



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 22, číslo 44, 2025
ISSN 1336-524X

G

Slovenský časopis pre geometriu a grafiku

Ročník 22 (2025), číslo 44

ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG

Vedúca redaktorka:

Daniela Velichová

Výkonné redaktorky:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Redakčná rada:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsáblová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuclidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

IČO: 31 816 304

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:

Redakcia G - SSGG

ÚMF SJF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

sogg@sogg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.

Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adrese: www.sogg.sk

Tlačí: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

Časopis G je evidovaný v: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG december 2025, Bratislava, číslo 2/2025

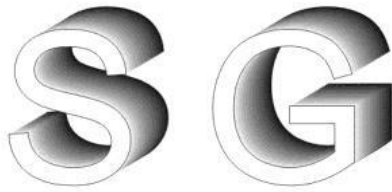
Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovat', ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkoľvek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.



Obsah – Contents

Generalised intrinsic and extrinsic lengths in submanifolds Zovšeobecnené vnútorné a vonkajšie dĺžky na podvarietách Johan Gielis	5
On Káteszi type triangle geometry by geometric (Grassmann-Clifford) algebra O Kátesziho geometrii trojuholníka cez geometrickú (Grassmanovú-Cliffordovú) algebru Emil Molnár	21
Gnómonická azimutálna projekcia na ciferníku slnečných hodín Gnomonic azimuthal projection on sundial dial Margita Vajsáblová, Juliana Beganová	35
Prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. – laureát Ceny Petra Pavla Bartoša 2025 Prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. – laureate of the Peter Pavol Bartoš Prize 2025 Daniela Velichová	55

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu
a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG
Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Generalised intrinsic and extrinsic length in submanifolds

Johan Gielis

Abstrakt

Cieľom tohto článku je predstaviť Gielisovu superformulu (transformáciu) a vysvetliť jej súvislosti s objavom a vývojom mnohých významných geometrických teórií v rámci historického kontextu 18. - 21. storočia.

Kľúčové slová: Gielisova superformula, super-elipsa, Lorentzova transformácia, zakrivený priestor, Finslerova-Riemannova geometria, Lamého-Minkowského geometria, minimálne plochy, neorientovateľné plochy, uzly a linky, kužeľosečky

Abstract

Aim of this paper is to introduce the Gielis superformula (transformation) and explains its connections to development of striking geometric theories within the historical context of the 18th - 21st century.

Keywords: Gielis superformula, super-ellipses, Lorentz transformation, curved space, Finsler-Riemann geometry, Lamé-Minkowski geometry, minimal surfaces, non-orientable surfaces, knots and links, conic sections

1 Introduction

In 1997, the Superformula was discovered, a generalization of the Pythagorean Theorem and Lamé curves and Piet Hein's superellipses, [1], [2]. It was renamed to Gielis Formula or Gielis Transformations by mathematicians. In the plane, a function $f(\vartheta)$ is transformed as:

$$\varrho(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt[n_1]{\left|\frac{1}{A}\cos\left(\frac{m}{4}\vartheta\right)\right|^{n_2} \pm \left|\frac{1}{B}\sin\left(\frac{m}{4}\vartheta\right)\right|^{n_3}}} \cdot f(\vartheta) \quad (1)$$

These are transformations of circles and spheres, or, in higher dimensions, of n -spheres, or other functions. Some 3D examples are shown in Fig. 1. If these transformations had been discovered two or three centuries ago – which certainly would have been possible – they might have fundamentally influenced the development of science and mathematics. In this note, we develop some interesting connections to key developments in the history of mathematics and physics.

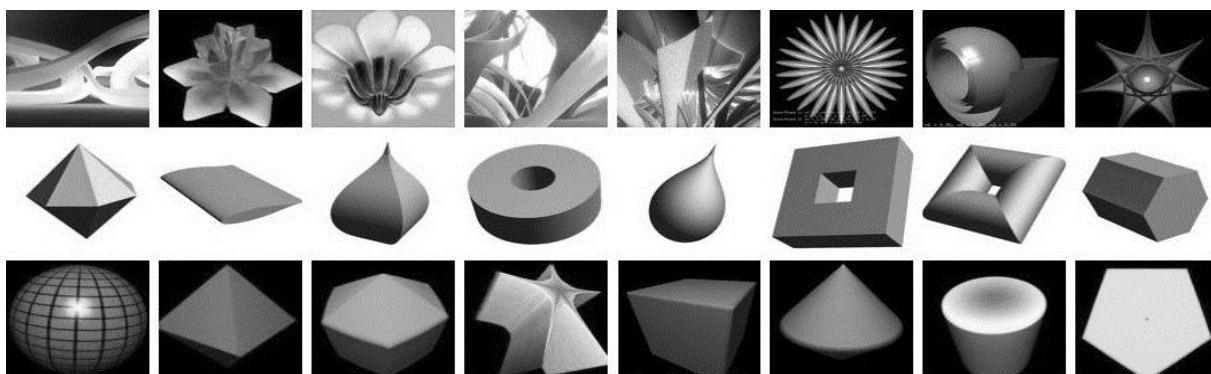
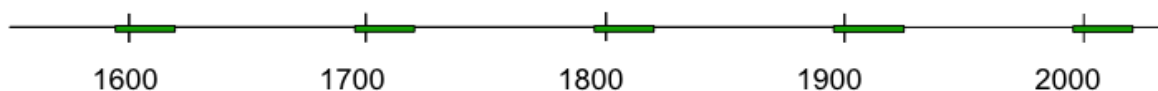


Fig. 1. 3D shapes with perpendicular cross sections defined by equation (1).

The first two relate to developments around the turn of the 18th to 19th century and the first decades of the 19th century. The next four are selected in relation to developments around the turn of the 19th to 20th century and the first decades of the 20th century.

1. Elliptic equations and a theorem of Gauss
2. The mathematical physics project of Fourier
3. Lorentz transformations and special relativity theory
4. Curved spaces and General Relativity theory
5. Finsler-Riemann and Lamé-Minkowski geometry
6. Minimal surfaces and unit spheres
7. Non-orientable surfaces, knots, and links
8. Mathematics and the natural sciences: Conic sections at the core, once more

All these developments have driven research over the course of these centuries and are all interconnected. Novel developments in these fields using Gielis transformations have been found or are underway in the first decades of the 21st century, in both geometry and natural sciences.



2 A theorem of Gauss (~1818)

Elliptic functions trace back to Bernoulli's with the study of elastic curves and Gauss' study of lemniscate functions, [3]. In their well-known form the integrand of elliptic integrals of the first kind is given by $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$, and those of the second kind by $\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}$.

Gauss came extremely close to Gielis Transformations when he used a slightly different form, namely

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 \cos T^2 + b^2 \sin T^2}}$$

He used this in his studies on the Arithmetic-Geometric Mean $M(a, b)$ which led him to the following theorem, [4]:

$$M(a, b) \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{dT}{\sqrt{a^2 \cos T^2 + b^2 \sin T^2}} = \frac{\pi}{2}$$

Remarkably, Gauss's paper and Lamé's book *Examen* were both published in 1818, and combining their ideas would have naturally led to the Superformula. If Gauss had developed his transformations in a slightly different direction, using general exponents as Lamé did, he would have arrived at superellipses (since the integrand in Gauss's form is an ellipse). By adding $m/4$, Gauss would have reached the Superformula. If Lamé had used the polar version...

The appearance of π in the integrals above provides an indirect connection to the Fundamental Theorem of Algebra, [5]. The Gauss-Bonnet theorem states that for any Riemannian metric g on the sphere S^2 , $\int_{S^2} K dA_g = 4\pi$. It follows that:

$$M(a, b) \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta = \pi = \frac{1}{4} \int_{S^2} K dA_g$$

connecting ellipse and sphere. In terms of curvature and principal curvature k_1 and k_2 , whose product is the Gaussian curvature K (the square of their geometric mean $\sqrt{k_1 k_2}$), this yields:

$$M(k_1, k_2) \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{k_1^2 \cos^2 \vartheta + k_2^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta = \pi = \frac{1}{4} \int_{S^2} K dA_g$$

For the sphere $k_1 = k_2$, and the left side of the equation becomes

$$M(k_1, k_1) \int_0^{\pi} \frac{1}{k_1} d\vartheta = k_1 \int_0^{\pi} \frac{1}{k_1} d\vartheta = \pi.$$

It is noted that for each superellipse or supercircle a different π_p can be defined, [6] – [8]. π_p defined as the half-length is a function of the shape, and $\pi_p = \pi$ if and only if $p = 2$. The π_n -function is limited between $2\sqrt{2}$ and 4. The former bound is associated with the inscribed square ($n = 1$), and the latter with the circumscribing square ($n \rightarrow \infty$). Each of these shapes also has its own trigonometric functions. In Fig. 2 are shown cosines and sines on supercircles for $n = 0.5, 1, 2, 5, 20$.

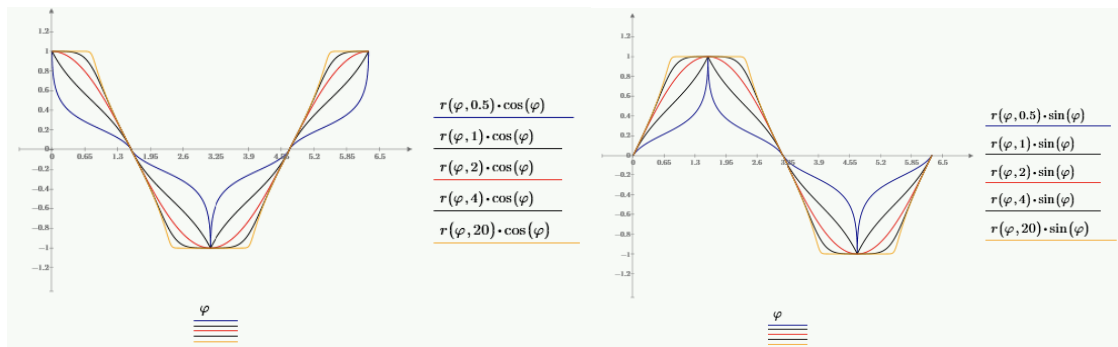
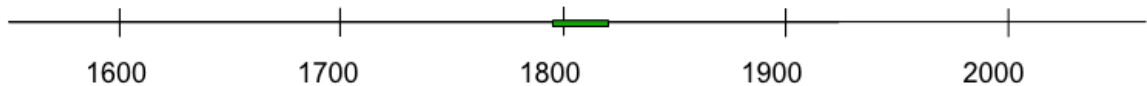


Fig. 2. Trigonometric functions on supercircles [8].



