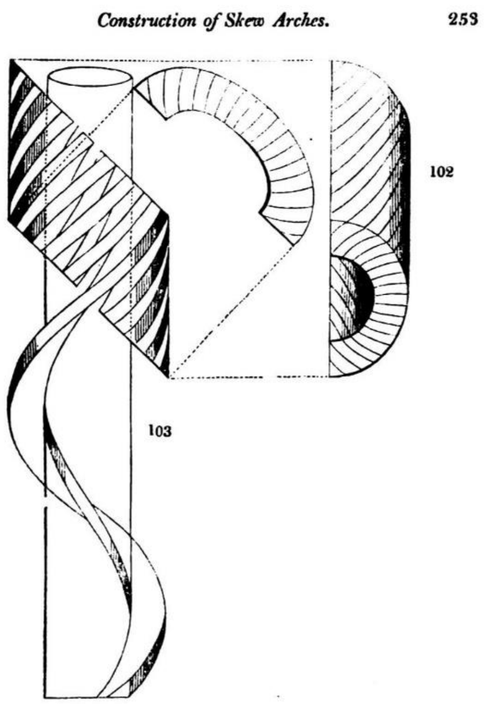
Obr. 13. Šikmé přemostění s naznačením nahrazení kolmým přemostěním

Charles Fox v úvodu své eseje „*On the Construction of Skew Arches*“ z roku 1836 [7] zdůvodňuje potřebu nalezení vhodného řešení šikmé klenby takto:

„Wherever a canal is thus crossed at an angle, we must either divert the canal, so as to bring it at right angles to the railway, or we must build a common square bridge of sufficient span to allow the canal, its course being unaltere, to pass uninterruptedly under it, or we must erect a proper skew bridge.“

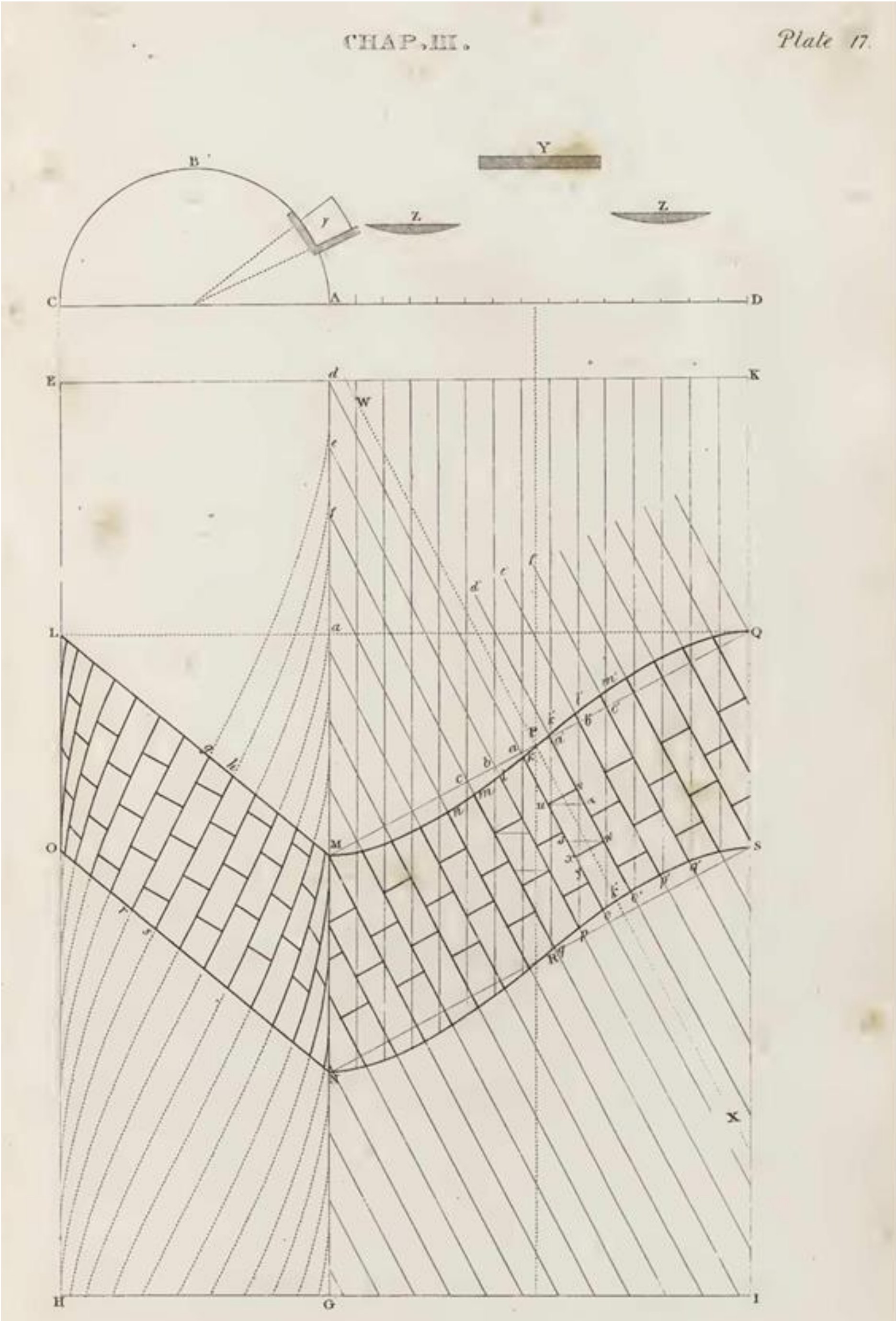
Problém, který bylo třeba nyní vyřešit, mohl být formulován takto: Jak vystavět velké množství mostů, a to v co nejkratším čase, a navíc s co nejmenšími náklady. Dosavadní způsob stavby kamenných mostů byl velmi drahý, neboť klenáky byly navrženy přesně na dané místo a musely být otesány s velkou přesností.

Již zmiňovaný Charles Fox, tehdy mladý inženýr, v detailu představil řešení, které bylo později nazýváno zřízení anglické nebo šroubové (helicoidal). Princip této metody je zobrazen na obr. 14.



Obr. 14. Šroubová (helicoidální) konstrukce podle Ch. Foxe [7]

První nástin tohoto přístupu najdeme ještě před Foxem u skotského architekta Petera Nicholsona, ale on řešil především lícní stranu klenby, dále byl jeho přístup spíše intuitivní.

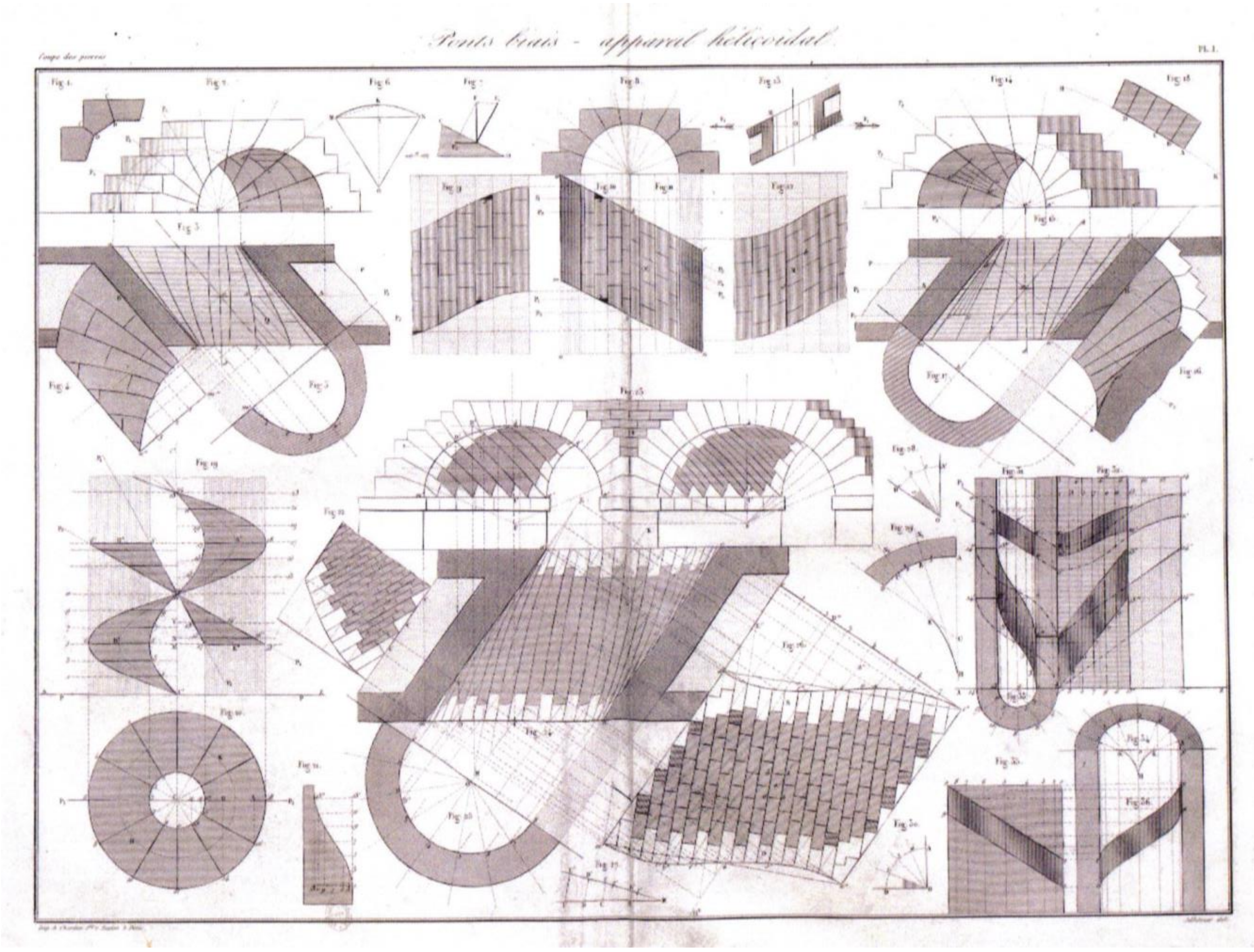


Obr.15. Nicholson A Practical Treatise on the Art of Masonry and Stone-cutting – kamenořez pro šroubové zřízení ([17], kapitola III, tabulka 17)

Fox přesně definuje líc i rub klenby. Jeho pojetí umožňuje použití menších kamenných bloků, například i cihel, což byl značný ekonomický přínos pro výstavbu železničních tratí.

Lícní plocha klenby je plocha válcová, samotná klenba je tvořena jako plocha šroubová, tj. osa válce je osou šroubového pohybu.

Další autoři tuto konstrukci vylepšují a zdokonalují, např. Adhémar (viz obr. 16).

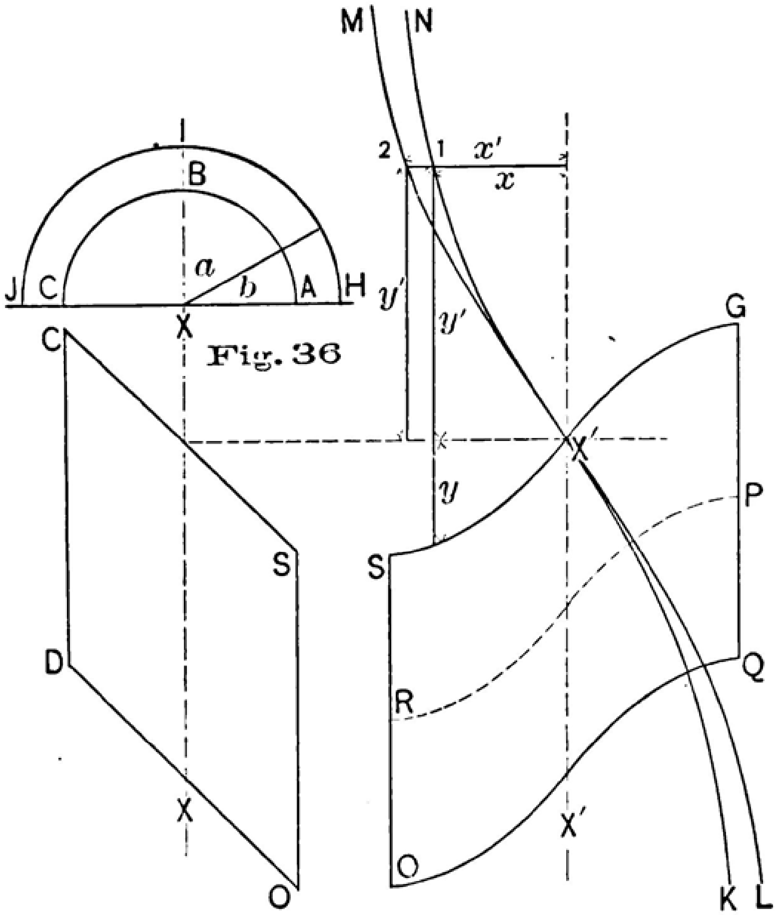


Obr. 16. Joseph Adhémar Pont biais – šroubové zřízení ([1], tabulka 1)

3.5. Metoda logaritmická

Logaritmická metoda se jmenuje podle způsobu výpočtu kamenořezu pro šroubové zřízení šikmého průchodu, užívá se zde logaritmů. Je připisována skotskému matematikovi a stavebnímu inženýrovi Edwardu Sangovi, který je odborné veřejnosti znám jako autor logaritmických tabulek. Díky výpočtu bylo možné určit přesněji ložné spáry tak, aby jejich směr byl kolmý k čelu klenby. Pro statiku mostů takto klenutých je logaritmická metoda vhodná, což dokládají i nedávné výzkumy závislosti deformace klenby na zatížení u různých typů kamenných mostů (např. Forgács [5]). Nevýhodou této metody je různý tvar klenáků a z toho plynoucí potřeba mnoha šablon pro jejich tvorbu.

Do jaké míry se matematický způsob výpočtu ložných spár blíží konstrukčnímu geometrickému určování spár metodou ortogonální je předmětem dalšího výzkumu.