3 The mathematical physics project of Fourier (1807)

The memoir of Jean-Baptiste Fourier in 1807 in [9] aimed to provide a solution to a specific problem in mathematical physics – the heat equation – using circular functions. René Thom wrote that the applications of mathematics in science almost always use pre-existing mathematical results and frameworks. Fourier's work was the only counterexample in science. It is rooted in physics, and he developed his own original methods using trigonometric functions based on the circle. To put this in perspective: Newton succeeded in determining the curvature of any planar curve using osculating circles at any point, and the radius of these circles became the measure of curvature. This could then be linked directly, up to a constant, to mechanical forces in nature. In one stroke, Fourier provided a global determination of curves and functions using a sum of a circle and circular functions (Fourier series). This was groundbreaking work, generalizing the solution of vibrating strings (1D in a 2D domain) in terms of harmonics to planar domains in 3D Euclidean spaces.

Despite the widespread use of Fourier series in science, it remained an open problem whether Fourier's idea to approximate functions with any degree of precision using Fourier series was

valid. Only in 1966 did Lennart Carleson, [10], prove Luzin's conjecture (1915), namely the pointwise convergence of Fourier series almost everywhere, except at points of measure zero.

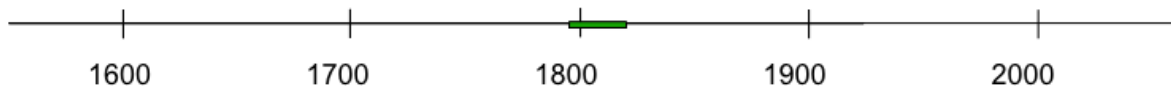
This settled a long-standing problem, but it did not complete Fourier's project in mathematical physics. The original problem was a quadruple: a boundary value problem (BVP), boundary conditions BC (Dirichlet, Neumann, Robin), a given boundary function BF, and a domain D, with the original solution in terms of Fourier series. It was given on a circular domain, and for the next two centuries, analytical solutions remained possible only for a few domains. Various methods were developed – very few analytic, most numerical – but none could use the classical Fourier projection method.

Only in 2007, exactly 200 years after Fourier's original memoir, was it shown that the solution of BVPs for any normal polar domain could be expressed in Fourier series. P. E. Ricci and collaborators generalized the Laplacian, using the Gielis transformation to transform any domain into a circle, and obtained Fourier solutions for a variety of canonical problems in mathematical physics, [11]. The domains included not only normal polar planar domains, but also 3D domains and Riemann surfaces. Later, these solutions were extended to annular domains and shells, [12].

Since the original paper in 2007, solutions using only the 19th-century mathematics (Fourier series, Bessel functions – first described by Fourier – and Hankel functions) have been obtained for the heat, wave, Laplace, Poisson, and Helmholtz equations, under various boundary conditions on 2D and 3D domains, using the classical Fourier projection method, [7], [13] – [15]. The Helmholtz equation, for example, relates to many problems in mathematical physics with partial differential equations involving time and space, and is used to study problems in electromagnetism, acoustics, vibrations, and more. Many other problems can be reduced to the Helmholtz equation: for example, plate vibrations involving a fourth-order Laplacian or reaction-diffusion systems can be solved using two independent Helmholtz equations. A hyperbolic equation, like the wave equation, can be transformed into the Helmholtz equation using the Laplace transform.

The “exact” solution of many classical BVPs in terms of Fourier series can be achieved, where “exact” means that we can approximate a prescribed finite number of coefficients of the Fourier expansion of the solution as closely as we wish, [11]. Generalizing transforms and special functions based on Gielis transformations is underway, providing a continuous transformation including Kugelfunktionen and Zylinderfunktionen.

Fourier series are mathematically equivalent to Ptolemy's solutions for describing the motion of planets, [16]. In the sense of Fourier series, only the circle is a simple curve; all other curves are equally complex, with an infinite expansion, [17]. Orthogonality has recently been redefined based on equation (1), see [18], [19]. A generalized Fourier series solution based on shapes and their own trigonometric functions and Pythagorean theorems is under development, [6], [20].



4 Lorentz transformations and Special Relativity Theory

In Special Relativity Theory SRT the Lorentz transformation tells how space and time dilate and contract when one moves at uniform speeds v , relative to the velocity of light c . It is given

by: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Before Einstein this transformation was used by physicists to connect measurements with theory, [21]. For Lorentz the transformed coordinates and fields were mathematical aids to facilitate the solution of differential equations that involved the wave operator.

This transformation may be considered as a special case of Gielis Transformation in the following way(s): for all exponents $n_2 = 0, n_{1,3} = 2, A = B = 1, m = 4$ and subtraction (instead of addition), we obtain $\rho(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{(\cos \vartheta)^2 - (\sin \vartheta)^2}}$. For $n_2 = 0, n_{1,3} = 2, A = B = 1, m = 4$, we obtain the form $\rho(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \vartheta)^2}}$ with $0 \leq (\sin \vartheta)^2 \leq 1$, like ϵ^2 and $\frac{v^2}{c^2}$. Alternatively, we use $\cos^2 \vartheta = 1 - \sin^2 \vartheta$ which then yields $\rho(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\sin \vartheta)^2}}$, [22].

This has a clear geometrical meaning, [23]: Draw two lines through the origin in a rectangular coordinate system, one in the first octant and its mirror image in the last octant over the horizontal axis, intersecting the unit circle. Then, draw a line connecting the points of intersection of the lines and the unit circle, and called this the chord. The sine function is defined as half the chord, and $\sin^2 \vartheta$ corresponds to the square constructed on the sine (in the sense of application of areas of the Pythagoreans). Then $2\sin^2 \vartheta$ corresponds to the two squares applied to each half chord. For 0° yields $\rho(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\sin \vartheta)^2}} = 1$ and for 45° $\rho(\vartheta) = \frac{1}{0}$.

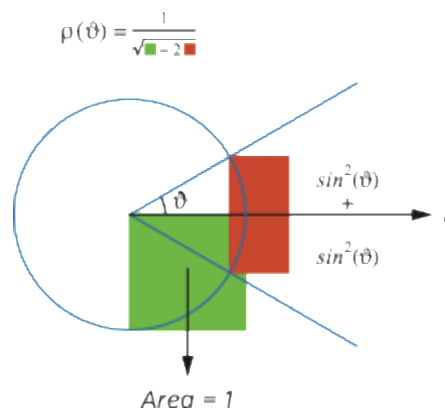
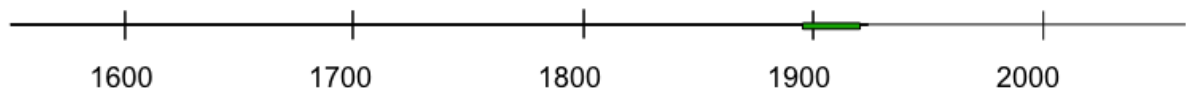


Fig. 3. Application of areas to half chords, [23].

This corresponds, respectively, to $v = 0$ and $v = c$ in Lorentz transformations (or $\epsilon = 0$ and $\epsilon = 1$) in the form of Henri Poincaré, [22], [24]). In Fig. 3 circular functions and motion are converted into rectilinear motion as the Greek knew. Starting from the hyperbola this may well be the shortest introduction to SRT.



5 Space-time models and FLRW metrics

In [2] Prof. L. Verstraelen noted that equation (1), as a transformation on functions, such as on the circle and sphere, is quite like the transformation of the Pythagorean metric to go from Euclidean space to metrics for Riemannian spaces of constant curvature. An ‘isotropic’ manifold or a space of constant curvature corresponds to the axiom of free mobility, whereby

the lengths of rigid measuring rods are independent of their locations in space. In 1856 Riemann in [25] defined such spaces using the metric:

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{k}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2} \quad \text{or:} \quad ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2}{\left\{1 + \frac{k}{4} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2]\right\}^2}$$

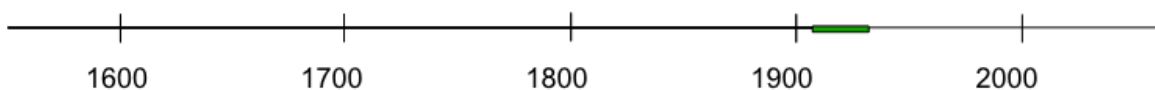
The formal deformation of the Pythagorean theorem to define isotropic spaces is quite alike the Gielis transformation. In fact, the Pythagorean theorem defines the best-known example of a manifold of constant curvature, namely circles and spheres. Equation (1) transformation transforms these circles and spheres into a variety of spaces with a global anisotropy. However, the notion of anisotropy (vis-à-vis isotropy) then needs rethinking because all transformed circles (or n -spheres) are unit circles (or unit n -spheres) for certain classes of anisotropic spaces. Likewise, the notion of curvature can be defined on the basis of these unit circles of n -spheres. One application of constant curvature surfaces are space-time models of the Big Bang type, equipped with Friedman-Lemaître-Robertson-Walker FLRW metrics given by [2]:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{\left[c(t) \cdot \left\{1 + \frac{k}{4} [x^2 + y^2 + z^2]\right\}\right]^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

with $k = 0, 1$ or -1 for the Euclidean, spherical/elliptical and hyperbolic case, respectively:

“These metrics are given in R^4 with local coordinates (x,y,z,t) whereby the space-slices of the full space-time at any given time t are Riemannian 3D-spaces of constant curvature $c(t)$. By way of visualization in 2D rather than in 4D representation, such metrics are carried for instance by surfaces of revolution in 3D space. In space-time metrics like FLRW one may observe, on the one hand, the conformal deformations of flat space-metrics to metrics of constant spatial curvature ($=; <$ or > 0) which may change in the course of time, and, on the other hand, a hyperbolic twist in the line-direction, which further might include a speed of light-normalization, which all in all amount to formal deformations of the theorem of Pythagoras quite alike the above supertransformations relate to the equation of Euclidean circles or spheres, [2].”

Apart from the fact that both transformations are very much alike, Gielis transformations have also redefined rotations and revolutions, where paths swept by certain curves or surfaces can take any form as well. This kinematic generalization has been derived in [18] for the Riemannian and in [19] for the Lorentzian case, along with a generalization of quaternions. In 1993, a closely related example of the Lamé footprint was introduced in biology and ecology, the so-called Antonelli metric $ds = e^{\varphi(x)} [(dx_1)^n + (dx_2)^n]^{\frac{1}{n}}$, [26]. Equation 1 has also been used to model anisotropic wavefronts in wildfire propagation, [27], and in seismic phenomena in [28]. P. L. Antonelli (who was a reviewer for [28]) wrote: “Your work is an inspiration to all of us who see geometry in biological nature”.