Obr. 17. John L. Cully logaritmická metoda ([3], str. 97)

4 Závěr

Autoři prvních nákresů klenby šikmého průchodu a slovních pojednání o ní byli projektanti a stavitelé v jedné osobě. Později, v souvislosti s větším rozšířením klenby nad šikmým průchodem v praxi, se objevují různá teoretická řešení, která reagovala na ekonomické a technické potřeby tehdejší společnosti. Technicky vzdělaní odborníci, jejichž hlavním oborem bylo mostní stavitelství, publikovali celé knihy o klenbě šikmého průchodu a o šikmých mostech. Knihy vycházely především ve Francii, v Británii a ve Spojených státech amerických. Postupná specializace vědních oborů souvisejících se stavebnictvím vedla ke vzniku deskriptivní geometrie. V počátcích deskriptivní geometrie byl její součástí také kamenořez. Ten je u klenby šikmého průchodu podstatný. S vývojem nových konstrukčních materiálů na začátku dvacátého století však jeho význam klesl. V učebnicích deskriptivní geometrie z této doby najdeme teoretické řešení plochy šikmého průchodu pomocí zborcené přímkové plochy, dále pak celou teorii zborcených ploch, výpočty rovnic těchto ploch a jejich další geometrické vlastnosti. Souvislosti s realizacemi klenby šikmého průchodu ve stavební praxi se vytratily. V českých učebnicích zůstává zmínka o použití zborcené přímkové plochy šikmého průchodu u Negrelliho viaduktu v Praze. Současná podoba po dokončené rekonstrukci je vidět na obr. 18. Jedná se pravděpodobně o nejznámější realizaci této klenby v Čechách.

Obr. 18. Negrelliho viadukt v Praze Karlíně, foto Dana Kolářová

Vyšehradský tunel v Praze, který bývá v této souvislosti také zmiňován, rozhodně není řešen jako zborcená přímková plocha. Je to jasně vidět z obr. 19. Určit metodu řešení klenby nad šikmým průchodem u této stavby by vyžadovalo podrobné zaměření nebo dohledání původních plánů.

Obr. 19. Vyšehradský tunel v Praze Podolí, foto Dana Kolářová

Pokud chceme posílit význam deskriptivní geometrie v současné době, pak je třeba učit studenty v souvislostech a vést je k pochopení významu jednotlivých geometrických interpretací. Problematika klenby nad šikmým průchodem se zdá v tomto ohledu vhodná volba.

Literatura

[1] ADHÉMAR, J. *Cours de mathématiques à l'usage de l'ingénieur civil: Application de géometrie descriptive: ponts biais, extrait du recueil des exercises et questions diverses.* Paris, 1834.

[2] CALVO-LÓPEZ, J. *Stereotomy: Stone Construction and Geometry in Western Europe 1200-1900*. Cham: Springer, 2020, ISBN 978-3-030-43217-1.

[3] CULLEY, J. *l. Treatise on the Theory of the Construction of Helicoidal Oblique Arches*. New York: D van Nostrand Publisher, 1886.

[4] DE L´ORME, P. *Le premier tome de l´architectvre*. Paris: Chez Federic Morel, 1567.

[5] DRÁBEK, K., HARANT, F., SETZER, O. *Deskriptivní geometrie II*. Praha: Nakladatelství technické literatury. Řada teoretické literatury, 1978.

[6] FORGÁCS, T., SARHOSIS, V., BAGI, K. Influence of construction method on the load bearing capacity of skew masonry arches. In *Engineering Structures*. **168**: 612-627. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.005. 2018. ISSN 01410296. Dostupné na internete: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029617318965

[7] FOX, Ch. On the construction of skew arches. In *Architectural Magazine*. London: Longman, Rees, Orme, Brown, Green and Longman, **3,** 1836. pp. 251-260.

[8] FREZIÉR, A., F. *La theorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des batimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie a l'usage de l'architecture*. 2. Paris: rue Dauphine, chez Charles Antoine Jombert, libraire du roy pour l'artillerie & legénie, à l'image Notre Dame, 1768.

[9] KADEŘÁVEK, F., KLÍMA, J., KOUNOVSKÝ, J. *Deskriptivní geometrie*. V Praze: Jednota čsl. matematiků a fysiků. Knihovna spisů matematických a fysikálních, 1932.

[10] KLÍMA, J., ŠIMEK, K. *Kamenořez*. Praha: Jednota českých matematiků a fysiků. Cesta k vědění, 1944.

[11] KOLÁŘOVÁ, D. Plocha šikmého průchodu v nosné konstrukci historických mostů. In *Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2021*. Bratislava: Vydavateľstvo Slovak Chemistry Library, 2021. ISBN 978-80-8208-066-0, s. 97-102.

[12] KOUNOVSKÝ, J. *Zborcené plochy*. Praha: Jednota čsl. matematiků a fysiků. Cesta k vědění, 1947.

[13] KOUNOVSKÝ, J., VYČICHLO, F. *Deskriptivní geometrie*. 4. vyd. Praha: Nakladatelství ČSAV. Práce Čs. akademie věd. Sekce matematicko-fysikální, 1956.

[14] LIPANSKÁ, E. *Historické klenby*. Praha: EL Consult, 1998. ISBN 80-902076-1-8.

[15] LOIGNON, S. *Ponts Biais*. 1. Paris: Imprimerie Typographique et Lithographique de CH. Bernard, 1872.

[16] MENCL, F. Rozvoj mostů klenutých. In *Technický obzor*. Praha: Spolek architektů a inženýrů v Království českém, 1911. XIX (4-14): 25-26,33-35,41-43,52-57,66-68, 77-78,81-85,91-93. ISSN n111b.

[17] NICHOLSON, P. *Practical Treatise on the art of masonry and stone-cutting*. 3. London: Printed for J. Maynard, 1835.

[18] PISKA, R. MEDEK, V. *Deskriptivní geometrie II*. 2. rozš. a přeprac. vyd. Nakladatelství technické literatury: Alfa. Řada teoretické literatury, 1975.

[19] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury. Řada teoretické literatury, 1965.

RNDr. Dana Kolářová

Ústav nosných konstrukcí
Fakulta architektury ČVUT v Praze
Thákurova 9, 166 34 Praha 6, Česká republika
e-mail: kolarova@fa.cvut.cz

Plücker's Conoid Revisited

Hellmuth Stachel

Abstrakt
Plückerov konoid (cylindroid) $\mathcal{C}$ je priamková plocha tretieho stupňa s jednou vlastnou dvojnásobnou priamkou. Táto plocha zohráva kľúčovú úlohu v geometrickej literatúre, pretože všetky jej úpätnice sú rovinné krivky. Je geometrickým miestom dvojíc mimobežných priamok, pre ktoré je daný kolmý hyperbolický paraboloid bisektorom. V priestorovej kinematike je $\mathcal{C}$ geometrickým miestom okamžitých polôh osí relatívneho skrutkového pohybu dvoch otáčajúcich sa kolies s pevnými mimobežnými osami. Napokon, štyri koncyklické generátory $\mathcal{C}$ sú spoločnými dotyčnicami nekonečného počtu guľových plôch, a v článku študujeme ich obalovú kanálovú plochu.

Kľúčové slová: Plückerov konoid, cylindroid, bisektor, jednodielny rotačný hyperboloid, kolmý hyperbolický paraboloid

Abstract
Plücker's conoid (cylindroid) $\mathcal{C}$ is a ruled surface of degree three with a finite double line. This surface plays a major role in the geometric literature since all its pedal curves are planar. It is the locus of pairs of skew lines for which a given orthogonal hyperbolic paraboloid is the bisector. In spatial kinematics, $\mathcal{C}$ is the locus of instantaneous screw axes of the relative motion for two rotating wheels with fixed skew axes. Finally, four concyclic generators of $\mathcal{C}$ are common tangents of infinitely many spheres, and we study their enveloping canal surface.

Keywords: Plücker's conoid, cylindroid, bisector, one-sheeted hyperboloid of revolution, orthogonal hyperbolic paraboloid

1 Introduction

Plücker's conoid $\mathcal{C}$, which is also known under the name *cylindroid*, is a ruled surface of degree three with a finite double line and a director line at infinity (see Fig. 1). Using cylinder coordinates (r, φ, z), the conoid can be given by the equation

$$\mathcal{C}\colon\ z = c\,\sin 2\varphi \tag{1}$$

with a constant $c \in \mathbb{R}_{>0}$. All generators of $\mathcal{C}$ are parallel to the $[x, y]$-plane. The z-axis is the double line d of $\mathcal{C}$ and an axis of symmetry. The conoid passes through the x- and y-axis. These two lines c_1, c_2, called *central generators* of $\mathcal{C}$, are axes of symmetry, as well. The Plücker conoid $\mathcal{C}$ is the trajectory of the x-axis under a motion composed from a rotation about the z-axis and a harmonic oscillation with double frequency along the z-axis [13, p. 37] (Fig. 2).

The substitution $x = r\cos\varphi$ and $y = \sin\varphi$ in (1) yields the Cartesian equation

$$(x^2 + y^2)\, z - 2c\, xy = 0, \tag{2}$$

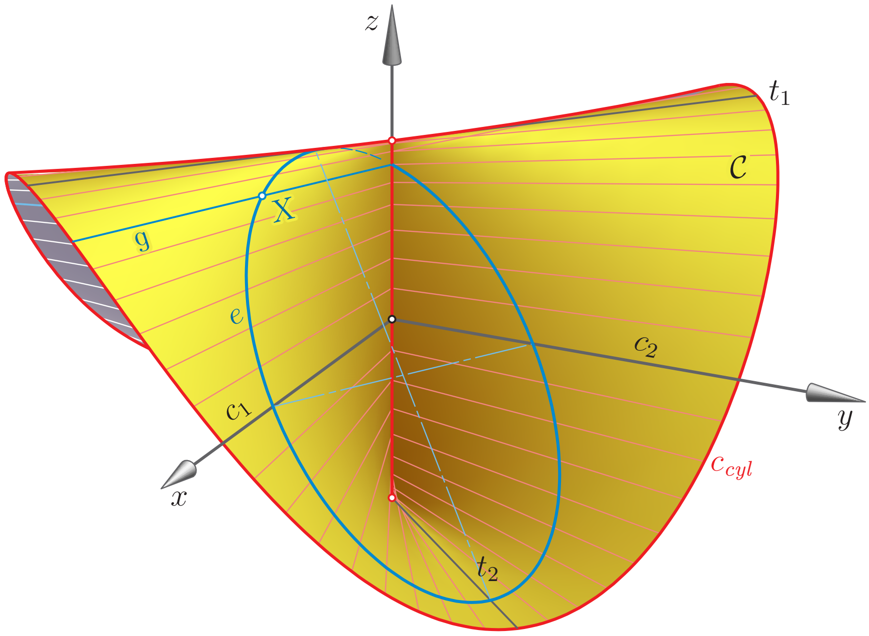


Fig. 1. Plücker's conoid $\mathcal{C}$ with central generators c_1 and c_2, torsal generators t_1 and t_2, the generator g through X, and the ellipse e in the tangent plane τ_X to $\mathcal{C}$ at point X.

which reveals that reflections in the planes $x \pm y = 0$ map $\mathcal{C}$ onto itself. The origin O is called the *center* of $\mathcal{C}$.

The right cylinder $x^2 + y^2 = R^2$ intersects the Plücker conoid $\mathcal{C}$ along a curve c_{cyl} of degree 4[1] (see Fig. 1), which in the cylinder's development appears as the Sine-curve with amplitude c and wavelength $R\pi$ (Fig. 2). The generators of $\mathcal{C}$ connect opposite points c_{cyl}.[2] The conoid is bounded by the planes $z = \pm c$, which contact $\mathcal{C}$ along the torsal generators t_1 and t_2. Their distance $2c$ is called the *width* of $\mathcal{C}$.

For the sake of simplicity, we assume that the $[x, y]$-plane and all generators of $\mathcal{C}$ are horizontal and the z-axis is vertical. In this sense, the *top view* stands for the image after vertical projection into the $[x, y]$-plane; a prime will be used to indicate the top views of geometric objects.

The top view reveals that the intersection of Plücker's conoid $\mathcal{C}$ with any right cylinder $\mathcal{Z}$ through the double line d gives a curve e which in the cylinder's development shows up as one period of a Sine curve (Fig. 3). Therefore, e is an ellipse with principal vertices on the torsal generators. There exists a two-parameter set of ellipses e on $\mathcal{C}$. They all have the same excentricity c, as it equals the z-coordinates' difference of a principal vertex and the center of e [6, p. 208].

The secondary vertices of e lie on the central generators c_1 and c_2. Ellipses $e \subset \mathcal{C}$ with the same minor semiaxis are congruent, and their planes have the same slope. All these ellipses are poses of one ellipse when it performs the 3D-continuation of an elliptic motion (see [14, p. 45]) under

[1]The remaining part of the curve of intersection consists of the lines at infinity of the two complex conjugate planes $x \pm iy = 0$.

[2]See models #96 – #100 of the collection of mathematical models at the Institute of Discrete Mathematics and Geometry, Vienna University of Technology, `https://www.geometrie.tuwien.ac.at/modelle/models_show.php?mode=2&n=100&id=0`, retrieved Sept. 2022. All these models originate from Schilling's collection as presented in [9].

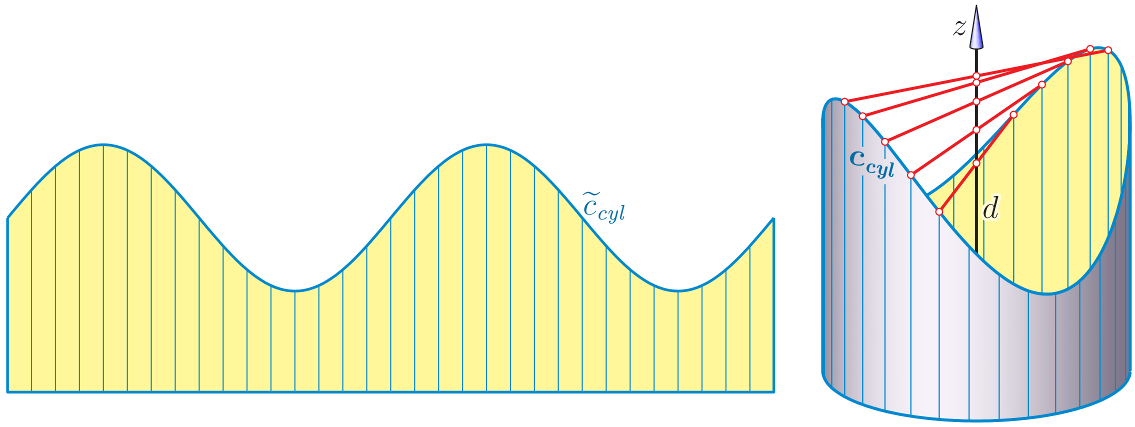


Fig. 2. The intersection c_{cyl} of Plücker's conoid $\mathcal{C}$ with a right cylinder about the double line $d = z$-axis appears in the cylinder's development as two periods of a Sine curve. The generators of $\mathcal{C}$ connect opposite points of c_{cyl} .

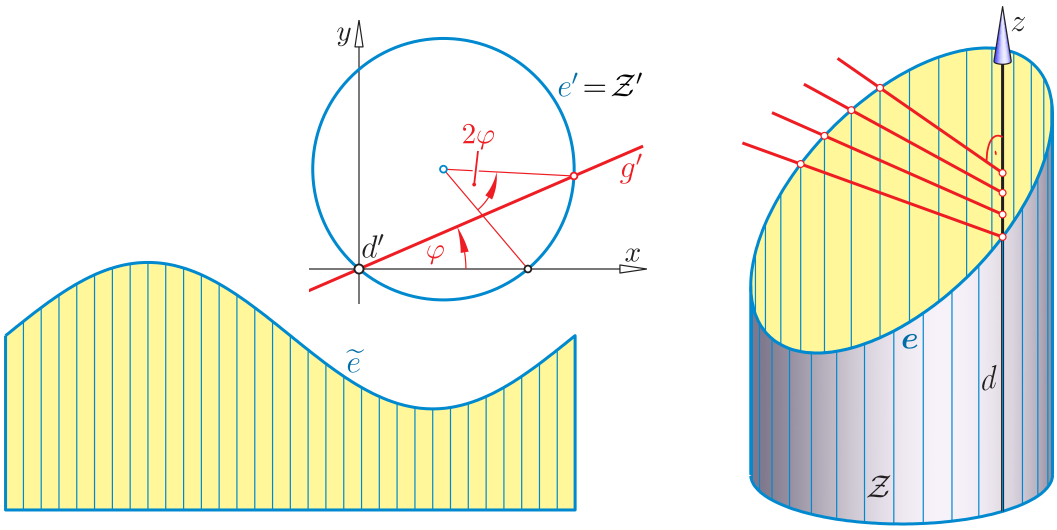


Fig. 3. The intersection e of the conoid $\mathcal{C}$ with a right cylinder $\mathcal{Z}$ through the double line d appears in the cylinder's development as one period $\widetilde{e}$ of a Sine curve. The generators of $\mathcal{C}$ meet e and intersect d orthogonally.

which the secondary vertices trace the central generators [6, p. 209].

Lemma 1.1. Let g_1, g_2, g_3 be three lines with an orthogonal transversal d such that no two of the three lines are parallel, and they are not coplanar either. Then there exists a unique Plücker conoid $\mathcal{C}$ passing through these lines.

Proof. We choose any right cylinder $\mathcal{Z}$ which passes through d and does not contact any of the given lines. Then their remaining points of intersection with $\mathcal{Z}$ span a plane that intersects $\mathcal{Z}$ along an ellipse e thus defining $\mathcal{C}$ as shown in Fig. 3. □

The intersection of $\mathcal{C}$ with the plane of any ellipse e must additionally contain a line $g \in \mathcal{C}$ passing through the common point of e and d (Fig. 1). This generator g, which is horizontal and therefore parallel to the minor axis of e, shares with e another point X. This must be the point of contact between the conoid and the plane of e. In other words: The tangent plane τ_X to $\mathcal{C}$ at X intersects $\mathcal{C}$ beside the generator g along an ellipse e which appears in the top view as a circle e' through d'.

The top view gives insight into another important property of the ellipse $e = \tau_X \cap \mathcal{C}$ (Fig. 4). For all points P in space with the top view $P' \in e'$ opposite to the top view d' of the double line, the *pedal curve* on $\mathcal{C}$, i.e., the locus of pedal points of P on the generators of $\mathcal{C}$, coincides with e. This holds since right angles enclosed with generators of $\mathcal{C}$ appear in the top view again as right angles, provided that the spanned plane is not parallel to the double line d. It means conversely that for each point of e the surface normal to $\mathcal{C}$ meets the vertical line through P'. We summarize.

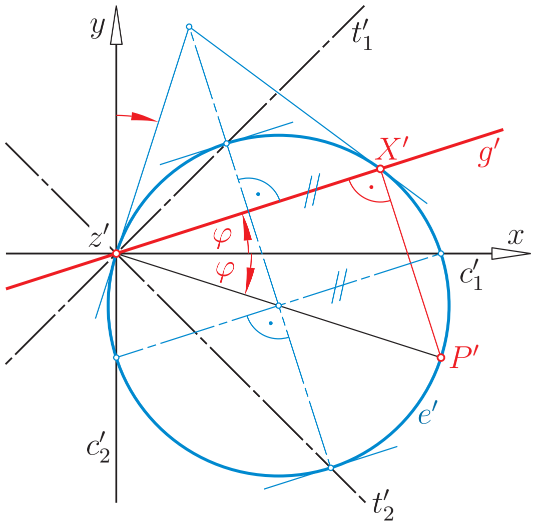


Fig. 4. X is the pedal point of g for all points P with the top view P'; the ellipse $e \in \mathcal{C}$ is the pedal curve of P.

Lemma 1.2. All pedal curves of Plücker's conoid $\mathcal{C}$ are planar. For points outside the double line the pedal curves are ellipses with the same excentricity.

Due to P. Appell [1], Plücker's conoid is the only algebraic non-torsal ruled surface with planar pedal curves (note also [6, p. 211]).

2 Bisector of two skew lines

A classical result states that the *bisector* of two skew lines ℓ_1, ℓ_2, i.e., the set of points X being equidistant to ℓ_1 and ℓ_2, is an orthogonal (or equilateral) hyperbolic paraboloid (Fig. 5). This is reported, e.g., in [8, p. 154] or [7, p. 64].

If in an appropriate coordinate system (x, y, z) the lines ℓ_1, ℓ_2 are given by $z = \pm d$ and $x \sin\alpha = \pm y \cos\alpha$, then the bisector satisfies the equation

$$\mathcal{P}:\ 2d\,z + xy \sin 2\alpha = 0. \tag{3}$$

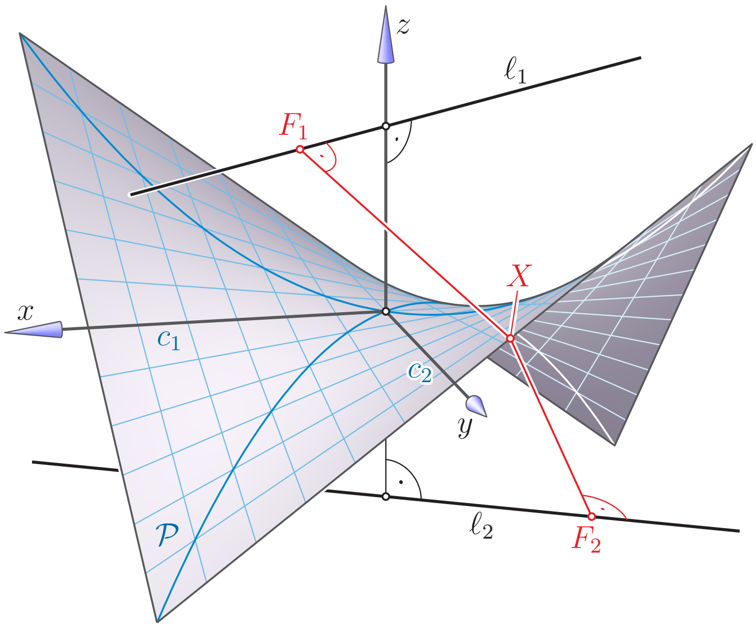


Fig. 5. The bisector of two skew lines ℓ_1 and ℓ_2 is an orthogonal hyperbolic paraboloid $\mathcal{P}$ which contains the axes of symmetry c_1, c_2 of ℓ_1 and ℓ_2 as vertex generators.

Conversely, the question for all pairs (ℓ_1, ℓ_2) of lines for which a given orthogonal hyperbolic paraboloid $\mathcal{P}$ is the bisector, was answered in [4], but already reported at the turn to the 20$^{\text{th}}$ century in [9, p. 54]. We recall:

Lemma 2.1. All pairs of skew lines (ℓ_1, ℓ_2) which share the bisecting orthogonal hyperbolic paraboloid $\mathcal{P}$ are located on a Plücker conoid $\mathcal{C}$ in symmetric position with respect to the central generators c_1 and c_2 of $\mathcal{C}$, that coincide with the vertex generators of $\mathcal{P}$.

Proof. We refer to the coordinates of ℓ_1 and ℓ_2 as given above. Then the paraboloid $\mathcal{P}$ satisfying (3) remains the same if the quotient $d/\sin 2\alpha$ does not change. Obviously, the points $X = (r\cos\alpha,\ \pm r\sin\alpha,\ \pm d)$ $(r \in \mathbb{R})$ of ℓ_1 and ℓ_2 satisfy

$$\mathcal{C}\colon\ (x^2+y^2)\,z - 2c\,xy = 0 \ \text{ for }\ c := \frac{d}{\sin 2\alpha}\,. \tag{4}$$

This is the equation of a Plücker conoid $\mathcal{C}$ according to (2). The lines (ℓ_1, ℓ_2) are symmetric with respect to (w.r.t., for short) to the x- and y-axis, i.e., to the central generators c_1 and c_2 of $\mathcal{C}$ (Fig. 7). □

As reported in [7, Theorem2.3.6], the lines ℓ_1, ℓ_2 are polar w.r.t. $\mathcal{P}$, i.e., each point $X_1 \in \ell_1$ is conjugate w.r.t. $\mathcal{P}$ to all points $X_2 \in \ell_2$, and vice versa. This follows since the coordinates $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ for $i = 1, 2$ with

$$y_1 = x_1\tan\alpha,\ z_1 = d, \qquad y_2 = -x_2\tan\alpha,\ z_1 = -d$$

satisfy the polar form of $\mathcal{P}$,

$$d(z_1+z_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Therefore, the polarity in the paraboloid $\mathcal{P}$ maps the Plücker conoid $\mathcal{C}$ onto itself. The ellipses e in tangent planes of $\mathcal{C}$ are polar to the quadratic cones of tangents drawn from points $X \in \mathcal{C}$ to $\mathcal{C}$. For further details see [11, Theorem 3].

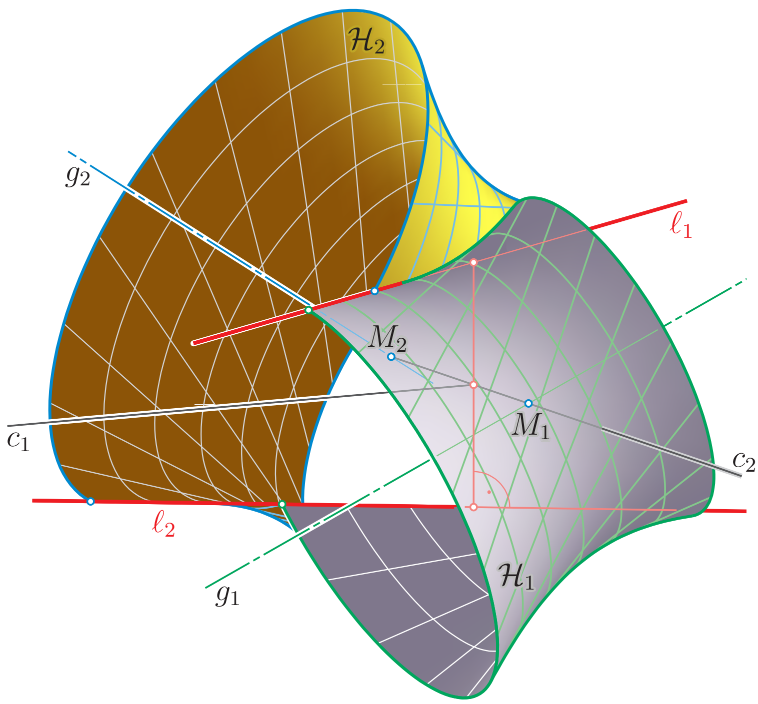


Fig. 6. Two hyperboloids of revolution $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ through two skew lines ℓ_1 and ℓ_2. The two hyperboloids with respective centers M_1, M_2 and axes g_1, g_2 on the bisecting paraboloid (with vertex generators c_1, c_2) share the secondary semiaxis.

3 Plücker's conoid as locus of instant screw axes for skew gears

Here we report about another property of the bisecting orthogonal paraboloid $\mathcal{P}$ of two skew lines ℓ_1, ℓ_2 (see, e.g., [7, Theorem 2.3.5]): The generators of $\mathcal{P}$ are the axes of rotations which send the line ℓ_1 to the line ℓ_2 (Fig. 7). In other words: The generators of $\mathcal{P}$ are axes of one-sheeted hyperboloids of revolution passing through symmetric pairs of lines ℓ_1, ℓ_2 (Fig. 6). These hyperboloids are centered on vertex generators of $\mathcal{P}$. By the way, the two hyperboloids share the secondary semiaxis b. This follows from a result of Wunderlich [15] and Krames [5] which states that two skew generators ℓ_1, ℓ_2 of any hyperboloid of revolution define already the secondary semiaxis $b = d \cot \varphi$, where $2d = \overline{\ell_1 \ell_2}$ and $2\varphi = \sphericalangle\, \ell_1 \ell_2$ (see also [7, p. 37]).