6 Finsler-Riemann-Lamé-Minkowski geometry (1817 & ~1917)

Mathematical physics in France reached full fruition in the 19th century through Gabriel Lamé who like Fourier two decades earlier, was professor at the École Polytechnique. Lamé

envisioned that, from a mathematical perspective, the study of a physical system reduces to the study of a system of curvilinear coordinates, adapted to the given physical situation (providing the initial geometrical support for the physical system). The study of that physical problem, adapted with the appropriate system of curvilinear coordinates then becomes the characterization of the system of differential invariants or the calculation of the Laplacian in curvilinear coordinates, [29]. The completion of Fourier's project would thus have delighted Lamé.

Gauss considered Lamé the best French mathematician of his time, and Élie Cartan regarded Lamé as the cofounder of Riemannian geometry, [23]. Gauss came very close to Gielis transformations in his study on the lemniscate and elliptic functions, but Gabriel Lamé was the true predecessor of equation (1). In *Examen de différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* [30] many problems of analytic geometry were first solved. He wrote this small booklet at the age of 21 and in this remarkable book he also introduced equations of the type $x^n + y^n = R^n$, [30]. Equation (1) is a simply generalization of Lamé curves. For Lamé curves the Euclidean metric is obtained for $n = 2$, whereby the length of a line is expressed using Pythagoras' theorem. However, n can be any real number. In his historic *Habilitationsschrift* [25] Riemann alluded to using a fourth power instead of a square, to measure distances on manifolds between two infinitely close points. More generally:

a Riemann-Finsler metric $ds = \{\sum_{i=1}^n (dx^i)^p\}^{\frac{1}{p}}$,

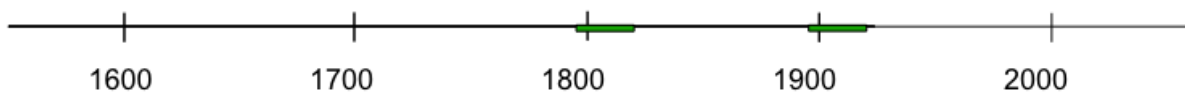
and for $p = 2$: Euclidean metric $ds = \{\sum_{i=1}^n (dx^i)^2\}^{\frac{1}{2}}$.

This challenge was taken up by Paul Finsler, [31], which led to the development of Riemann-Finsler geometry with norms based on powers other than two (as in the case of Riemannian geometry, or the Pythagorean measure). According to Shiing-Shen Chern (1911-2004) Finsler geometry is Riemannian geometry without the quadratic restriction, [32]. Constantin Carathéodory, Finsler's advisor, who first introduced the idea of an indicatrix, a hypersurface in the tangent plane of a manifold. Finsler manifolds are those for which the metric structure is given by a collection of convex symmetric bodies in the various tangent spaces, [33]. For the Riemannian case it is a (hyper-)ellipsoid.

Minkowski created the formal tools to study problems about convex regions and bodies, leading to Minkowski geometry, [34], which is *"the kind of geometry in which lengths are measured differently in different directions ... Unit circles and spheres are not the familiar round objects from Euclidean geometry, but are some other convex shape, called the unit ball"*. Cityblock L_1 , the Euclidean metric L_2 , and the max norm L_∞ are well-known examples of p -th root metric of Minkowski where the unit circles are special cases of Lamé's supercircles. They are directly related to the Last Theorem of Fermat and to number theory. In my view it would be reasonable to refer to this geometry, whatever its use or specification (bodies, submanifolds, tangent spaces ...), as Finsler-Riemann-Lamé-Minkowski or *FRLM* geometry (to avoid any possible confusion with *FRLW*).

This also includes Gielis transformations as a generalization of Lamé, [1]. These curves and surfaces describe natural shapes in a uniform way, as a generalization of conic sections. They give rise to natural measures and metrics in Riemann-Finsler geometry and all natural processes that are modeled in this way. Here too, crucial developments were spaced centuries apart, with Lamé (1817), Finsler (1917) and the generalization into Lamé-Gielis curves and surfaces in

1997. Gauss, Riemann, Hilbert, Minkowski, Carathéodory and Finsler all at the mathematical powerhouse of Göttingen. Lamé and Fourier (and Bonnet) worked at the École Polytechnique powerhouse in Paris, inspired by Monge, Lagrange and Laplace in the same 25-year period.



7 Minimal surfaces and unit spheres

In 1917 one of the most remarkable books in science was published: *On Growth and Form* by Wentworth D'Arcy Thompson, [35]. He discussed the application of mathematics in biology, and devoted an entire chapter to surface tension, for example comparing the shape of ink drops in water to certain jellyfish. He delighted in Delaunay's 1841 theorem that the profile curves or roulettes of the constant mean curvature surfaces are generated by rolling conic sections over a line or plane. Constant mean curvature CMC surfaces minimize the stress on their surface. The quintessential examples are soap bubbles (spheres with constant non-zero mean curvature) and catenoid soap films, obtained by pulling two rings out of a soap solution (mean curvature zero everywhere). In soap bubbles and films surface tension is distributed as uniformly as possible, serving as model or an equilibrium shape for example a wide variety of marine organisms, [35].

In physics, surface tension is described by the Young-Laplace equation. Laplace provided the mathematical description in 1806 after Thomas Young had given the qualitative analysis in 1805. This equation has been central in the study of minimal surfaces, a major area of research in mathematics and geometry over the past three centuries. For differential growth in two perpendicular directions, different tensions T_1 and T_2 are involved, [35].

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = 1$$

Bennett Palmer and colleagues used Gielis curves and surfaces as transformations of unit spheres, known as Wulff shapes and derived the corresponding catenoids, unduloids and nodoids, [36] and [37], including the helicoidal case, [38]. Gielis curves provided them with tractable examples for Constant Anisotropic Mean Curvature CAMC surfaces. In contrast, CMC surfaces are based on spherically isotropic energies. Constant anisotropic mean curvature (CAMC) surfaces are based on Wulff shapes which serve as the "sphere" for an anisotropic energy, meaning they minimize the energy for a fixed volume. A supercatenoid has the property that sufficiently small segments of it minimize the anisotropic energy defined by the Wulff shape among all surfaces with the same boundary.

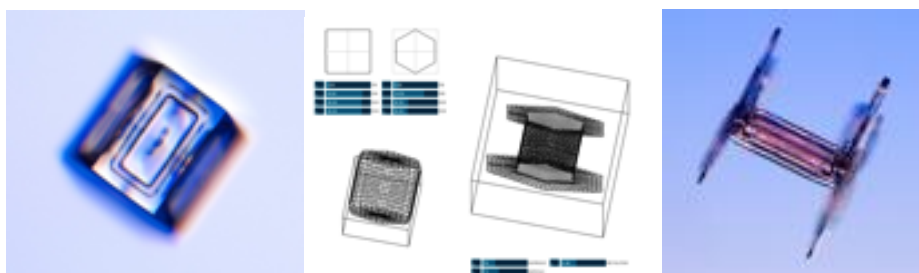
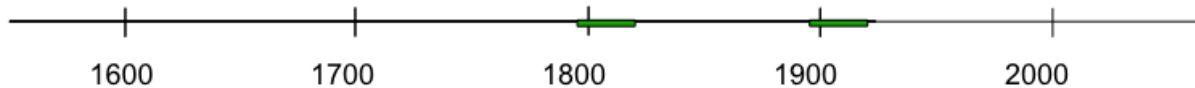


Fig. 4. Center: Prism based on two perpendicular sections defined by equation (1) and the corresponding catenoid. Left and right: real snowflakes, [39].

Just as catenoids in soap films completely minimize stress for isotropic energies, in supercatenoids stress is also minimized locally, as defined by the anisotropic energy. CAMC surfaces with Wulff shapes based on Lamé-Gielis curves open new avenues of studying optimization in natural shapes. Wulff shapes and supercatenoids then provide equilibrium shapes for various natural forms such as snowflakes and their development, preserving the underlying symmetry of ice. A Wulff shape and supercatenoid are shown in the center of the Fig. 4, with the supercatenoid minimizing the anisotropic energy defined by a hexagonal prism (among all surfaces with the same boundary). In Fig. 4 two examples of snowflakes are shown. In a similar way Euler's elastic curves have also been generalized to the anisotropic case, [41].



8 On symmetry and non-orientable surfaces, knots and links

One of the most exciting developments in geometry was the emergence of topology. We call it a branch of geometry because despite its great successes it is in a certain sense, waiting for equations and for transformations, and would benefit from improved notions of symmetry. Consider for example the notion of symmetry. In topology a starfish and a pentagon both have a fivefold rotational symmetry. Symmetry seems well defined, but if you compare a circle and a pentagon (or a starfish like curve for that matter), you can ask which of the following statements is true.

1. A circle and pentagon have the same symmetry
2. A circle has a higher symmetry than a pentagon
3. A pentagon has a higher symmetry than a circle
4. All of the above statements are true

Our intuition suggests that only statement 2 is correct, with a circle having infinite symmetry, compared to five for a pentagon. However, if you consider equation (1), there are various ways to define a circle. One possibility is to define its symmetry as infinite ($m \rightarrow \infty$), the Archimedean approach. But if $m = 0$ you also obtain a circle as a zero-gon or zero-angle (which also makes sense intuitively). If the exponents n_1, n_2, n_3 are all equal to 2 (for $A = B$), then the transformation is equal to 1 as well, so in that case you can define a circle for any symmetry (and by the way, symmetries can be real numbers). Therefore, all four statements are correct, from which it also follows that:

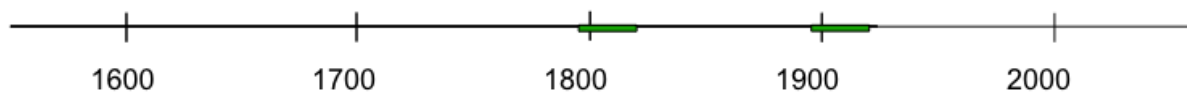
5. Going from a circle to a pentagon involves symmetry breaking with a symmetry increase
6. Going from a circle to a pentagon involves symmetry breaking with a symmetry decrease
7. Going from a circle to a pentagon does not involve symmetry breaking

In any case, if a starfish (an abstract one) develops from a spherical egg then there is a continuous transformation from a circle to a starfish, from a circle with pentagonal symmetry ($m = 5$) to a starfish ($m = 5$). Therefore, no symmetry breaking from infinity to 5 is needed, [23]. It is simply a matter of perspective; we now have new ways of measuring distances (and conservation laws arise naturally), for anisotropic shapes, of which the isotropic case is a special case, the one around which most of our science is built. This aligns with [41]: “Symmetry concerns the preservation of some measure of some aspects or facets of some objects under the

application of some kinds of transformations to these objects. And, depending on which kinds of aspects, or facets of which kinds of objects and on which kinds of their measurements are compared before and after which kinds of transformations, there may result plenty different kinds of symmetries in agreement with this “definition”.