By virtue of Lemma 2.1, the lines ℓ_1, ℓ_2 are generators of the Plücker conoid $\mathcal{C}$ and symmetric w.r.t. the central generators c_1, c_2 (Fig. 7). The limit $\ell_1, \ell_2 \to c_1$ reveals that generators of $\mathcal{P}$ being skew to c_1 are axes of hyperboloids which contact $\mathcal{C}$ along c_1. Therefore, all c_1 intersecting generators of the orthogonal hyperbolic paraboloid $\mathcal{P}$ are surface normals of $\mathcal{C}$.[3]

[3]Model XXIII, no. 10, of Schilling's famous collection of mathematical models [9] shows the pair of surfaces $\mathcal{C}$ and $\mathcal{P}$ (see, e.g., `https://www.geometrie.tuwien.ac.at/modelle/models_show.php?mode=`

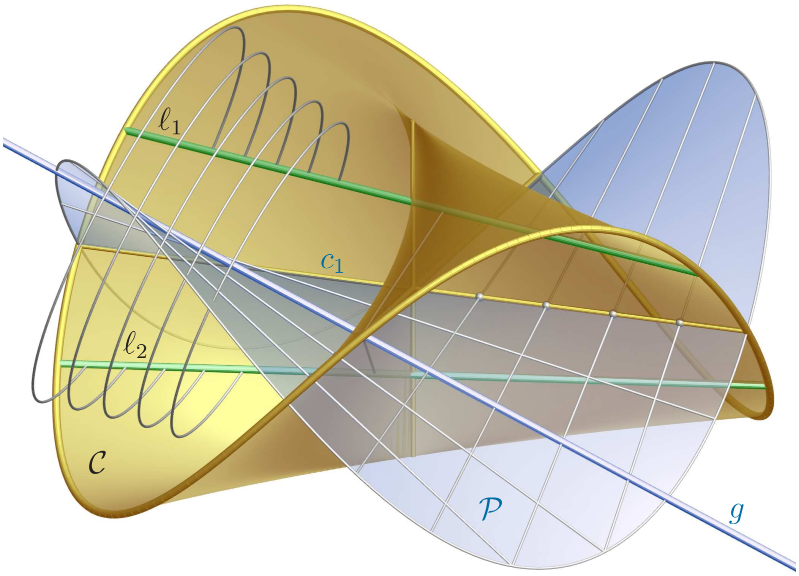


Fig. 7. All pairs of skew lines (ℓ_1, ℓ_2) which share the bisecting orthogonal hyperbolic paraboloid $\mathcal{P}$ are located on a Plücker conoid $\mathcal{C}$. Generators g of $\mathcal{P}$ are axes of rotations with $\ell_1 \mapsto \ell_2$ (courtesy: G. GLAESER).

Two generators of the $\mathcal{P}$-regulus through c_2 are axes of hyperboloids of revolution with mutual contact along the other vertex generator c_1, since both hyperboloids contact $\mathcal{C}$. However, also a converse statement holds true: Lines $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{C}$ which are symmetric w.r.t. the central generators c_1, c_2, are axes of hyperboloids of revolution with mutual contact along c_1. This follows immediately by a $180°$-rotation about c_1, which exchanges c_1 and c_2 and transforms one hyperboloid in the other.

It is surprising that this remains true if c_1 is replaced by any other generator of the Plücker conoid $\mathcal{C}$. This result is well-known in spatial kinematics: the Plücker conoid $\mathcal{C}$ is the locus of instant axes ℓ_{12} of the relative screw motion of two wheels that rotate with respectively constant velocities ω_1 and ω_2 about fixed axes $\ell_1, \ell_2 \subset \mathcal{C}$ being symmetric w.r.t. the central generators c_1, c_2 of $\mathcal{C}$. The axodes of the relative screw motion are the hyperboloids of revolution $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ with mutual contact along ℓ_{12} as mentioned before (see, e.g., [7, Figs. 2.19, 2.20]).[4]

Thus, the conoid $\mathcal{C}$ provides the solution of a purely geometric problem: For given skew axes ℓ_1, ℓ_2, find pairs of hyperboloids of revolution which contact each other along a line.

A standard proof of this result uses dual vectors for the representation of oriented lines and screws (see, e.g., [2]). Here we present a synthetic proof of an equivalent statement.

Theorem 3.1. Given two skew lines ℓ_1, ℓ_2, the vertex generators of all orthogonal hyperbolic paraboloids through ℓ_1 and ℓ_2 belong to a Plücker conoid $\mathcal{C}$. The axes of symmetry of ℓ_1, ℓ_2 are the central generators of $\mathcal{C}$.

Proof. Why this theorem is equivalent to the statement on pairs of hyperboloids $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ of

`2&n=100&id=0`, retrieved Sept. 2022). At this model the boundary curves of the surfaces are even congruent (note [11, Theorem 3]).

[4]There are various relations between the two fixed axes of rotations ℓ_1, ℓ_2, the relative axis ℓ_{12}, the angular velocities ω_1, ω_2, and the pitch of the relative screw motion (see [2, Fig. 7]). Due to a more general result by Plücker, the conoid is the locus of axes of linear line complexes which are contained in a pencil [6, p. 214].

revolution with a line contact? The common surface normals of two hyperboloids along their line of contact ℓ_{12} form one regulus of an orthogonal hyperbolic paraboloid $\mathcal{P}$ which passes through the axes ℓ_1 and ℓ_2. The line ℓ_{12} is the vertex generator of the complementary regulus on $\mathcal{P}$. The other vertex generator of $\mathcal{P}$ intersects all three lines ℓ_{12}, ℓ_1, and ℓ_2 orthogonally. Therefore, it is the common perpendicular d of ℓ_1 and ℓ_2.

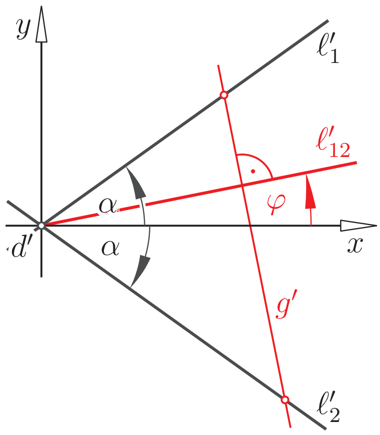


Fig. 8. Top view of an an orthogonal hyperboloid passing through ℓ_1 and ℓ_2 with d and ℓ_{12} as vertex generators and g as a generator which intersects ℓ_1, ℓ_2 and ℓ_{12} (note Theorem 3.1).

We still assume that ℓ_1 and ℓ_2 are horizontal, and we us the orthogonal projection in direction of the common orthogonal transversal d. As shown in Fig. 8, for any choice of a horizontal vertex generator ℓ_{12}, the top view shows on an ℓ_{12} intersecting generator g the affine ratio of g's meeting points with ℓ_1, ℓ_2 and ℓ_{12}. Let $\pm d$ be the given z-coordinates ℓ_1 and ℓ_2. If the signed angles between the x-axis and the lines ℓ_1, ℓ_2 and ℓ_{12} are respectively α, $-\alpha$ and φ, then the altitude of ℓ_{12} is

$$\begin{aligned} z &= -d + 2d\,\frac{\tan(\alpha+\varphi)}{\tan(\alpha-\varphi)+\tan(\alpha+\varphi)} = d\,\frac{\tan(\alpha+\varphi)-\tan(\alpha-\varphi)}{\tan(\alpha-\varphi)+\tan(\alpha+\varphi)} \\ &= \frac{d}{\sin 2\alpha}\,\sin 2\varphi\,, \end{aligned}$$

which confirms by (1) the claim. □

4 Concyclic generators of Plücker's conoid

Given any Plücker conoid $\mathcal{C}$, let $e \subset \mathcal{C}$ be the pedal curve of any given point P. Suppose that some generators of $\mathcal{C}$ are tangents to a sphere $\mathcal{S}$ centered at P. Then their pedal points w.r.t. P must have equal distances to P. Since they are located in the plane of e, they belong to a circle $k \subset \mathcal{S}$ with an axis through P (compare with Fig. 9). The circle k can share with the ellipse e at most four points. Therefore, at most four generators of $\mathcal{C}$ can contact any sphere with the center P. Below we discuss the converse problem: Is the center P of a contacting sphere unique?

Definition 4.1. Four mutually different lines $g_1, \dots, g_4$ are called *concyclic* if they belong to a Plücker conoid $\mathcal{C}$ and their points of intersection with any tangent plane τ_X to $\mathcal{C}$ are concyclic, i.e., located on a circle.

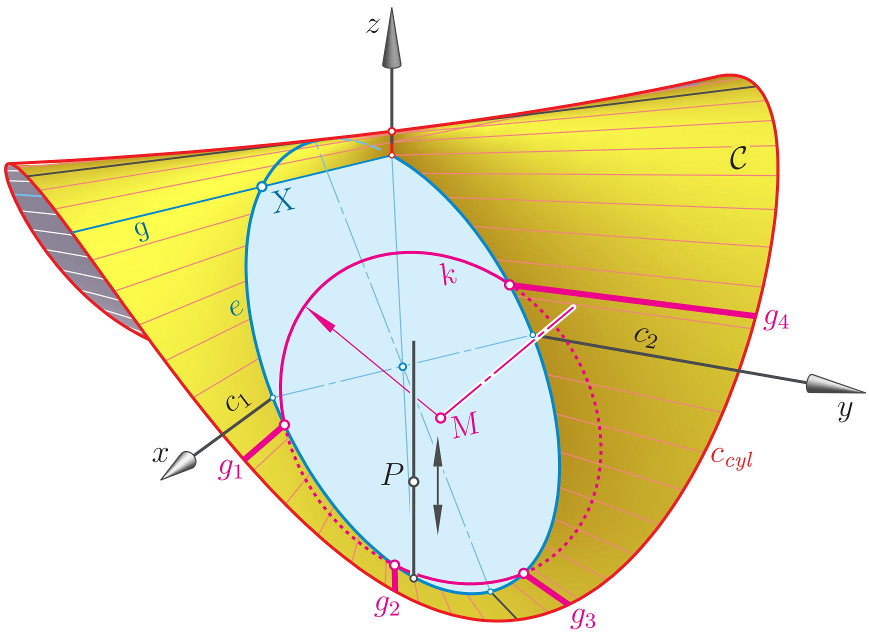


Fig. 9. The ellipse e is the pedal curve of $\mathcal{C}$ w.r.t. the point P. There are infinitely many spheres contacting the four concyclic generators $g_1, \ldots, g_4$ of $\mathcal{C}$. The center of a contacting sphere must be located on the vertical line through P and on the axis of the circle k.

Suppose that two out of four concyclic lines are intersecting. Then also the remaining two must be intersecting, since in this case the center of the circumcircle k must be located on the principal axis of the ellipse $e = \tau_X \cap \mathcal{C}$. We call this the *symmetric case*.

Lemma 4.1. If the generators $g_1, \ldots, g_4 \subset \mathcal{C}$ are concyclic, then they intersect all tangent planes τ_X to $\mathcal{C}$ at four concyclic points, provided that in the particular case $g_i \subset \tau_X$ the point of contact X with $\mathcal{C}$ serves as the point of intersection.

Proof. We compare two ellipses $e_1, e_2 \subset \mathcal{C}$. The top view (Fig. 10) shows that lines h' through d' intersect e_1' and e_2' at points H_1', H_2' which define a similarity $e_1' \to e_2'$. In particular, the top view of the generator g_1 in the plane of e_1 intersects e_1' at the top view X_1' of the point of contact between the plane of e_1 and $\mathcal{C}$.

The similarity $e_1' \to e_2'$ induces in space an affine correspondence α_{12} between the ellipses e_1 and e_2 and consequently between the corresponding planes. The torsal generators and the central generators of $\mathcal{C}$ indicate that α_{12} sends the vertices of e_1 to vertices of respectively equal types of e_2. Using appropriate coordinates (x_1, y_1) and (x_2, y_2) in the respective planes, the correspondence can be expressed in the form

$$\alpha_{12}\colon\ (x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2) = (\lambda x_1,\ \mu y_1)$$

with

$$e_1 : \ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \ \to \ e_2 : \ \frac{x_2^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y_2^2}{\mu^2 b^2} = 1.$$

If four generators of $\mathcal{C}$ intersect e_1 at the points $A_1, \ldots, D_1$ of a circle k with radius r, then the corresponding points $A_2, \ldots, D_2 \in e_2$ are located on an ellipse k_2 with axes of lengths λr, μr

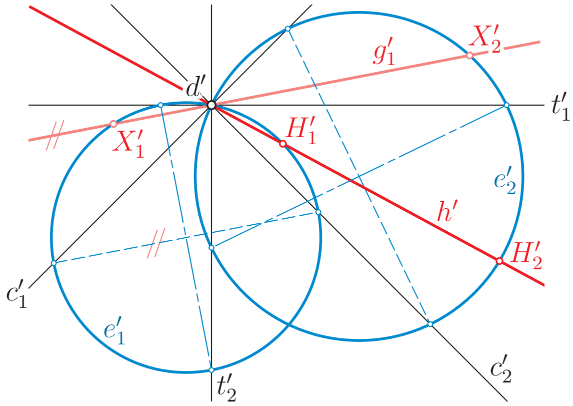


Fig. 10. The generators h of a Plücker conoid intersect different tangent planes at points H_1, H_2 that correspond each other in an affine transformation α_{12}.

parallel to the coordinate axes. There is a linear combination of the equations of e_2 and k_2 with equal coefficients of x_2^2 and y_2^2, namely

$$(\lambda^2-\mu^2)a^2b^2\left(\frac{x_2^2}{\lambda^2a^2}+\frac{y_2^2}{\mu^2b^2}+\dots\right)+(\mu^2b^2-\lambda^2a^2)r^2\left(\frac{x_2^2}{\lambda^2r^2}+\frac{y_2^2}{\mu^2r^2}+\dots\right)=0.$$

This means that the pencil spanned by e_2 and k_2 contains a circle through the base points $A_2,\dots,D_2$, as claimed.[5]

By the way, for the second coefficient in this linear combination holds

$$(\mu^2b^2-\lambda^2a^2)=b^2-a^2,$$

since e_1 and e_2 have the same eccentricity. The center of the circumcircle of $A_2,\dots,D_2\in e_2$ is independent of r and has the coordinates $(\frac{m}{\lambda},\,\frac{n}{\mu})$, if (m,n) are the coordinates of the center M of the preimage k in the plane of e_1 (note Fig. 9). $\square$

Suppose that, by virtue of Lemma 1.1, the three lines g_1, g_2, g_3 with a common orthogonal transversal d define a Plücker conoid $\mathcal{C}$. If these lines contact a sphere $\mathcal{S}$ with center P, then the points of contact lie on the pedal curve e of P and have equal distances to P. The circumcircle k of the pedal points shares with e a fourth point, and consequently there exists a fourth generator $g_4\subset\mathcal{C}$ which contacts the sphere $\mathcal{S}$ as well. If $g_1,\dots,g_4$ are mutually different, then they are concyclic. However, it can happen that k contacts e at any point. Then the line g_4 coincides with one of the three given lines.