Another notable development in the recent years has been the studies of Prof. Ilia Tavkhelidze on non-orientable surfaces and bodies, and their relation to knots and links. He has developed a unifying equation for Generalized Möbius-Listing *GML* surfaces [42] – [46], a subclass of Generalized Twisting and Rotating surfaces and bodies (*GTR*). Combined with equation (1) this can also be used to study bodies with internal geometry. In this way the results of cutting of surfaces and bodies can be completely classified, with clear connections to knots and links. Perhaps in the future this may lead to a (geometrical) classification of knots and links (rather than the current tabulation). Alternatively, equation (1) has allowed for recognition of self-intersecting curves in image analysis, [47]. Research also links cutting of *GML* bodies to dynamical systems in mathematics, [48] and biology, [49].

This also connects to some of the great developments in differential geometry of the early 19th century, most notably by Lancret who introduced curvature and torsion of a space curve in his *Mémoire sur les courbes à double courbure*. So from the notebooks of Gauss and the generalization of Euler’s theorem by Poinot, Cauchy and L’Huillier around the turn of the 19th century and the works of Poincaré on Analysis Situs, the definition of topological spaces by Hausdorff (1914) and Brouwer’s work on topological manifolds, and to the new developments on *GML* and *GTR* bodies we also notice a concentration of important advances around the turn of centuries.



9 Conic sections at the core, once more

There are fundamentally three ways these transformations can be studied or used. The first two relate to the *FRLM*. The *LM* part concern the study of such shapes/transformations to define a geometry, such as Minkowski geometry, which is a fascinating subject in its own right. As one result (and Minkowski’s motivation) these shapes can be used to study the intrinsic and extrinsic geometry of manifolds, as convex (or concave) bodies in the tangent spaces or bundles, the *FR* part. This defined most of the twentieth century developments in geometry. Another notable development was submanifold theory, in which manifolds can be studied in different manifolds or spaces, amongst other with the delta curvatures of Bang-yen Chen, [50]. With equation (1) we now have a continuous transformation between a large class of submanifolds, manifolds and Euclidean space itself. Gielis is an acronym for Generalized Intrinsic and Extrinsic Lengths in Submanifolds, [23].

The third way is then simply to consider our transformations in the Euclidean space, which immediately links geometry with the natural sciences, [1], [51]. L. Verstraelen wrote in [52]:

“The basic shapes of the highly diverse creatures, objects and phenomena, as they are observed by humans, either visually or with the aid of sophisticated apparatus, can essentially, either singular or in combinations, be considered as derived from a limited number of special types of geometric figures. From Greek science up to the present this is probably the most important subject of natural philosophy. Examples are found in regular

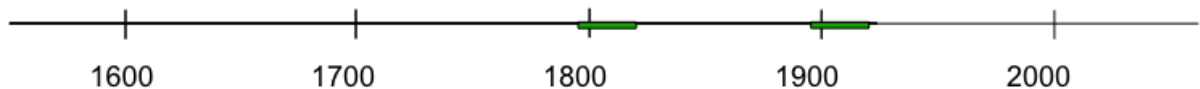
polygons or polygrams in DNA molecules and snowflakes, spirals in galaxies, sunflowers and snails, parabolas and ellipses as trajectories of projectiles, planets, etc. The theories, which explain these natural shapes use definitions and mechanisms, which are special to certain disciplines where these creatures, objects and phenomena are studied (crystallography, biology, chemistry ...).

The formal geometrical descriptions however for these diverse ways of explaining (e.g. using concepts like energy, reaction-diffusion ...) give rise to solutions of essentially the same shapes ... When we return to circles, these are the most symmetrical among all planar curves, describing growth from a central point with perfect isotropy. By applying the appropriate Gielis transformations (which are technically determined by just a few parameters), this results in an immediate and accurate description of the symmetries and shapes of e.g. flowers or hexagons in viscous fluids or honeycombs. The geometrical description of curves and surfaces and the shapes which are derived via Gielis transformations describe and determine in a uniform and universal way an enormous diversity of natural shapes”.

These transformations are generalizations of Lamé curves, superellipses and conic sections. Lamé originally envisioned the extension to superellipses, to be able to apply the beautiful geometry of Descartes to the natural world, particularly to crystals in 1818. In his famous book of 1917, D’Arcy Thompson presented many examples of the application of mathematics to natural shapes, but not of Lamé curves. The Geometrical Beauty of Plants, [23], was published exactly one century later than On Growth and Form, many examples are provided, corroborating Gabriel Lamé, two centuries later.

Since the 1990’s superellipses have been found everywhere: in tree rings, [53], [54], square bamboo stems, [55], and leaf stomata, [56]. The generalization to any symmetry with equation (1) has been applied successfully to starfish, [57], flowers and leaves of plants, [58], [59], diatoms, [60], and all avian eggs, [61]. Over 50,000 specimens have been tested, [62], and methods and software used to test all these shapes is available as open-source software, [63].

There is also a direct connection between superellipses and superparabolas (power laws), as shown in economics, [64], with the latter as a special case of the former. Indeed, the Cobb-Douglas function is a special case of general production functions. Further, they are directly connected to logistic functions, [64]. Power laws and superparabolas are found at all levels in nature and natural phenomena, see for example the shape of meristems in plants, [65]. This provides for a great unification of a wide variety of natural phenomena, with diversity and inequality, [66], with the simple rules of arithmetic as its foundations, and geometry as its core, [67].



10 What if?

From the selected elements of the history of mathematics it becomes clear that Gielis transformations could have been a useful addition of the mathematical toolbox. For some unknown reason equation (1) was only discovered in 1997 but could or should have been discovered two or three centuries earlier. In that hypothetical case, they certainly would have advanced the development of mathematics and science in general. In the past ten years various connections have been explored, and it has been shown that these transformations have been key in completing Fourier’s project and in the study of anisotropic constant mean curvature

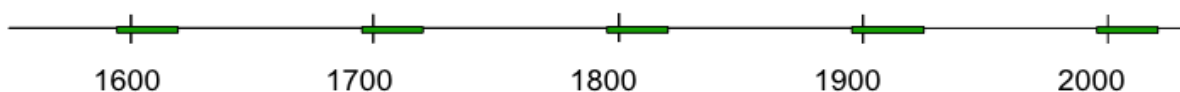
surfaces, to give two examples from two centuries ago. One can only wonder about the possible course of science by asking what if? questions. What if Bernoulli, Laplace, Gauss, Fourier, Lamé, Lorentz, Poincaré, Minkowski, Carathéodory, Finsler or Einstein had known the Gielis transformation? And, what if mathematical giants working at the turns of centuries, or those giants in between, such as Leibniz, Newton, Euler, Lagrange and Riemann, had this transformation in their toolbox?

From the uniform description based on conic sections, Newton developed his laws. Four centuries later, a one-step generalization of conic sections (Gielis transformations, 1997) provides for a description of a wide variety of natural shapes. From this uniform description, new insights into the development of natural objects and organisms may be expected in the future. One of the most promising developments is a geometrical theory of morphogenesis of natural shapes, both living and non-living. One basic principle is that for organisms growing out of a center or a pole, the growth is such that the instantaneous maximal change of its polar distance is constant. A second principle is that organisms try to minimize the stress they receive from the surrounding space during growth as much as possible, [2]. The principle of reaction and of least action are two of the three guiding principles that Poincaré identified for the mechanistic development of physics. The third guiding principle is the relativity principle, which is obtained in a general (but not too general, to allow for the study of universal natural shapes) way by the Gielis transformations. One can now quantify metrics such as lengths and n -areas more generally, both from an intrinsic and extrinsic point of view, in a broad and continuous way, [68] .

The selected time frames of 25 years, from the last years of a century to the first decades of a new century, provide a storyline, a narrative to show how various developments can be spaced centuries apart. However, one might also find some truth in this. Towards the end of the 17th century there was a rapid development of the calculus, with the study of the elastica, the origin of elliptic functions by Bernoulli around the mid 1690's. Around the turn of the 16th to 17th century, Galilei and Kepler published their findings on the movement of planets and projectiles respectively, and the connection to conic sections. So we have:

- 1595-1620: Galilei, Kepler and Simon Stevin
- 1695-1720: Leibniz and the Bernoulli's
- 1795-1820: Laplace, Gauss, Fourier, Lamé, Young
- 1895-1920: Lorentz, Einstein, Minkowski, Finsler, Poincaré
- 1995-2020: Verstraeten, Palmer, Ricci, Caratelli, Tavkhelidze

The exception to the rule is the *FLRW* metric, developed in the 1920's as exact solutions to Einstein's equations of *GRT* (with +10 a year shift starting in 1905 with Einstein's *SRT*). One might ask about an important development missing, namely the development of quantum theory, from the late 19th century with Max Planck, to Einstein and the developments in the first decades of the 20th century. But there is a connection: the relation with the Helmholtz and Schrödinger equations were solved analytically in isotropic spaces only. With equation (1) analytic solutions can be developed for a variety of domains and submanifolds.