Theorem 4.1. If four lines $g_1,\dots,g_4$ are concyclic on the Plücker conoid $\mathcal{C}$, then there exist infinitely many spheres which contact these lines. The six bisecting hyperbolic paraboloids of the pairs (g_i,g_j), $i,j\in\{1,\dots,4\}$, $i\neq j$, belong to a pencil.

In the non-symmetric case, the spine curve of the enveloping canal surface $\mathcal{E}$ is a rational quartic q (Fig. 11). The top view of q is an equilateral hyperbola with the top views of the torsal generators of $\mathcal{C}$ as asymptotes (Fig. 12). In the symmetric case, the spine curve splits into two parabolas in the planes which connect the double line d of $\mathcal{C}$ with one of the torsal generators.

[5] An alternative proof based on Desargues's involution theorem [3, Sect. 7.4] is mentioned in [10, p. 60].

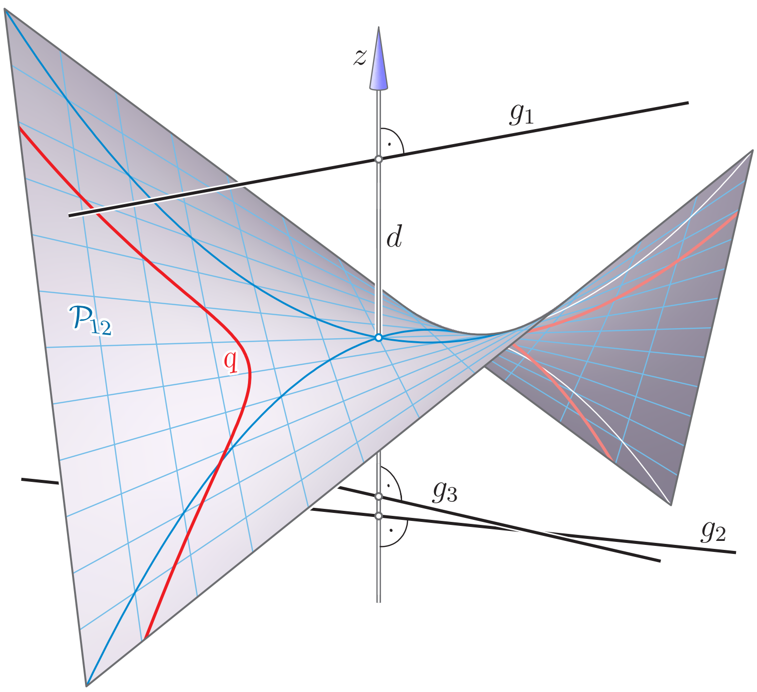


Fig. 11. Spine curve q of the enveloping canal surface of spheres that contact the lines g_1, g_2 (with bisector $\mathcal{P}_{12}$) and the line g_3.

Remark 4.1. According to [10, Satz 4], there are only two cases where four mutually skew lines have a continuum of contacting spheres: The given lines are either concyclic or belong to a hyperboloid of revolution. For similar problems see also [12].

Proof. We assume that the skew generators $g_i, g_j \subset \mathcal{C}$ for $i, j \in \{1, 2, 3\}$ have the polar angles φ_i, φ_j and the z-coordinates $z_i = c \sin 2\varphi_i$ and $z_j = c \sin 2\varphi_j$ according to (1). The distance of any space point $X = (x, y, z)$ to g_i satisfies

$$\overline{Xg_i}^{\,2} = x^2 + y^2 + (z - z_i)^2 - (x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i)^2.$$

The bisecting paraboloid $\mathcal{P}_{ij}$ of the generators g_i, g_j of $\mathcal{C}$ has the equation $\overline{Xg_i}^{\,2} - \overline{Xg_j}^{\,2} = 0$, i.e.,

$$\mathcal{P}_{ij}\colon\ (\sin^2\varphi_i - \sin^2\varphi_j)(x^2 - y^2) - (z_i - z_j)\left(\frac{xy}{c} + 2z\right) + (z_i^2 - z_j^2) = 0.$$

The paraboloids $\mathcal{P}_{12}$ and $\mathcal{P}_{13}$ share a quartic q, and each point $P \in q$ is the center of a sphere $\mathcal{S}$ which contacts g_1, g_2 and g_3. As explained before, $\mathcal{S}$ must also contact the line g_4 which completes the concyclic quadruple.[6]

We obtain the equation of the top view q' of q as a linear combination of the equations of $\mathcal{P}_{12}$ and $\mathcal{P}_{13}$ after the elimination of z. In the unsymmetric case, the resulting equation has the form

[6]As proved in [10], the four lines $g_1, \ldots, g_4$ are concyclic if and only if the (5×4)-matrix with the rows $(1,\ z_i,\ z_i^2,\ \cos 2\varphi_i,\ \sin 2\varphi_i)$, $i = 1, \ldots, 4$, has a rank ≤ 3.

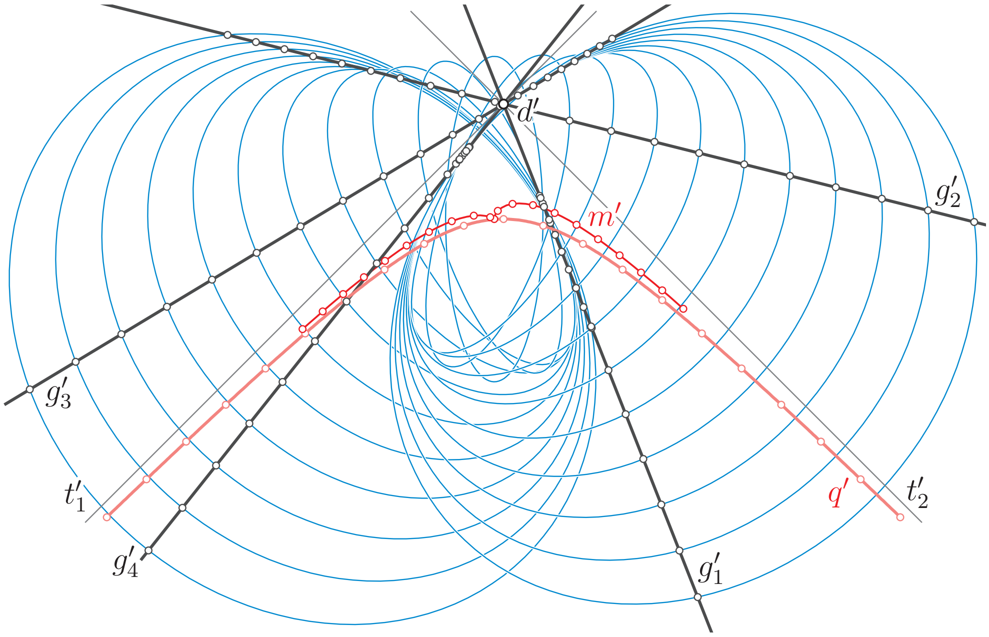


Fig. 12. Top view of a sample of circles of the canal surface through the four concyclic lines $g_1, \ldots, g_4$ on the Plücker conoid with torsal generators t_1, t_2 and double line d. The hyperbola q' is the top view of the spine curve and m' that of the curve of circle centers.

$u(x^2 - y^2) = v$ with $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, namely

$$\begin{aligned} u &= z_1(\sin^2\varphi_2 - \sin^2\varphi_3) + z_2(\sin^2\varphi_3 - \sin^2\varphi_1) + z_3(\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2) \\ &= \frac{c}{2}\left[\sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin 2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin 2(\varphi_1 - \varphi_3)\right] \text{ and} \\ v &= z_1^2\,(z_2 - z_3) + z_2^2\,(z_3 - z_1) + z_3^2\,(z_1 - z_3). \end{aligned}$$

Consequently, q' is an equilateral hyperbola with the semiaxis $\sqrt{v/u}$ and the asymptotes $x \pm y = 0$, which are the top views of the torsal generators of $\mathcal{C}$ (Fig. 12). In order to compute the z-coordinate of the points of q, we use the equation of $\mathcal{P}_{12}$ which is linear in z. Therefore, q is rational. $\square$

The envelope $\mathcal{E}$ of the infinitely many spheres $\mathcal{S}$, as mentioned in Theorem 4.1, must contain the four concyclic lines $g_1, \ldots, g_4$. The sphere $\mathcal{S}$ with center $P \in q$ contacts the envelope $\mathcal{E}$ along the circumcircle k of the pedal points of $g_1, \ldots, g_4$ w.r.t. P. The existence of this circle was confirmed in Lemma 4.1.

The shape of the envelope $\mathcal{E}$ is hard to grasp as it has singularities. This becomes apparent since on tangents g_i with a top view g_i' intersecting the equilateral hyperbola q' (like g_1' and g_4' in Fig. 12) the pedal point cannot trace the full line while P runs along one branch of the spine curve q. There needs to be a point of return. Fig. 13 shows a part of the envelope $\mathcal{E}$ which has no visible singularity. The complete canal surface contains also a second component which is obtained by a halfturn about the z-axis.

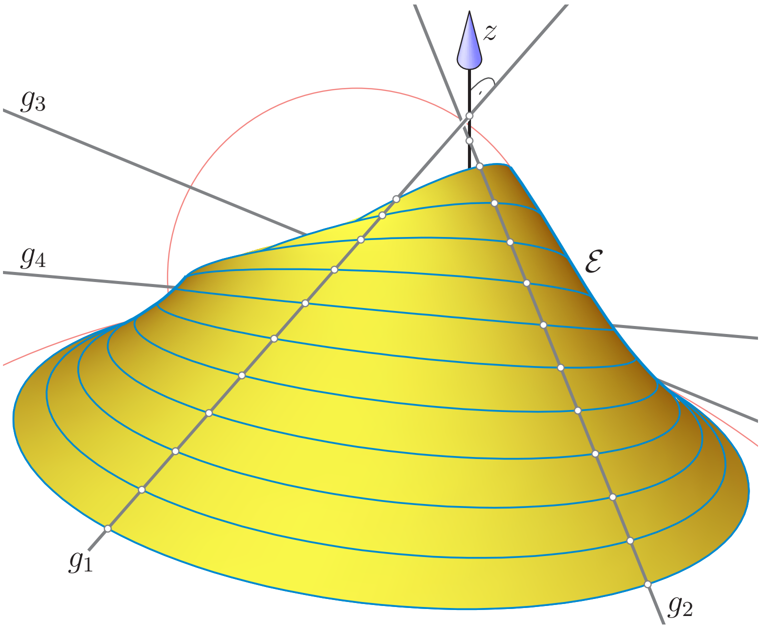


Fig. 13. A portion of the canal surface $\mathcal{E}$ through the four concyclic lines $g_1, \ldots, g_4$ along with the spheres (red) contacting $\mathcal{E}$ along the terminating circles.

References

[1] APPELL, P. Propriété caractéristique du cylindroïde. In *Bull. Soc. Math. France* 28, 1900, pp. 261–265.

[2] FIGLIOLINI, G., STACHEL, H., ANGELES, J. A new look at the Ball-Disteli diagram and its relevance to spatial gearing. In *Mech. Mach. Theory* 42/10, 2007, pp. 1362–1375.

[3] G. GLAESER, H. STACHEL, B. ODEHNAL *The Universe of Conics*. From the ancient Greeks to 21st century developments. Springer Spectrum, Berlin, Heidelberg 2016.

[4] HUSTY, M., SACHS, H. Abstandsprobleme zu windschiefen Geraden I. In *Sitzungsber.*, Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. 203, 1994, pp. 31–55.

[5] KRAMES, J. Über die in einem Strahlnetz enthaltenen Drehhyperboloide. In *Rad*. Jugosl. Akad. Znan. Umjet., Mat. Znan. 2, 1983, pp. 1–7.

[6] MÜLLER, E., KRAMES, J.L. *Vorlesungen über Darstellende Geometrie. Band III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen*. B.G. Teubner, Leipzig, Wien 1931.

[7] ODEHNAL, B., STACHEL, H., GLAESER, G. *The Universe of Quadrics*. Springer Spectrum, Berlin, Heidelberg 2020.

[8] SALMON, G., FIEDLER, W. *Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes*. B.G. Teubner, Leipzig 1863.

[9] SCHILLING, M. *Catalog mathematischer Modelle*. 7. Auflage, Martin Schilling, Leipzig 1911.

[10] STACHEL, H. Unendlich viele Kugeln durch vier Tangenten. In *Math. Pannonica* 6, 1995, pp. 55–66.