References

- [1] GIELIS, J. A generic geometric transformation that unifies a large range of natural and abstract shapes. *American Journal of Botany* 90(3) Invited Special Paper, 333-338, 2003.
- [2] GIELIS, J, HAESSEN, S., VERSTRAELEN, L. Universal shapes: from the supereggs of Piet Hein to the cosmic egg of Georges Lemaître. *Kragujevac Journal of Mathematics* 28, 55-67, 2005.
- [3] KOLMOGOROV, A. N., YUSHKEVICH, A. P. (Editors, 1996) *Mathematics in the 19th century*. Birkhäuser.
- [4] COX, D. The arithmetic-geometric mean of Gauss. *L'Enseignement Mathématique* 30: 275-330, 1994.
- [5] ALMIRA, J. M., ROMERO, A. Yet another application of the Gauss Bonnett theorem for the sphere. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 14 (2007), 341–342.
- [6] GIELIS, J., CARATELLI, D., TAVKHELIDZE, I. Rational Science, Unique and Simple. In *International Symposium Square Bamboos and the Geometree* (p. 185), 2023.
- [7] RICCI, P. E, GIELIS, J. *From Pythagoras to Fourier and from geometry to nature*. Athena Publishing, 2021.
- [8] BEIRINCKX, B. From Superellipses to Superformula and Technology. In *1st International Symposium on Square Bamboos and the Geometree (ISSBG 2022)* (pp. 123-142). Athena Publishing.
- [9] GRATAN-GUINNESS, I., RAVETZ, J. R. *Joseph Fourier 1768-1830. A survey of his life and work*. MIT Press, 1972.
- [10] CARLESON, L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.* 116 135-157, 1966.
- [11] NATALINI, P., PATRIZI, R., RICCI, P. E. The Dirichlet problem for the Laplace equation in a starlike domain of a Riemann surface. *Numer. Algor*, 2008. DOI 10.1007/s11075-008-9201-z.
- [12] CARATELLI, D., GIELIS, J., TAVKHELIDZE, I., RICCI, P. E. The Dirichlet Problem for the Laplace Equation in Supershaped Annuli. *Boundary Value Problems* 2013:113.
- [13] CARATELLI, D., NATALINI, P., RICCI, P. E. Fourier solution of the wave equation for a starlike shaped vibrating membrane. *Computers and Mathematics with Applications* 59, 176-184, 2010.
- [14] CARATELLI, D., GERMANO, B., GIELIS, J., HE, M. X., NATALINI, P., RICCI, P. E. Fourier solution of the Dirichlet problem for the Laplace and Helmholtz equations in starlike domains. *Lecture Notes of Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics* (Tbilisi University Press, 2010).
- [15] GIELIS, J., CARATELLI, D., HAESSEN, S., RICCI, P. E. Rational mechanics and Science Rationelle Unique. In: Paipetis, S., Ceccarelli, M. (Eds.) *The Genius of Archimedes: 23 centuries of influence on mathematics, science and engineering*. Springer Verlag, HMMS Series 11, 29-43, 2010.
- [16] MANIN, Y. I. Time and Periodicity from Ptolomy to Schrödinger: Paradigm shifts versus continuity in the history of Mathematics. In *Geometry in History*; Springer

- International Publishing: Berlin/Heidelberg, Germany, 2019. See note on Boccaletti's From the epicycles of the Greeks to Kepler's ellipse and the breakdown of the circle paradigm. In Proceedings of the Cosmology Through Time: Ancient and Modern Cosmology in the Mediterranean Area, Monte Porzio Catone (Rome), Italy, 2001.
- [17] VERSTRAELEN, L. Curves and Surfaces of Finite Chen Type. In: Geometry and Topology of Submanifolds, III, pp. 304–311, World Scientific, 1991.
- [18] PARLAK, E., ÖZDEMİR, Z. Superelliptic motion and superelliptic quaternions via Gielis formula. *Physica Scripta*, 100(9), 095212, 2025.
- [19] ÖZDEMİR, Z., PARLAK, E. Superquadric Motion and Superquadric Hyperbolic Split Quaternion Algebra Via Gielis Formula. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025.
- [20] GIELIS, J., CARATELLI, D., MORENO DE JONG VAN COEVORDEN, C., & RICCI, P. E. The common descent of biological shape description and special functions. In International Conference on Differential & Difference Equations and Applications (pp. 119-131). Cham: Springer International Publishing, 2017.
- [21] DARRIGOLD, O. The genesis of the Theory of Relativity. Poincaré Seminar 2005. Birkhauser verlag, Basel: 1-31.
- [22] GIELIS, J. *Inventing the Circle*. Geniaal Publishers, Antwerpen, Belgium, 2003.
- [23] GIELIS, J. *Geometrical Beauty of Plants*. Atlantis, Springer, 2017.
- [24] GRAY, J. *Henri Poincaré: A Scientific Biography*. Princeton University Press, 2013. ISBN 978-0-691-15271-4.
- [25] RIEMANN, G. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, R. Dedekind and H. Weber, eds. (Leipzig, 1876; 2nd ed., 1892).
- [26] ANTONELLI, P. L., SHIMADA, H., 1-form Finsler connections with constant coefficients, *Tensor*, N.S., 50 (1991), 263-275. Reproduced in full, as section 5.4 in Antonelli, P., Ingarden, R., Matsumoto, M., *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Springer/Kluwer, Fundamental Theories of Physics series, 101, Dordrecht-Boston-London, 1993.
- [27] JAVALOYES, M., PENDÁS-RECONDO, E., SÁNCHEZ, M. Gielis superformula and wildfire models, 2024. arXiv e-prints, arXiv-2406.
- [28] YAJIMA, T., NAGAHAMA, H. Finsler geometry of seismic ray path in anisotropic media. *Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2106), 1763-1777, 2009.
- [29] GUITART, R. Les coordonnées curvilignes de Gabriel Lamé, représentations des situation physiques et nouveaux objets mathématiques. In: *Gabriel Lamé: Les pérégrinations d'un ingénieur du XIXe siècle*. Actes du Colloque. SABIX N°44, 119-129, 2009.
- [30] LAMÉ, G. *Examen de différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*. M. V. Courcier imprimeur Libraire, Paris, 1818.
- [31] FINSLER, P. *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Dissertation, Göttingen, 1918.
- [32] ChERN, S. S. Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic equation. *Notices of the American Mathematical Society*, 43(9), 959-963, 1996.

- [33] RUND, H. Book Review of Finsler geometry and applications. Bull. of AMS 26 (1): 148-151, 1992.
- [34] THOMPSON, A. C. Minkowski geometry. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [35] D'ARCY THOMPSON, W. On Growth and Form. Cambridge University Press, 1917.
- [36] KOISO, M., PALMER, B. Equilibria for anisotropic energies and the Gielis Formula. Forma (Society for Science on Form, Japan) 23(1), 1-8, 2008.
- [37] KOISO, M., PALMER, B. Rolling Construction for Anisotropic Delaunay Surfaces. Pacific J. of Mathematics 2008 (2): 345-378.
- [38] KUHNS, C., PALMER, B. Helicoidal surfaces with constant anisotropic mean curvature. Journal of Mathematical Physics 52, 073506 (2011).
- [39] LIBBRECHT, K. Snow Crystals, 2021. <https://arxiv.org/pdf/1910.06389>
- [40] PALMER, B., PÁMPANO, A. Classification of planar anisotropic elasticae. Growth and Form, 1(1), 33-40, 2020.
- [41] VERSTRAELEN, L. On Natural Geometric Symmetries. Dedicated to the memory of Katsumi Nomizu. Talk presented in Murcia, Spain, November 18, 2008.
- [42] TAVKHELIDZE, I. On the some properties of one class of geometrical figures and lines, Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, vol. 16(1), 35–38, 2001.
- [43] TAVKHELIDZE, I., CASSISA, C., RICCI, P. E. About connection of generalized Möbius-Listing surfaces GML_m^n with sets of knots and links. Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica Volume IX: 183-200, 2010.
- [44] GIELIS, J., TAVKHELIDZE, I., RICCI, P. E. About “bulky” links generated by generalized Möbius–listing bodies GML_2^n . Journal of Mathematical Sciences. Volume 193, Issue 3, pp 449-460, 2013.
- [45] GIELIS, J., TAVKHELIDZE, I., CASSISA, C., RICCI, P. E. About "bulky" links, generated by Generalized Möbius Listing's bodies GML_3^n . Atti della Accademia nazionale dei Lincei Matematica e Applicazioni 24:1: 11-38, 2013.
- [46] GIELIS, J., TAVKHELIDZE, I. The general case of cutting of Generalized Möbius-Listing surfaces and bodies. 4Open.-Les Ulis, 2017, currens, 3, 7, 2020.
- [47] FOUGEROLLE, Y.D, GIELIS, J., TRUCHETET, F. A robust evolutionary algorithm for the recovery of rational Gielis curves. Pattern Recognition 46(8): 2078–2091, 2013.
- [48] GIELIS, J., RICCI, P. E., TAVKHELIDZE, I. The Möbius phenomenon in Generalized Möbius-Listing surfaces and bodies and Arnold's Cat phenomenon. Tbilisi Mathematical Journal, 14(4), 17-35, 2021.
- [49] GIELIS, J., TAVKHELIDZE, I., RICCI, P. E. Generalized Möbius-Listing bodies and the heart. Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 13(2), 58-70, 2023.
- [50] Chen, B. Y. (2019). Geometry of submanifolds. Courier Dover Publications.
- [51] HAESSEN, S., NISTOR, A. I., VERSTAELEN, L. On growth and form and geometry I. Kragujevac Journal of Mathematics 36(1): 5-25, 2012.
- [52] VERSTRAELEN, L. Letter to journalists on the Superformula, 2025, (unpublished).
- [53] SHI, P. J., HUANG, J. G., HUI, C., ..., LI, B. L. Capturing spiral radial growth of conifers using the superellipse to model tree-ring geometric shape. Frontiers in plant science, 6, 856, 2015.

- [54] HUANG, W., MA, K., GLADISH, D. K. Ellipse or superellipse for tree-ring geometries? evidence from six conifer species. *Trees*, 38(6), 1403-1413, 2024.
- [55] HUANG, W., LI Y., NIKLAS, K. J., GIELIS, J., DING, Y., CAO, L., SHI, P. A superellipse with deformation and its application. *Symmetry*, 12, 2073, 2020; doi:10.3390/sym12122073.
- [56] LI, Q., NIKLAS, K. J., NIINEMETS, Ü., ZHANG, L., YU, K., GIELIS, J., ... & SHI, P. Stomatal shape described by a superellipse in four Magnoliaceae species. *Botany Letters*, 171(1), 93-101, 2024.
- [57] SHI, P., RARKOWSKY, D., LI, Y., ZHANG, L., LIN, S., GIELIS, J. A General Leaf Area Geometric Formula Exists for Plants—Evidence from the Simplified Gielis Equation. *Forests*, 9(11), 714, 2018.
- [58] SHI, P., RATKOWSKY, D. A., GIELIS, J. The generalized Gielis geometric equation and its application. *Symmetry*, 12(4), 645, 2020.
- [59] SPÍČHAL, L. Superelipsa a superformule. *Matematika–Fyzika–Informatika*, 29(1), 54–69, 2020. <https://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/486>
- [60] De TOMASSI, E., GIELIS, J., ROGATO, A. Diatom frustule morphogenesis and function: a multidisciplinary survey. *Marine Genomics*, 35, 1-18, 2017.
- [61] SHI, P., GIELIS, J., NIKLAS, K. J. Comparison of a universal (but complex) model for avian egg shape with a simpler model. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1514(1), 34-42, 2022.
- [62] GIELIS, J., SHI, P., BEIRINCKX, B., CARATELLI, D., RICCI, P. E. Lamé-Gielis curves in geometry and botany. *Proceedings of the Conference RIGA2021 Riemannian Geometry and Applications*, Bucharest, Romania.
- [63] SHI, P., GIELIS, J., QUINN, B. K., NIKLAS, K. J., RATKOWSKY, D. A., SCHRADER, J., NIINEMETS, Ü. ‘biogeom’: An R package for simulating and fitting natural shapes. Vol. 1516, No. 1, 123-134, 2022.
- [64] GIELIS, J., NIKLAS K. J. Inequality and diversity: insights from biology. *Romanian journal of Mathematics and Informatics*, Volume 15, Issue 2, pp. 119-129, 2025.
- [65] NIKLAS, K. J., SHI P., LIU, X., GIELIS, J., BEIRINCKX, B. Comparing six non-linear equations describing the 2-D profiles of apical meristems. *American Journal of Botany* (in the press).
- [66] ZHANG, L., QUINN, B. K., HUI, C., LIAN, M., GIELIS, J., GAO, J., SHI, P. New indices to balance α -diversity against tree size inequality. *Journal of Forestry Research*, 35(1), 31, 2024.
- [67] GIELIS, J., SHI, P., CARATELLI, D. Universal equations—A fresh perspective. *Growth and Form*, 2022, 3.1-2: 27-44.
- [68] GIELIS, J. A Point-Theory of Morphogenesis. *Mathematics* 13(19), 3076, 2025.

Johan Gielis
University of Antwerp
Department of Biosciences Engineering
Antwerp B-2020, Belgium
e-mail: johan.gielis@uantwerpen.be

On Kárteszi type triangle geometry by geometric (Grassmann-Clifford) algebra

To Memory of my Professor and Doctor Father, Ferenc Kárteszi (1907-1989)

Emil Molnár

Abstrakt

Na pamiatku Ferenca Kártesziho sa riadim jeho didaktickým krédom. Narysujeme trojuholníky nad stranami trojuholníka ABC v euklidovskej rovine, povedzme $ABC\bar{,}BC\bar{A},CA\bar{B}$, a uvažujme o úsečkách $A\bar{A},B\bar{B},C\bar{C}$. Špeciálne začiatkové podmienky zabezpečujú, že dané úsečky sa navzájom pretínajú v bode K , ktorý nazveme Kártesziho bod na jeho počesť. Neskôr objavená (~1850) silná a veľmi užitočná teória (Grassmannom a Cliffordom, ako analógia k vektorovému súčinu) slúži ako jednotná metóda na ďalšie zaujímavé štúdium.

Kľúčové slová: geometria trojuholníka, projektívna geometrická (Grassmannova-Cliffordova) algebra, absolútna geometria Jánosa Bolyaia, riešenie úloh pomocou geometrickej transformácie

Abstract

To Memory of Ferenc Kárteszi I follow His Didactical Credo. Draw triangles outward on sides of a given triangle ABC in the Euclidean plane, say $ABC\bar{,}BC\bar{A},CA\bar{B}$, and consider the segments $A\bar{A},B\bar{B},C\bar{C}$. Special starting conditions guarantee that the above segments intersect each other in a point K , called Kárteszi points to His Honour. The later (~1850) strong and very useful machinery (by Grassman and Clifford, in analogy of vector cross product) serves as a unified method and further interesting discussions.

Keywords: triangle geometry, projective geometric (Grassmann-Clifford) algebra, absolute geometry by János Bolyai, problem solving by geometric transformation



Fig. 1. Ferenc Kárteszi, retired professor of the L. Eötvös University, member of the Editorial Board of the Annales Univ. Sci. Budapest, Sec. Math. died on May 9, 1989.

1 Introduction with two problems

Let us recall a well-known school task: *In the (Euclidean $\mathbf{E}^2$) plane of a triangle ABC we draw regular triangles outward on sides of ABC , say $AB\bar{C}$, $BC\bar{A}$, $CA\bar{B}$, respectively. Prove that the segments $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$ intersect each other in a point K . (That is the isogonal point of ABC and the distance sum $AK + BK + CK$ is minimal for K among all points of the plane, see Fig. 2.)*

Professor Kárteszi noticed that – instead of regular triangles – we can draw isosceles ones with all equal base angles, and the above K (called Kárteszi point) exists also in the Bolyai-Lobachevsky hyperbolic plane $\mathbf{H}^2$ [2] (in the sphere $\mathbf{S}^2$ as well, (see also [4] Kálmán, 1989 and Sect. 2-3), while the orthocentre, barycentre are specific cases.

This problem will lead to a more general Yaglom triangle configuration and to an analogous extremal point K , where the distance sum $\alpha KA + \beta KB + \gamma KC$ is minimal with given positive real numbers α, β, γ . (Think of $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 2$, Figs. 3-4.)

Moreover, as a new result of our previous paper [9], an extension onto "absolute plane" ($\mathbf{S}^2$, $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{H}^2$; Minkowski plane $\mathbf{M}^2$, Galilei (or isotropic) plane $\mathbf{G}^2$) can be formulated and solved by three reflections theorem (see e.g. [1] Bachmann, [9] Molnár, 1978 and Sect. 4; [13] Weiss, 2018), and geometric (Grassmann-Clifford type) algebra ([12] Perwass et al., 2004 and Sect. 4, 5).

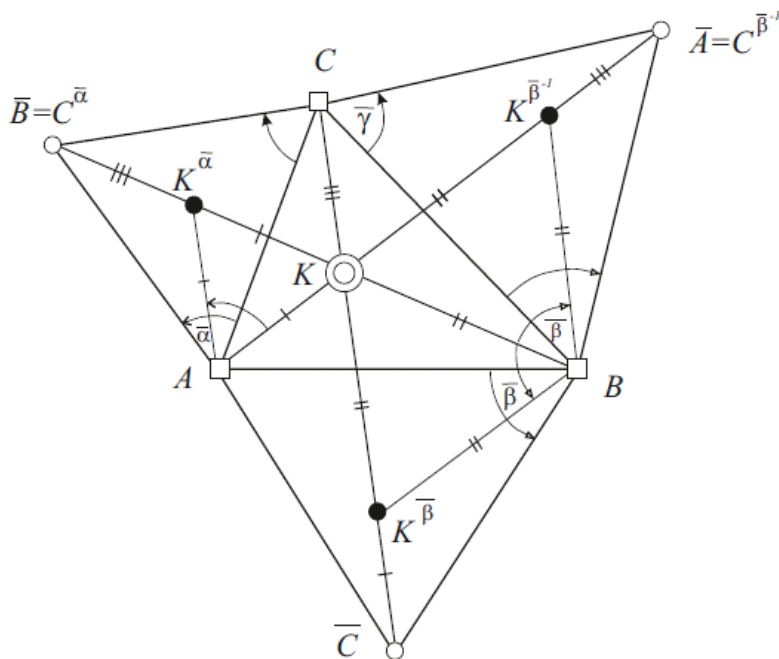


Fig. 2. K is the isogonal (or Fermat-Torricelli) point of triangle ABC with minimal distance sum $KA + KB + KC = A\bar{A} = B\bar{B} = C\bar{C}$.

Open problems arise as well. By this we want to follow F. Kárteszi's didactical credo (Fig. 1, see also his wonderful book [5] Kárteszi (1976), of great international success):

Start with a natural, elementary, visually well understandable task! Then follow the manipulations, tools, new mathematical concepts, the technical machinery; then the solution, occasional theory, further applications, extensions, etc.

In this presentation and future paper the projective geometric (Grassmann-Clifford type) algebra leads us to the „most general“ criterion of Kárteszi point K to a given triangle ABC with outward drawn triangles $AB\bar{C}$, $BC\bar{A}$, $CA\bar{B}$ and $K = A\bar{A} \cap B\bar{B} \cap C\bar{C}$.

We formulate these in Sections 4 – 5, where some consequences are mentioned as well. In 6 Epilogue and references [6], [11] we recall Ferenc Kárteszi as a teacher and scientist personality.

2 Solution of the starting problems

We begin with the solution of the school task to Fig. 2. Just as *proof with picture without words*, as Professor Kárteszi made many times in his seminar in 1970's years in our *János Bolyai College* (that time Budapest, VIII. Rákóczi str. 5).

Then the Professor turned to his generalisation with isosceles triangles) outward on AB , BC , CA of all equal base angles, as in the introduction. He recalled the absolute sine theorem of János Bolyai [2], see shortly in Sect. 3, that guarantees the existence of K as intersection point of $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$ (see [4] Kálmán, 1989, who was his doctor student as well). That time he left to me to find the "most general situation". Then I met the above problem of I. Yaglom (1968, [14]), when I translated his book volumes I-II into Hungarian, [7]. That problem in Figs. 3-4 led us to a more general (Euclidean E^2) configuration by similarity transforms. I could find an (or the „most interesting“) extension (only recently) as follows to Fig. 9 and the solution in absolute (projective metric) plane or sphere in Sections 4, 5.

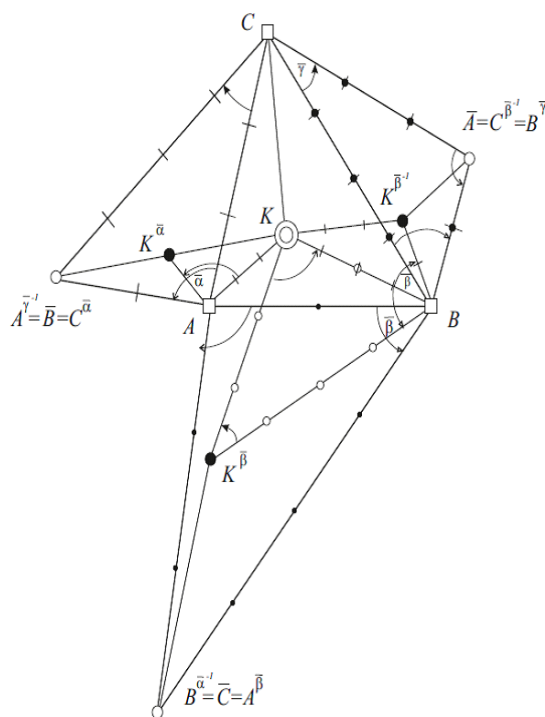


Fig. 3. Segmentation (then linearization) of $\alpha KA + \beta KB + \gamma KC$ (say $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 2$) by rotatory similarities $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ about A, B, C , with angles $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$, respectively (sketch).