[11] STACHEL, H. Plücker's conoid, hyperboloids of revolution and orthogonal hyperbolic paraboloids. In Z. JELI (ed.): *Proceedings moNGeometrija2020*, Serbian Society for Geometry and Graphics (SUGIG), ISBN 978-86-6060-046-4, pp. 51–62.

[12] THEOBALD, T. *New Algebraic Methods in Computational Geometry.* Habilitation thesis, TU München, 2003.

[13] WUNDERLICH, W. *Darstellende Geometrie II.* BI Mannheim, 1967.

[14] WUNDERLICH, W. *Ebene Kinematik.* BI Mannheim, 1970.

[15] WUNDERLICH, W. Die Netzflächen konstanten Dralls. In *Sitzungsber.*, Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. 191, 1982, pp. 59–84.

Hellmuth Stachel

Vienna University of Technology
Wiedner Hauptstr. 8-10/104, 1040 Wien, Austria
e-mail: stachel@dmg.tuwien.ac.at

Jubilant doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc.

Tomáš Černák

Abstrakt
Osobný príbeh a stručné curriculum vitae významného slovenského matematika doc. RNDr. Imricha Abrhana, CSc., ktorý sa tohto roku dožíva okrúhleho životného jubilea.

Abstract
The life story and curriculum vitae of a distinguished Slovak mathematician doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc., who is celebrating significant jubilee this year.

V týchto dňoch sa dožila vzácneho životného jubilea deväťdesiatich rokov významná postava slovenskej matematickej vedy, dlhoročný vysokoškolský pedagóg, doma i v zahraničí uznávaný matematik doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc. Väčšinu svojho aktívneho profesijného života spojil so Strojníckou fakultou Slovenskej vysokej školy technickej (dnes Slovenská technická univerzita) v Bratislave. Na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie (neskôr Katedra matematiky) pôsobil štyri desaťročia a počas tohto obdobia prednášal matematiku tisíckam študentov. Jeho výskumnou oblasťou bola algebraická téoria pologrúp a unárne algebry. Vedecké práce Imricha Abrhana boli citované i na zahraničných vedeckých podujatiach a v prestížnych vedeckých časopisoch. S vedeckým poznávaním matematiky začínal v neľahkých 50. rokoch 20. storočia a svoj odbor úplne neopustil ani na prahu deväťdesiatky. Životný príbeh Imricha Abrhana je príbehom chudobného chlapca z malej dedinky na juhozápadnom Slovensku, ktorý sa mal pôvodne stať obuvníckym učňom, avšak nakoniec skončil na akademických a vedeckých fórach.

Imrich Abrhan sa narodil 1. novembra 1932 do skromnej a početnej rodiny Jána Abrhana v požitavskej obci Vlkas, ktorá sa v čase jeho narodenia nazývala Valkáz. Presne takto ju rodáci i obyvatelia okolitých obcí volajú až dodnes. Imrich Abrhan bol preto po celý svoj život vždy a všade hrdým „Valkázanom“ a k svojmu rodisku sa neustále hlásil. Stal sa veľkým reprezentantom rodnej obce a jej neodmysliteľnou postavou. A aby tých názvov nebolo málo, tak aj malého Imra rodáci často nevolali jeho pravým priezviskom Abrhan, ale skôr Imro Adolov. Abrhanovcov bolo totiž v obci viacero a nejako ich len museli rozlíšiť.

Za zmienku tiež stojí, že z Vlkasu, obce s tristo obyvateľmi, pochádzal aj prvý predseda vlády Slovenskej socialistickej republiky Štefan Sádovský (v roku 1968 jeden z najvyšších predstaviteľov KSČ), a tiež podpredseda Slovenskej národnej rady a poslanec Federálneho zhromaždenia Jozef Polák. Keď už niekto raz z Vlkasu „vyletel“ do sveta, zväčša sa prepracoval vo svojej profesii veľmi ďaleko. A to bol aj prípad Imricha Abrhana.

Pochádzal síce z chudobnej, ale váženej rodiny. Jeho otec Ján Abrhan však rozhodne nechcel mať z malého Imra nielen matematika, ale ani študovaného chlapca. Predstavoval si, že jeho starší syn bude obuvníckym učňom a už to vyzeralo tak, že sa ním skutočne stane. Riaditeľ miestnej školy si však bol vedomý chlapcových študijných kvalít, a keď ho raz stretol, presvedčil ho, aby išiel do meštianky. Otec s tým súhlasil, a tak od jesene 1947 začal Imrich Abrhan navštevovať meštianku vo vedľajšej obci Hul.

To ale neznamenalo, že preňho prestali existovať práce na poli a okolo domu. Naopak, musel sa učiť po večeroch pri lampe alebo sviečkach, a to až potom, keď bola robota hotová. A spával na drevenej lavici, lebo v malom dome nebolo veľa miesta a žilo v ňom celkovo desať ľudí. Abrhanovci mali totiž sedem detí (jedno dieťa zomrelo krátko po narodení) a spoločne s nimi žili aj starí rodičia. Podmienky na štúdium teda neboli ideálne, ale napriek tomu študent Abrhan naďalej vynikal. Zvlášť v matematike. Raz mu jeden známy povedal, že musí byť padnutý na hlavu, keď tak dobre ovláda matematiku. On mu s úsmevom odpovedal: *„Vieš, ale ja som na tú hlavu skutočne padol. Z voza, pri zvážaní snopov z poľa.“* Mimochodom, prvý kontakt Imricha Abrhana so školským prostredím sa viaže k dátumu 1. september 1939, kedy nastúpil do prvého ročníka ľudovej školy. Teda práve v deň vypuknutia druhej svetovej vojny.

Ani po skončení meštianky však nezostal potencionálny obuvnícky učeň Imro Abrhan na „otcovej roli“, ale pokračoval v štúdiu na gymnáziu v Nových Zámkoch. Gymnázium malo dlhoročnú tradíciu siahajúcu až do roku 1842 a vychovalo mnoho úspešných absolventov. Študent Abrhan prišiel do Nových Zámkov v čase, keď sa reformovalo školstvo, a to podľa sovietskeho vzoru. Zavádzal sa princíp jednotnej školy a jednotná všeobecnovzdelávacia škola. To spôsobilo, že na gymnáziu v Nových Zámkoch neštudoval štyri roky, ale iba tri. Bolo to v rokoch 1950-1953, teda v období najtvrdšieho stalinizmu.

Už na novozámockom gymnáziu bolo zjavné, že študent Abrhan má mimoriadne nadanie na matematiku a že v tomto odbore vyniká. Deti a mládežníci z rodnej obce pred ním zväčša utekali, lebo vedeli, že ich bude trápiť najrôznejšími matematickými príkladmi a úlohami. Príklady riešil takmer všade. Raz sa, dokonca, tajne postaral o to, že celá trieda, na veľké prekvapenie pána profesora, takmer bez chyby napísala písomku z matematiky. Keď si v roku 1992 pripomínalo novozámocké gymnázium 150. výročie svojho založenia, oslovilo vedenie školy tých absolventov, ktorí *„presiahli rámec bežného spoločenského zaradenia. Podľa Vašej vysokoškolskej pedagogickej a vedeckej činnosti aj Vy k nim patríte. Preto Vás prosím, aby ste nám napísali niečo o sebe a pripojili tiež Vašu fotografiu.“*

Po maturite sa Imrich Abrhan prihlásil na Vysokú školu pedagogickú, odbor matematika - fyzika. Tá sa utvorila len krátko pred jeho príchodom z pôvodnej Pedagogickej fakulty Univerzity Komenského. Keď poslal do školy prihlášku na prijímacie konanie, čakal, že ho pozvú na pohovor. Ale odpoveď neprichádzala, a to sa už blížil začiatok akademického roka 1953/1954. Vybral sa preto, spoločne so spolužiačkou, prvýkrát v živote do Bratislavy zistiť, čo sa deje. Priamo na mieste sa dozvedel, že mu pozvánku na prijímacie konanie poslali už trikrát, ale zakaždým sa im vrátila. Problém bol v tom, že študent Abrhan síce uviedol ako adresu svoje bydlisko Vlkas, ale zabudol tam napísať, že pošta je vo vedľajšej obci Veľká Maňa. Napriek tomu však mladého študenta vyskúšali. Zistili, že z matematiky i fyziky je vynikajúci, na pohovoroch exceloval, a tak nič nestálo v ceste jeho vysokoškolskému štúdiu na Vysokej škole pedagogickej.

Pôsobil tam v rokoch 1953-1957 a po promócii mu okamžite ponúkli miesto odborného asistenta. Jeho pôsobenie na katedre však netrvalo dlho. Ozvali sa totiž z kádrového oddelenia, a to v druhej polovici 50. rokov neveštilo nič dobré. Následne mu oznámili, že s takým kádrovým profilom na Vysokej škole pedagogickej ako pedagóg pôsobiť nemôže a musí odísť. Vážne kádrové dôvody spočívali v tom, že jeho otec *„nepochopil socializáciu dediny“*, čo v preklade znamenalo, že nechcel vstúpiť do Jednotného roľníckeho družstva. Imrichovi Abrhanovi nezostalo nič iné, len si nájsť iné zamestnanie. Začal preto učiť na strednej škole v bratislavských Krasňanoch matematiku. Tam pôsobil do roku 1960, kedy sa pomery predsa len trochu uvoľnili a jeho otec medzičasom vstúpil aj do JRD. Ako stredoškolský učiteľ bol veľmi obľúbený, pretože aj tých najslabších študentov z matematiky dokázal pripraviť tak, že bez problémov zmaturovali. Školský inšpektor raz skonštatoval, že on na strednú školu nepatrí, ale mal už dávno pôsobiť na vysokej škole.

V roku 1960 nastúpil Imrich Abrhan ako odborný asistent na Katedru matematiky Elektrotechnickej fakulty a o rok neskôr už na celý ďalší profesijný život zakotvil na Strojníckej fakulte Slovenskej vysokej školy technickej. Konečne mohol pôsobiť v oblasti matematiky na vedeckej úrovni. Svojej vedeckej a pedagogickej práci sa venoval naplno a v roku 1965 *„napísal prácu, ktorej výsledky už v roku 1966 citoval J. Bosák a použil ich vo svojej prednáške na Medzinárodnom kongrese matematikov v Moskve. Tieto výsledky používa vo svojej práci J. Bosák, ktorý rozriešil problém z algebraickej teórie pologrúp.“* Ďalšie hodnotenie z roku 1965 vysoko hodnotilo jeho pedagogickú činnosť: *„Je mi milou povinnosťou tlmočiť Vám poďakovanie dekana i kolégia za Vašu svedomitú a príkladnú prácu pri výchove Vám zvereného ročníka.“* Okrem toho v rovnakom čase prednášal aj na podnikovom inštitúte pri Slovenských lodeniciach v Komárne, odkiaľ mu jeho študenti poslali pozdravný list. Vyučoval aj pre diaľkových študentov, a to konkrétne v Dubnici nad Váhom, vo Zvolene, Martine či vo vtedajšom Gottwaldove (dnešný Zlín).

doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc. na archívnej fotografii z roku 1965

O pár rokov neskôr inicioval Imrich Abrhan vypracovanie skrípt pod názvom *Riešené príklady a návody na riešenie príkladov z matematiky.* Táto práca mala uľahčiť študentom prechod zo strednej na vysokú školu, zjednotiť vedomosti z matematiky u študentov prvého ročníka a celkovo rozšíriť záujem o matematiku. Na týchto príkladoch pracoval počas letných prázdnin a *„svojou iniciatívou sa najviac pričinil, že tento kolektívny záväzok sa realizoval, a u študentov sa stretol s priaznivým prijatím, čo sa nakoniec ukázalo aj pri skúškach.“* V tomto smere išlo o modernizáciu metód výučby matematiky na vysokých školách. Na začiatku 70. rokov mal publikovaných viacero pôvodných vedeckých prác v Matematickom časopise SAV a bol spoluriešiteľom štátnej vedecko-výskumnej úlohy z algebraickej teórie pologrúp. Taktiež pracoval ako spoluriešiteľ fakultnej vedecko-výskumnej úlohy Reprezentácia pologrúp a *„iba jeho práce boli riešením tejto fakultnej úlohy.“*

Ďalej prednášal na letnej škole z algebry a pologrúp, kde predniesol prednášku O maximálnych /H,T/ ideáloch v pologrupách a na seminári z algebraickej teórie pologrúp referoval o svojich najnovších výskumoch v /H,T/ systémoch. „*Výsledky jeho posledných prác úzko súvisia s teóriou automatov“,* píše sa v hodnotení vedúceho Katedry matematiky a deskriptívnej geometrie z júna 1972. Imrich Abrhan pôsobil tiež ako člen pracovnej skupiny pre vypracovanie učebných osnov a učebných plánov a harmonogramov „Základy matematiky“. Bol dlhoročným členom matematickej sekcie Jednoty slovenských matematikov a fyzikov SAV. V júni 1974 odovzdal a 10. júla 1975 úspešne obhájil kandidátsku dizertačnú prácu na tému *O podalgebrách v unárnych algebrách.* Školiteľom bol akademik Štefan Schwarz, ktorý prácu *„jednoznačne“* odporúčal k obhajobe. Práce Imricha Abrhana citoval aj známy maďarský matematik Andor Ferenc Szász vo svojej, po nemecky, vydanej monografii *Radikale der Ringe*.

V roku 1976 odovzdal Imrich Abrhan habilitačnú prácu *O J-podalgebrách v unárnych algebrá*ch *a o J-ideáloch v grupoidoch*. V roku 1980 mu bol udelený titul docent.

V 80. rokoch mal už Imrich Abrhan na svojom konte vyše desať publikovaných pôvodných vedeckých prác. „*Vedecká príprava nie je pre neho iba prostriedkom na dosiahnutie vedecko-pedagogických hodností, ale aj vnútornou potrebou*.“ Jeho práce boli v tom čase publikované a citované v periodikách svetového významu, napríklad v American Mathematical Reviews. Na domácej vedeckej scéne pravidelne publikoval v časopisoch Mathematica Slovaca a Mathematica Bohemica. Jedným z jeho významných výsledkov je isté zovšeobecnenie lokálnej Eulerovej-Fermatovej vety.

Nikdy si nepotrpel na akademické a vedecké tituly, o čom svedčí aj fakt, že napriek tomu, že hravo spĺňal všetky požadované kritériá, nikdy nepodal žiadosť o profesúru ani veľký doktorát. Dokonca ho 2. novembra 1990 vyzval dekan fakulty Ladislav Javorčík k predloženiu všetkých potrebných dokladov, aby *„mohlo začať konanie spojené s návrhom na Vaše vymenovanie za profesora.“* Imrich Abrhan dnes úprimne uznáva, že to bola z jeho strany veľká chyba. Napriek tomu sa mu podarilo vychovať a pripraviť na aplikáciu matematiky v praxi tisíce študentov, ktorí nepochybne až dodnes spomínajú na mnohé príhody s ním. Bol totiž povestný tým, že v zápale matematiky neraz zabúdal na okolitý svet a dodnes v tomto smere o ňom kolujú najrôznejšie príbehy. Okrem toho celý svoj aktívny život doučoval vo voľnom čase študentov a pripravoval ich buď na maturitu, prijímacie pohovory alebo na skúšky. Aj autor týchto riadkov mu dodnes môže ďakovať za to, že úspešne zmaturoval z matematiky, z ktorej predtým nevedel takmer nič.

Na Strojníckej fakulte pôsobil Imrich Abrhan do roku 2001, kedy definitívne odišiel do dôchodku. Naďalej však spolupracoval s fakultou a hlavne s Ústavom matematiky a fyziky. Po odchode na dôchodok sa začal venovať ďalšej svojej láske, a to maľovaniu. Vytvoril stovky obrazov, z ktorých mnohé zobrazujú rodnú obec a jej obyvateľov. Mal aj niekoľko výstav, na ktorých sa mohla s jeho tvorbou zoznámiť široká verejnosť.

50. výročie založenia Katedry matematiky Strojníckej fakulty STU v Bratislave, 2012

Keď sa v roku 1997 dožil 65. narodenín, napísala pri tejto príležitosti jeho kolegyňa z fakulty, RNDr. Elena Zbuňáková o ňom básničku. Píše sa v nej, že „*nie je žiadna veľká rana dosiahnuť vek osem na druhú plus jedna.*“ My môžeme konštatovať, že pán docent sa dožil aj ďalšieho krásneho životného jubilea, ktoré sa rovná hodnote deväť na druhú plus deväť. Želáme mu, aby naďalej pokračoval v nastúpenom trende a aby mu raz, pri počítaní rovníc svojho veku, vyšlo číslo desať na druhú!

PhDr. Tomáš Černák, PhD.

Bratislava, Slovenská republika
e-mail: cernaktomas@gmail.com

Z tvorby doc. RNDr. Imricha Abrhana, CSc.

Dagmar Szarková

Abstrakt
Niekoľko ukážok z maliarskej tvorby jubilanta doc. RNDr. Imrich Abrhana, CSc., ktorou naplnil svoje umelecké ambície po odchode do dôchodku.

Kľúčové slová: fotografie pôvodných diel

Abstract
A few samples from the painting work of jubilarian doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc., with which he fulfilled his artistic ambitions after retirement.

Keywords: photos of original paintings

Úvodom citujme zo zdravice kolegyne RNDr. Eleny Zbuňákovej z príležitosti 65. rokov doc. RNDr. Imricha Abrhana, CSc., ktorá bola a je stále aktuálna:

„Veľkú vďaku Životu
vzdaj, že Tvoj talent je tu.
V zime a či bližšie k letu
do ruky zober paletu,
zachyť krehkú nežnosť kvetu,
či motýľa počas letu.
Konštruktívne dokáž svetu,
že si chytil nový dych,
že vieš zhmotniť okamih.“

Po dlhoročnom pôsobení na vtedajšej Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie (neskôr premenovanej na Katedru matematiky a aktuálne na Ústav matematiky a fyziky) Strojníckej fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave sa na dôchodku začal náš bývalý kolega doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc. intenzívne venovať svojej druhej veľkej profesionálnej láske – maliarstvu. S rovnakou neúnavnou húževnatosťou s akou skúmal v algebre štruktúr vlastnosti grupoidov, pologrúp či okruhov a ich ideálov, sa začal venovať štúdiu maliarskych štýlov, techník a kompozícií maľby významných svetových umelcov. Diela študoval na umeleckých origináloch vystavených v galériách susedných veľkomiest, ktoré rád navštevoval. Našiel svoj vlastný svojrázny umelecký štýl obohatený prvkami realizmu, impresionizmu a čiastočne aj karikatúrnej maľby a stal sa produktívnym insitným maliarom. Vo svojich dielach často a rád zobrazuje pohľady do rodného kraja a obce, zasneženú krajinu.

1 Rodná obec a krajinky

Na obr. 1 je dedinka Valkáz, ktorá od roku 1948 bola premenovaná na dedinu Vlkas. Na obraze vľavo dole je dom, v ktorom bola škola – jednotriedka pre 1. - 8. triedu, do ktorej by malo chodiť 81 detí. Na zvedavú otázku, či sa všetky deti pomestili, dostalo sa odpovede, „*Ale kdeže, nikdy v triede nebolo toľko detí, lebo museli pracovať na poli a na gazdovstve*“. Za školou vľavo je katolícky kostol, a pred ním pri ceste je malý kalvínsky kostolík. Medzi školou a malým kalvínskym kostolíkom sa ťažil hliník. V čase dažďov sa tu vytvorilo jazierko, ktoré je namaľované na obraze.

Pri pohľade na obr. 2 si pamätníci spomínajú, ako im sneh vŕzgal pod nohami. Na obr. 3 je zobrazené, ako začiatkom minulého storočia vyzerali domy s rumpálom, pomocou ktorého sa zo studne čerpala voda.

V rodnom dome, ktorý štetcom Imro nezachytil, bola vpredu izba pre hostí a vzadu izba (obr. 4), v ktorej prespávalo 6 detí, rodičia a starí rodičia, teda spolu 10 členov rodiny.

Príprava Vlkaského vinobrania – na obr. 5 je drevená šopa, kde sa piekol chlieb a dole bola pivnica na skladovanie vína.

Pri pohľade na obraz s Kriváňom (obr. 6), Imro hovorieva: „*Pod Kriváňom sa šikovní chlapci rodia, ktorí pre spoločnosť ešte niečo dobré robia*“.

Na Vlkaský kostol (obr. 8) si Imro spomína s humorom, ako chodil ku spovedi s papierikom – ťahákom, čo kde vyparatil, aby na nejaký ten hriech nezabudol.

Obr. 1. Dedina Valkáz

Obr. 2. Dedina Valkáz v zime

Obr. 3. Dedina Valkáz

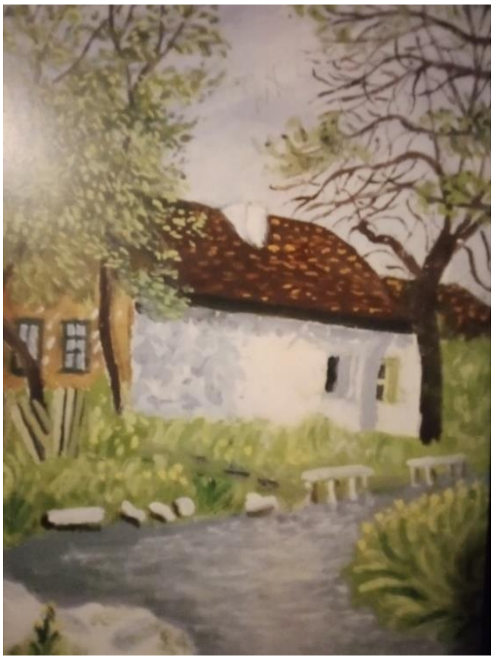
Obr. 4. Rodný dom

Obr. 5. Vlkaské vinobranie

Obr. 6. Kriváň

Obr. 7. Zima v dedine spod Tatier (2003)

Obr. 8. Vlkaský kostol



Obr. 9. Charakteristický dom z Požitavia

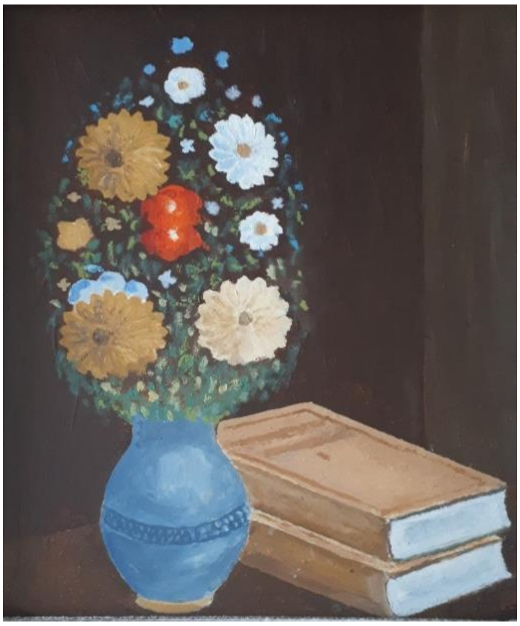
2 Zátišia s kvetmi

Kolega – jubilant “Imro” sa ku nám, bývalým kolegyniam a kolegom, veľmi rád vracia. Niekoľko krát usporiadal na fakulte súbornú výstavu svojich diel počas spoločenských akcií organizovaných ústavom alebo vedením fakulty. Pri týchto príležitostiach rád obdarúval svoje bývalé kolegyne a kolegov dielami, z ktorých mnohé boli vytvorené priamo na mieru podľa želania obdarovaných. Každému obdarovanému takto dal kúsok seba, aby sme si vždy na neho spomenuli a pripomenuli si, že si nás vážil a stále ešte váži.

Imro nemal vedomosti o kvetinkách, slnečnica bol jediný kvet z ich chotára, ktorý poznal a ktorý sa mu páčil. Už po skončení vysokej školy bola slnečnica prvý kvet, ktorý namaľoval a vracal sa k nemu aj v neskoršom veku, namaľoval ho nie raz (obr. 10) a venoval svojim známym a kolegom.

Obr. 10. Slnečnice

Obr.11. Poľná kytica (2008)



Obr. 12. (2018)

Obr. 13. Kytica zvončekov (2014)

Obr. 14. Tulipány

Obr. 15. Chryzantémy (2013)

Obr. 16. Pivónie (2005)

Obraz na obr. 12 venoval takmer všetkým bývalým kolegyniam a kolegom na stretnutí katedry matematiky pred štyrmi rokmi. Pod kyticou sú dve učebnice, ktoré boli svojho času základnými učebnicami výučby matematiky. Chcel takto všetkým skôr narodeným pripomenúť, aby sme nezabudli na knihy, z ktorých sme čerpali a podľa ktorých sme v minulosti učili a prednášali.

Tulipány vraj symbolizujú prázdnu hlavu (obr. 14), ale krásu im autor neupiera a maľoval ich rád.

3 Ďalšie kompozície

História obrazu s koňmi (obr. 17) sa viaže na zaujímavú príhodu. Imrova neter, dcéra jeho sestry, si stále želala mať obraz s koňmi. Stále sa uja pýtala, kedy už koníky budú nakreslené. Ujo ju odbil slovami, že koníkom chýbajú ešte chvosty, ale že už sú takmer namaľované. Napokon obraz uzrel svetlo sveta a originál je u Imrovej netere a z ďalších sa tešia aj mnohí obdarovaní, ktorí prechovávajú lásku ku koňom.

Obr. 17. Kone (2008)

Obr. 18. Dom U dobrého pastiera,
Podhradie Bratislavského hradu

Babylonskú vežu na obr. 19 nakreslil autor ako symbol popletených jazykov. Dnes by túto karikatúru bral ako symbol popletených názorov.

Babky demokratky (obr. 20) je karikatúra babiek, ktorým by podľa autora malo byť odobraté právo voliť v čase 90-tych rokov, kedy boli staré babky veľmi ľahko ovplyvňované medovými rečami politického rečníka.

Obr. 19. Babylonská veža

Obr. 20. Babky demokratky

Poďakovanie a slovo autorky

Docent Abrhan bol naším obľúbeným kolegom - pedagógom, ktorý vždy, keď bolo treba, nezištne poradil a povzbudil žartovnou poznámkou či dobrým vtipom. Ďakujeme mu za všetky jeho cenné rady a pripomienky v oblasti matematiky a za jeho ústretový prístup ku nám, bývalým kolegyniam a kolegom. Vie veľmi zábavne rozprávať príbehy, ktoré mu život napísal. V prvom rade je však až závideniahodné, že vek mu nedal stopku ani pre jeho záľubu maľovať, ani pre písanie odborných článkov, na ktorých som občas mala tiež svoj podiel, ako editorka časopisu G. Trpezlivo som lúskala jeho myšlienky z rukopisu a prácne prepisovala do publikovateľných článkov, ktoré istotne oslovili veľa matematikov. Veru je za čo ďakovať, lebo vydal v našom časopise G až 5 rozsiahlych článkov na vysokej odbornej úrovni. V prípade Imra, ako si ho dovolím osloviť jeho menom, je naprosto jasné, že vek je pre neho iba číslo. Držíme mu palce, aby ho elán pre maľovanie a písanie odborných textov stále neopúšťal. Výbor neziskovej Spoločnosti pre Geometriu a Grafiku mu želá k jubileu všetko najlepšie a hlavne pevné zdravie!

Poďakovanie patrí aj jeho pani manželke, že nám pripravila výber z veľkej množiny jubilantových obrazov a poskytla nám ich fotografie s popiskami k nim a tiež aj kolegyni doc. RNDr. Daniele Velichovej, CSc., ktorá značnou mierou prispela svojimi pripomienkami a doplnením textu.

Literatúra

[1] Materiál zo súkromných archívov autora a jeho spolupracovníčok.

RNDr. Dagmar Szarková, PhD.