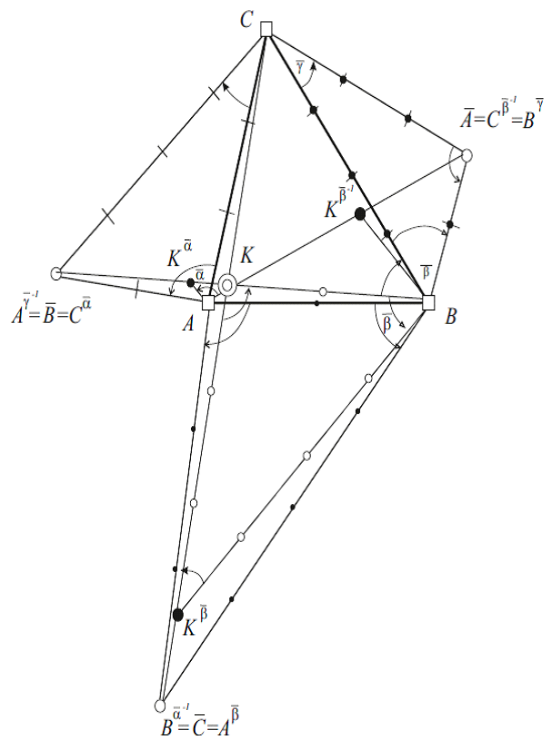


Fig. 4. The construction of the extremal point $K = A\bar{A} \cap B\bar{B} \cap C\bar{C}$ to Yaglom's problem in Fig. 3. Here $\alpha : \beta : \gamma \sim 4 : 3 : 2$ (satisfy the triangle inequalities!), and $\alpha A\bar{A} = \beta B\bar{B} = \gamma C\bar{C}$.

But first, let us analyse the more general problem in Fig. 3 ([7], [14]). We can write the (equivalent) proportionality

$$\alpha KA + \beta KB + \gamma KC \sim KA + (\beta/\alpha)KB + (\gamma/\alpha)KC.$$

Then after AK we can copy $(\beta/\alpha)KB = KK\bar{\beta}^{-1}$ by rotatory similarity $\bar{\beta}^{-1}$ about B with proportion $\gamma/\alpha = 1/2$ (in our concrete choice), so that $BK : KK\bar{\beta}^{-1} : K\bar{\beta}^{-1}B \sim \alpha : \beta : \gamma \sim 4 : 3 : 2$. This rotatory similarity $\bar{\beta}^{-1}$ maps C onto $\bar{A} = C\bar{\beta}^{-1}$, so that $BC : C\bar{A} : \bar{A}B \sim \alpha : \beta : \gamma \sim 4 : 3 : 2$, and $K\bar{\beta}^{-1}C\bar{\beta}^{-1} : KC = \gamma/\alpha = 1/2$. Here BC and the relation $\alpha : \beta : \gamma \sim 4 : 3 : 2$ uniquely determine $\bar{A} = C\bar{\beta}^{-1}$, and $AK + KK\bar{\beta}^{-1} + K\bar{\beta}^{-1}C\bar{\beta}^{-1} \sim AK + (\beta/\alpha)KB + (\gamma/\alpha)KC$, as promised and called *segmentation*. Thus $\alpha KA + \beta KB + \gamma KC \sim KA + (\beta/\alpha)KB + (\gamma/\alpha)KC$ will be as small as possible, iff K lies in the segment $A\bar{A}$ (as *linearization*) and also in $B\bar{B}, C\bar{C}$ as follows.

The similar argument holds for starting with C and B instead of A as above. In Fig. 3 we analysed these cases by logical symmetry. Then $BC : C\bar{A} : \bar{A}B \sim \alpha : \beta : \gamma \sim 4 : 3 : 2 \sim \bar{B}C : CA : A\bar{B} \sim B\bar{C} : \bar{C}A : AB$ determine the triangle configuration, where the rotatory similarities and inverses $\bar{\beta}^{-1}, \bar{\gamma}$ then $\bar{\beta}, \bar{\alpha}^{-1}$ then $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}^{-1}$ play important roles. These involve the symmetric angles $\bar{\alpha}, -\bar{\alpha}$ at vertex A ; $\bar{\beta}, -\bar{\beta}$ at B ; $\bar{\gamma}, -\bar{\gamma}$ at C , referred to the *three reflections theorem* later on (but e.g. $K\bar{\beta}^{-1} \neq K\bar{\gamma}$!).

In Fig. 4 we look at the construction: K is the common intersection point of segments $A\bar{A}, B\bar{B}, C\bar{C}$. Indirect arguments show that this K makes the quantity $\alpha KA + \beta KB + \gamma KC$ as small as possible, from among the points of $(\mathbf{E}^2)$ plane of the given triangle ABC , and for the given positive real numbers α, β, γ . Moreover, we get

$$\alpha A\bar{A} = \beta B\bar{B} = \gamma C\bar{C} \sim \alpha KA + \beta KB + \gamma KC$$

for this minimum in Fig. 4.

But we have now assumed that the numbers α, β, γ satisfy the triangle inequalities. The remaining question is: *What is the solution (situation) in the opposite cases?*

3 Application of the Absolute sine theorem

János Bolyai's absolute geometry [2] (~ 200 years old by his famous Temesvár letter to his father Farkas (Wolfgang) Bolyai, November 3, 1823) has a key of trigonometry, the following theorem.

3.1 Absolute sine theorem: *For the triangle ABC of angles α, β, γ at A, B, C and sides $BC = a, CA = b, AB = c$, respectively, it holds*

$$\sin \alpha / oa = \sin \beta / ob = \sin \gamma / oc, \quad (3.1)$$

where e.g. oa denotes the perimeter of the circle of radius a . $\square$

We remark that in $\mathbf{E}^2$ holds $oa = 2\pi a$, in $\mathbf{S}^2$ holds $oa = 2\pi r \sin(a/r)$, in $\mathbf{H}^2$ holds $oa = 2\pi k \sinh(a/k)$; where r is the radius of the sphere as a natural constant; k is a universal constant of $\mathbf{H}^2$, characteristic as the natural distance unit (with $k = \sqrt{-1/K}$, if K denotes here the negative sectional curvature, analogous to the spherical positive curvature $K = 1/r^2$).

First we recall the following

3.2 Ceva type theorem ([4] Kálmán, 1989, task 199, Fig. 5 a-b): *The three lines through the vertices of a triangle ABC (say of acute angles for simplicity) intersect each other in an interior point P , if and only if (or iff, with notations of Fig. 5 a-b)*

$$\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 / \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2 = 1. \quad (3.2)$$

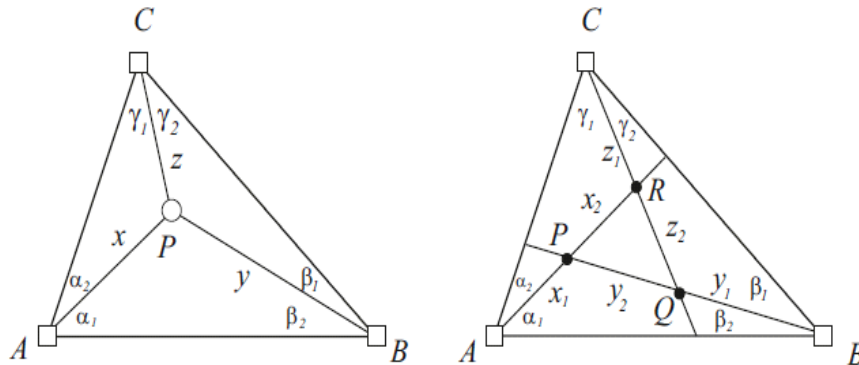


Fig. 5. a-b A Ceva type theorem of the absolute geometry.

Proof. a) If P exists: We write the Sine Theorem for ABP , BCP , CAP , respectively:

$$\sin \alpha_1 / \sin \beta_2 = o_y / o_x, \sin \beta_1 / \sin \gamma_2 = o_z / o_y, \sin \gamma_1 / \sin \alpha_2 = o_x / o_z.$$

Multiplying the left and right sides, respectively, we get (3.2).

b) Indirectly, we assume (3.2) and Fig. 5b. Again by Sine Theorem for ABP it holds

$$o(y_1 + y_2) / o_{x_1} = \sin \alpha_1 / \sin \beta_2, \text{ etc. for } BCQ \text{ and } CAR \text{ we get by (3.2)}$$

$$o(y_1 + y_2) o(z_1 + z_2) o(x_1 + x_2) / x_1 y_1 z_1 = 1$$

that would lead to a contradiction, if $x_2 = y_2 = z_2 = 0$, i.e. $P = Q = R$ would not be true. $\square$

Then comes the following theorem.

3.3 Kártesi point theorem in Fig. 6 (task 200 in Kálmán, 1989), as an "easy" consequence:

Proof. We write the Sine Theorem for triangles $A\bar{A}B$ and $A\bar{A}C$, respectively:

$$\sin \alpha_1 / \sin(\beta + \bar{\beta}) = oB\bar{A} / oA\bar{A} \text{ and } \sin \alpha_2 / \sin(\gamma + \bar{\gamma}) = oC\bar{A} / oA\bar{A} \text{ (imply) } \Rightarrow$$

$$\sin \alpha_1 \sin(\gamma + \bar{\gamma}) / \sin \alpha_2 \sin(\beta + \bar{\beta}) = oB\bar{A} / oC\bar{A} = \sin \bar{\gamma} / \sin \bar{\beta}$$

and other two analogous implications by logical symmetry. Multiplying the corresponding sides, we get again by simplifications $\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 / \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2 = 1$ the Ceva type equality (3.2), thus

$$A\bar{A} \cap B\bar{B} \cap C\bar{C} = K \quad (3.3)$$

that is just the Kártesi point. $\square$

It arises the problem: What are the connections among $A\bar{A}, B\bar{B}, C\bar{C}$ and data of ABC , and $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$? (Compare with the Euclidean situations!)

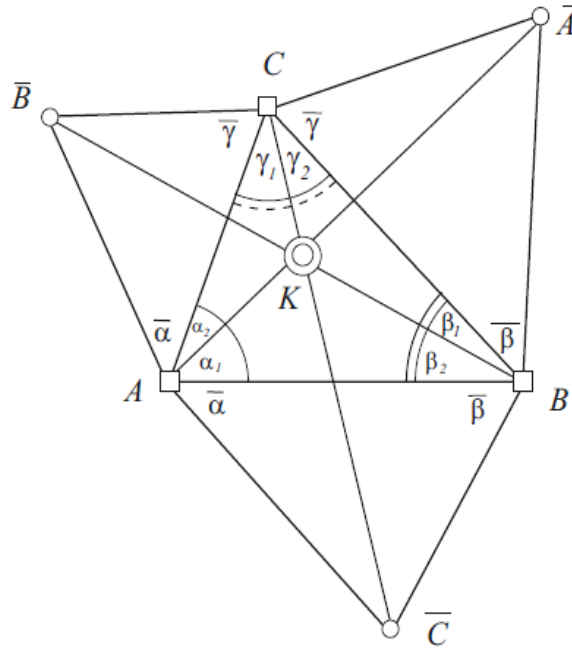


Fig. 6. Triangle configuration for Kárteszi point K in absolute geometry, compare also with Figs. 1, 3, 4 and the modified Fig. 9.