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovenská republika
e-mail: dagmar.szarkova@gmail.com

Za doc. RNDr. Valentom Zaťkom, CSc.

Pavel Chalmoviansky

Abstrakt
Spomienky na kolegu doc. RNDr. Valenta Zaťka, CSc., ktorý nás opustil 28. mája 2022.

Abstract
Memories on colleague doc. RNDr. Valent Zaťko, CSc., who left us on 28 May, 2022.

Docent Valent Zaťko sa narodil 2.10.1935 v Lehote pod Vtáčnikom, dedine neďaleko Prievidze, ako prvý z troch synov v rodine roľníka. Tam strávil detstvo aj ranú mladosť. Na základnej škole a neskôr aj na Gymnáziu v Prievidzi, vtedy ešte na Mariánskej ulici, bol dobrým žiakom. Už pred nástupom na Univerzitu Komenského pracoval v bani kvôli finančným nárokom na štúdium, a aby uľahčil svojim rodičom a súrodencom. Vďaka jeho schopnostiam a poctivej práci ho vedenie bane poverilo vedením mládežníckeho razičského kolektívu. Sem sa vracal pracovať v čase prázdnin aj počas ďalších rokov štúdia, a preto sa snažil mať semester vždy ukončený v predstihu. Ako študent viedol cvičenia pre nižšie ročníky na univerzite. Jeho príhody z konca druhej svetovej vojny o oslobodzovaní dediny, pasení kráv, práci v bani často farbisto rozprával nielen v kruhu kolegov, ale občas drobným príbehom pobavil poslucháčov na prednáškach. Aj z týchto zážitkov čerpal v neskorších rokoch svoju obdivuhodnú celoživotnú energiu.

Za štúdium na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského mu bol v roku 1959 udelený titul promovaný matematik s červeným diplomom (odbor matematika a geometria a pedagogický študijný program matematika a deskriptívna geometria pre výberové stredné školy). V diplomovej práci sa venoval riemannovskej geometrii. Potom už Valent Zaťko mohol a aj strávil celý svoj profesionálny život na svojej alma mater. Tu sa zoznámil aj so svoju manželkou Vierou, študentkou odboru matematika a deskriptívna geometria, s ktorou žili spolu 59 rokov. Minimovú prácu venoval téme diferencovateľných variet a ich vlastnostiam. Neskôr, v roku 1968, ukončil ašpirantúru na Matematicko-fyzikálnej fakulte Karlovej Univerzity v Prahe v odbore Geometrie a topologie. Témou kandidátskej dizertačnej práce boli simplexy v n-rozmerných hermitovských priestoroch. Z tých čias spomínal najviac na časté konzultácie s Aloisom Švecom, ktorý bol žiakom známeho matematika Eduarda Čecha.

Po straníckych previerkach začiatkom sedemdesiatych rokov, ktoré boli iniciované udalosťami v roku 1968, bol označený ako „protisocialistická sila" a vylúčený z Komunistickej strany Slovenska. Prakticky to znamenalo zákaz publikovania doma aj v zahraničí, odklad postupu nielen vedeckého ale aj platového na neurčito. Vedúci katedry dostal stranícku úlohu hľadať za neho náhradu. Našťastie sa žiadnemu vedúcemu katedry geometrie za nasledujúcich necelých 20 rokov nedarilo takúto úlohu dotiahnuť do úspešného konca.

V sedemdesiatych rokoch 20. storočia sa začal venovať aj programovaniu. Zúročil ho v nasledujúcej dekáde, keď sa na fakulte presadzovala spolupráca vedy s praxou. To umožnilo zapojiť sa Valentovi Zaťkovi (spolu s Milošom Božekom a ďalšími) do riešenia úloh medzi výrobno-hospodárskou jednotkou OGAKO Partizánske zastúpenou Ing. Franekom a vtedajšou Matematicko-fyzikálnou fakultou UK pod vedením dekana prof. Michala Greguša. Pracovali na rozmiestňovaní vykrajovaných dielcov na kusy materiálu (napr. kože) tak, aby sa optimalizovala spotreba materiálu. Neskôr sa ich spolupráca rozšírila aj o Výskumný ústav textilný. Nielen teoretické ale aj praktické postupy viedli k zlepšeniam efektivity pre spolupracujúce firmy, zavádzaniu počítačových metód do praxe a na strane fakulty viedli k možnosti zakúpiť vtedajšiu modernú výpočtovú techniku. Počas hľadania a ladenia riešení si účastníci založili seminár z počítačovej grafiky a numerickej geometrie. Prispeli aj k viac ako tridsať rokov uskutočňovanej medzinárodnej Jarnej škole (neskôr konferencie) z počítačovej grafiky. Postupy a metódy, na ktorých sa docent Zaťko podieľal, doteraz žijú vo viacerých softvérových produktoch renomovaných firiem.

Habilitoval v roku 1990, krátko po zmene politického režimu. Témou jeho habilitačnej prednášky boli zovšeobecnené rotačné telesá. V tomto čase bol aj členom rehabilitačnej komisie na úrovni UK a bol aj jedným zo zástupcov MFF UK v zboroch voliteľov prvých ponovembrových rektorov UK.

Posledné dve desiatky rokov svojej profesionálnej kariéry sa vedecky venoval konštrukciám najmä v oblasti geometrického modelovania, splajnových kriviek a plôch. Niekoľko rokov pôsobil aj ako externý prednášajúci na UCM v Trnave.

Docent Zaťko bol v prvom rade známy ako vynikajúci vysokoškolský učiteľ. Jeho vždy veľmi nadpriemerný pedagogický úväzok sa postupne skladal z množstva prednášok a cvičení so širokým tematickým záberom vo všetkých formách štúdia, a to ako v učiteľskom štúdiu, tak aj v odboroch matematika a informatika. Zaviedol na fakulte mnoho nových predmetov. V živej pamäti jeho vtedajších žiakov nemizne podstatným spôsobom inovovaný základný kurz geometrie. Pod jeho starostlivým vedením vzniklo na našej a prírodovedeckej fakulte viac ako sto diplomových a iných záverečných prác. Vyškolil šiestich doktorandov v programe Geometria a topológia (doc. M. Bohdalová, RNDr. T. Hýrošová, doc. M. Kmeťová, RNDr. D. Szarková, doc. P. Chalmovianský, RNDr. M. Samuelčík), pričom všetci aspoň časť svojej profesionálnej kariéry pracovali na matematických alebo informatických katedrách univerzít. Bol členom vedeckej rady MFF UK, dlhoročným predsedom rigoróznej komisie a členom mnohých ďalších skúšobných a obhajobných komisií. Ešte v roku 2021 počas pandémie pôsobil ako externý skúšajúci v komisii pre štátne skúšky v študijnom programe Počítačová grafika a geometria na FMFI.

Jednou z najväčších zásluh docenta Zaťka pre rozvoj fakulty je jeho rozhodujúci podiel na vzniku štúdia počítačovej grafiky a počítačovej geometrie v 80. rokoch. Nemalou mierou prispel aj k vzniku zamerania matematika – manažment, kde garantoval výučbu informatických predmetov. Do dôchodku odišiel v roku 2001 a naďalej pôsobil na fakulte ako externista.

Je autorom 55 vedeckých a odborných prác. Napriek zákazu publikovania sa mu podarilo napísať a vyšlo niekoľko učebných textov. Je autorom kapitoly o základoch geometrie a lineárnej a analytickej geometrie v Malej encyklopédii matematiky z roku 1967, ktorej druhé prepracované vydanie z roku 1978 s jeho menom už bolo problematické. Je spoluautorom dvoch vysokoškolských učebníc Geometria 1 a Konštrukčná geometria z r. 1985. Okrem toho vydal niekoľko skrípt pre geometriu a základy počítačovej grafiky.

Bol z každého nám dostupného pohľadu kľúčovým pracovníkom Katedry geometrie a neskôr aj Katedry počítačovej grafiky a spracovania obrazu, a toto „súkatedrie“ určitú dobu riadil celé. Ako kolega bol vždy ochotný riešiť problémy, ktoré sa vyskytli na pracovisku a jeho riešenia boli často vedecky aj vzťahovo veľmi vynaliezavé, poznajúc dôkladne svojich spolupracovníkov. Ak však niekoho oslovil tenším spýtavým hlasom „dušinka“, bol to neklamný znak, že dotyčný alebo dotyčná čosi poriadne pobabrali. Mnohé historky z jeho pedagogického života stále kolujú v našej komunite (napr. kvôli veľkému počtu študentov tandemovo skúšal dvojice študentov, ktoré naraz odpovedali - každý do jedného ucha; bol známy vymýšľaním príkladov na porozumenie, čo slabší študenti obvykle neupredností, a pripravenejší si zasa v duchu ťukali na čelo, že sa ich pýta niečo také triviálne, prípadne mu kládli potichu otázky, či mu chutí jesť; skúška u neho mohla trvať pokojne aj dva dni – jeden deň ste programovali od rána do večera a druhý deň ste riešili teoretické úlohy od rána do večera; povestné sú aj niektoré jeho príhody s kolegami najmä z ich študentských a asistentských čias).

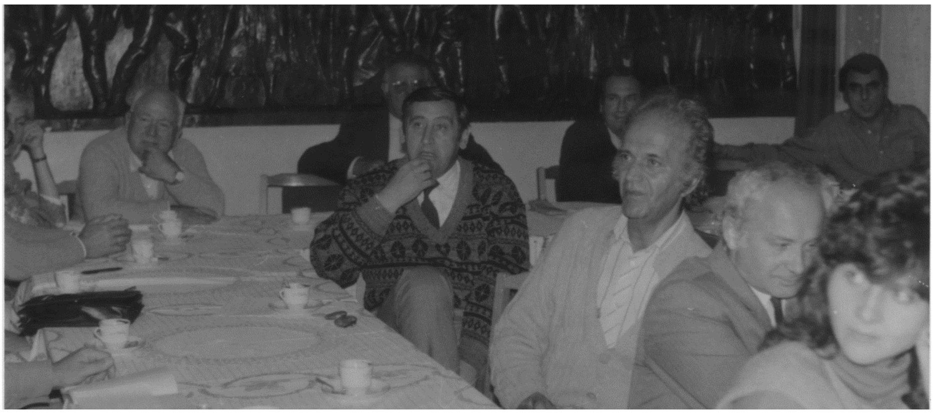
Doc. RNDr. Valent Zaťko, CSc. zomrel 28. 5. 2022. Spomíname na neho radi a často.

Poznámka na okraj k autorovi

Môj profesionálny život sa spája s Valentom Zaťkom veľmi úzko. Bol vedúcim mojej diplomovej práce, aj školiteľom na doktorandskom štúdiu, ktoré som nijako veľmi neplánoval. Po štátniciach, keď som na chodbe čakal na spolužiakov, sa ma svojim typickým spôsobom opýtal. „A vy čo budete teraz robiť?“ Po mojej rozpačitej odpovedi mi bez váhania ponúkol miesto na Katedre geometrie, čo bola pre mňa veľká pocta. Zakrátko som ponuku prijal. Zatiaľ som to rozhodnutie neoľutoval. Dúfam, že ani on tak nikdy neurobil.

Poďakovanie

Rád by som poďakoval za mnohé poznámky, opravy a doplnenia, fotografický a iný materiál, ktorý som dostal od pani Viery Zaťkovej a od kolegov z fakulty Miloša Božeka, Andreja Ferka, Soni Kudličkovej, Štefana Solčana.



V Harmónii s prof. Šalátom, akademikom Gregušom, doc. Venckom, doc. Grajcárom, doc. Božekom a ďalšími

Zo zlatej promócie v roku 2019

Na obhajobách v roku 2007 s doc. Zámožíkom, doc. Božekom a doc. Bálintom

Jubilanti oslavujú na konferencii SCG v Kočovciach v roku 2010,
doc. Valent Zaťko 75 rokov, doc. Jozef Zámožík 80 rokov, prof. Ján Čižmár 75 rokov

Oslava 30. výročia založenia
Katedry geometrie UK v roku 1990

Oslava na Katedre geometrie
v roku 2018

doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovenská republika
e-mail: Pavel.Chalmoviansky@fmph.uniba.sk

Abstracts

D. Kolářová: Oblique passage surface

The paper presents an area of oblique passage in a wider context from the perspective of descriptive geometry, statics, building mechanics and stonemasonry. The solution of the skew arch had changed mainly between the 15th to 18th centuries and also depended on the economic and technical conditions of the place of realisation. The large expansion of oblique bridges was mainly linked to the development of railway transport. The text introduces the solution of oblique passage by the orthogonal, helicoidal and logarithmic methods.

H. Stachel: Plücker's conoid revisited

Plücker's conoid (cylindroid) C is a ruled surface of degree three with a finite double line. This surface plays a major role in the geometric literature since all its pedal curves are planar. It is the locus of pairs of skew lines for which a given orthogonal hyperbolic paraboloid is the bisector. In spatial kinematics, C is the locus of instantaneous screw axes of the relative motion for two rotating wheels with fixed skew axes. Finally, four concyclic generators of C are common tangents of infinitely many spheres, and we study their enveloping canal surface.

T. Černák: Jubilarian doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc.

The life story and curriculum vitae of a distinguished Slovak mathematician doc. RNDr. Imrich Abrhan, who is celebrating significant jubilee this year.

D. Szarková: From the painting work of doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc.

A few samples from the painting work of jubilarian doc. RNDr. Imrich Abrhan, CSc., with which he fulfilled his artistic ambitions after retirement.

P. Chalmovianský: Remembering doc. RNDr. Valent Zaťko, CSc.

Memories on colleague doc. RNDr. Valent Zaťko, CSc., who left us on 28 May, 2022.

G
Slovak Journal for Geometry and Graphics

Volume 19 (2022), No. 38
ISSN 1336-524X

Edited by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics
IČO: 31 816 304
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17
812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:
Redakcia G - SSGG
SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia
ssgg@ssgg.sk

Frequency: One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.
Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

G is cited in: Zentralblatt für Mathematik

www.ssgg.sk