4 Projective metric plane over a real vector space V^3 and its dual V_3 . Projective geometric (Grassmann-Clifford type) algebra

For our description we need standard but lengthy series of concepts, notations, so we try to apply the (hopefully) informative Figs. 7 a-c below.

4.1 Projective metric plane

Fig. 7a shows our scene, how the real affine (Euclidean) plane A^2 is embedded into the affine (Euclidean) space A^3 (O, V^3, V_3), into a projective plane $P^2(A^2 \cup i)$, furthermore into the projective sphere PS^2 that can also be considered a double affine plane extended by a double ideal line i at infinity ∞ . Here V^3 is a (say) left vector space over real number field $(\mathbf{R})$, V_3 is its dual linear (then right) form space. $V^3 \ni \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ with a basis $\{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 0, 1, 2$), $V_3 \ni \mathbf{u} = e^j u_j$ with dual basis $\{e^j\}$ defined by $\mathbf{e}_i e^j = \delta_i^j$ (the Kronecker delta symbol; Einstein-Schouten index conventions will also be used; of course, nul vector $\mathbf{o}$ and null form $\mathbf{o}$ are excluded).

At Fig. 7b we see also a triangle coordinate system, now $A_0 A_1 A_2 A \sim b^0 b^1 b^2 b$ or $a^0 a^1 a^2 a$ alternatively. Out of affine plane A^2 we take an origin O , from that vectors point to plane A^2 so to projective plane P^2 and projective sphere PS^2 up to $\sim$ proportionalities below, respectively. That means vectors $\mathbf{x} \sim c\mathbf{x}$ describe the same point $X(\mathbf{x})$ of PS^2 iff $0 < c \in \mathbf{R}$, and $(\mathbf{x}) = (-\mathbf{x})$ for P^2 .

Linear forms of V_3 describe the planes through the origin O of A^3 , the proportionality classes describe the lines of P^2 and or (main circles of) PS^2 . A point A ($OA = \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, called unit point) fixes the coordinate system $A_0 A_1 A_2 A$ (up to proportionality). Then lines $a^0 = A_1 A_2$, $a^1 = A_2 A_0$, $a^2 = A_0 A_1$ and unit line a ($\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 + \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2$), the dual coordinate system in V_3 will also be fixed.

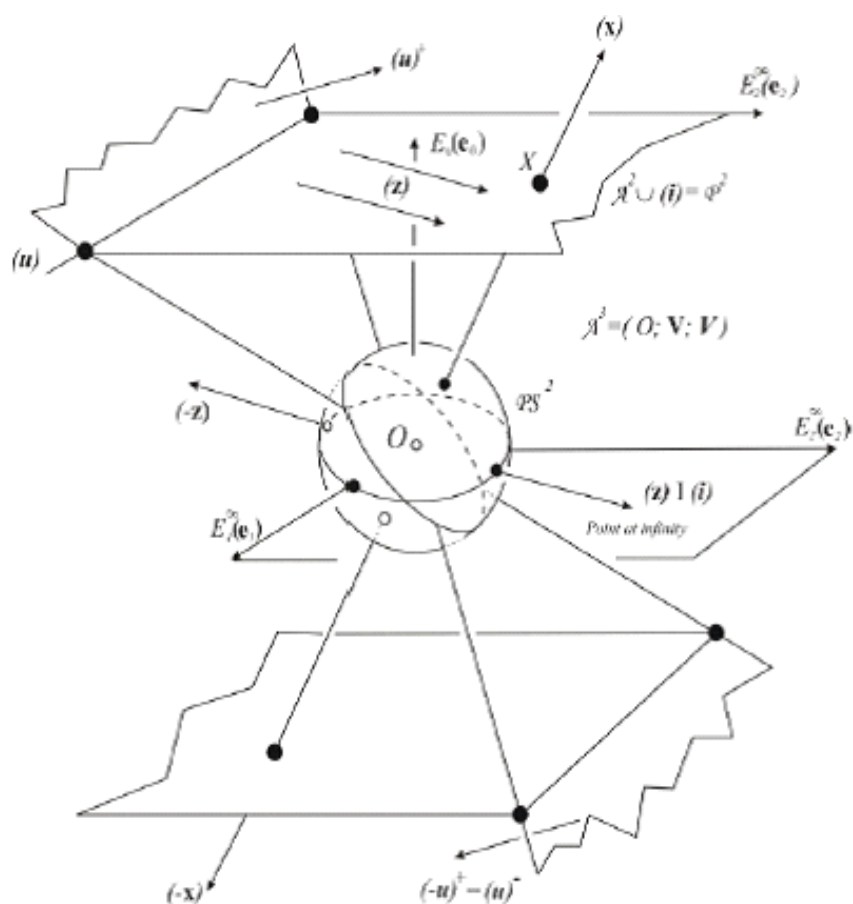


Fig. 7a. It shows the real ($\mathbf{R}$) affine (Euclidean) plane $\mathbf{A}^2$ embedded into the affine (Euclidean) space $\mathbf{A}^3(O, \mathbf{V}^3, \mathbf{V}_3)$, into a projective plane $\mathbf{P}^2(\mathbf{A}^2 \cup i)$, furthermore into the projective sphere $\mathbf{PS}^2$.

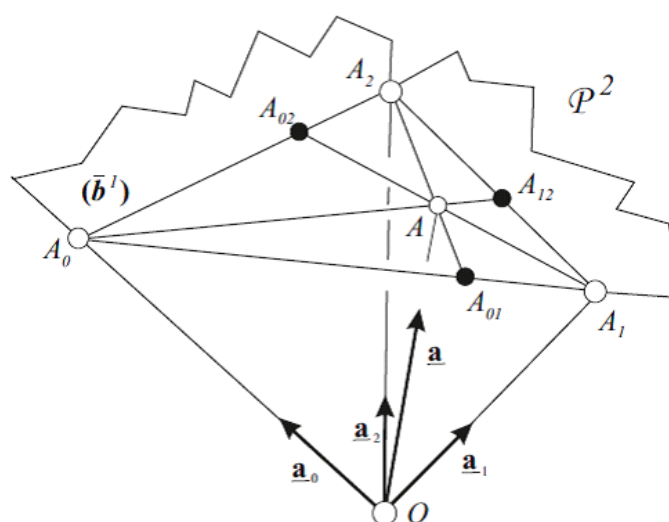


Fig. 7b. The triangle coordinate system $A_0A_1A_2A \sim b^0b^1b^2b$ for points and lines.

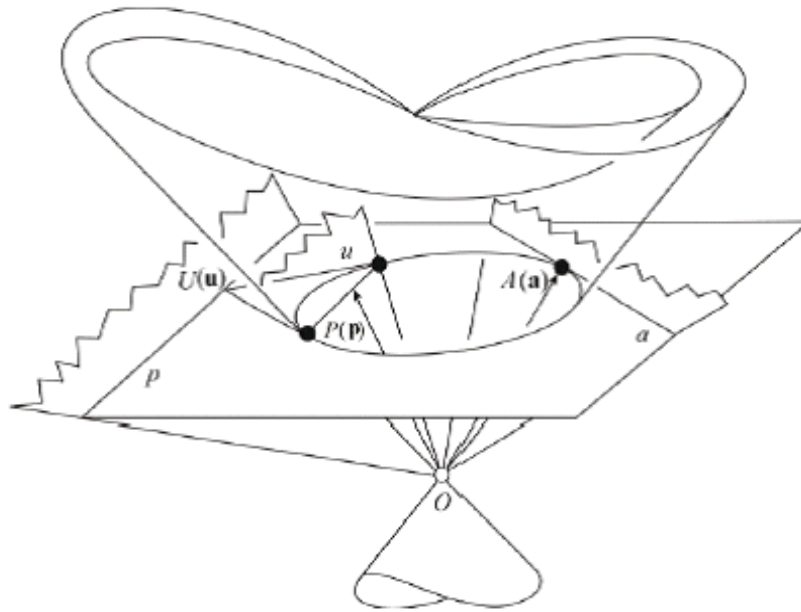


Fig. 7c. Figure shows the Beltrami-Cayley-Klein (B-C-K) model of Bolyai-Lobachevsky hyperbolic ($\mathbf{H}^2$) plane with its absolute conic and asymptote cone with the two sheets hyperboloid in the embedding 3-space $\mathbf{A}^3(O, \mathbf{V}^3, \mathbf{V}_3)$, given by the linear symmetric *absolute* polar line (u) $\rightarrow$ pole point (U) *polarity* ($\heartsuit$): $\mathbf{V}_3 \rightarrow \mathbf{V}^3$, $u(\mathbf{u}) \rightarrow U(\mathbf{u}\heartsuit) = U(\mathbf{u})$ or symmetric bilinear scalar product $\langle \mathbf{u} = \mathbf{b}^i u_i, \mathbf{v} = \mathbf{b}^j v_j \rangle = u_i \pi^{ij} v_j$, $\pi^{ij} = \pi^{ji}$.

In Fig. 7c we can see the projective metric Beltrami-Cayley-Klein (B-C-K) model of the Bolyai-Lobachevsky hyperbolic ($\mathbf{H}^2$) plane defined by a polar line (u) $\rightarrow$ pole point (U) *polarity* ($\heartsuit$): $\mathbf{V}_3 \rightarrow \mathbf{V}^3$, $u(\mathbf{u}) \rightarrow U(\mathbf{u}\heartsuit) = U(\mathbf{u})$ and its quadratic conic of signature $(-, +, +)$. This is equivalently given by a symmetric bilinear scalar product (either by $(\cdot)$ or more emphasizing now by)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \rightarrow \mathbf{R}, \langle \mathbf{u} = \mathbf{b}^i u_i, \mathbf{v} = \mathbf{b}^j v_j \rangle := (\mathbf{v}\heartsuit\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\heartsuit\mathbf{v}) = u_i \pi^{ij} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}^k) v_k = u_i \pi^{ij} \delta_j^k v_k = u_i \pi^{ij} v_j \text{ with symmetry } \pi^{ij} = \pi^{ji}.$$

In the usual Euclidean (B-C-K) model, where the hyperbolic polarity is invertible, $(\heartsuit)^{-1} := (\spadesuit): \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}_3$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^\spadesuit = \mathbf{x}$. Distance (d) and angle (a) metric can be defined by the scalar product:

$$\text{ch}[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})/k] = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle},$$

$$\cos[a(\mathbf{u}, \mathbf{v})] = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle},$$

and this can be extended to complex distance and angle, as usual by complex exponential, ch and $\cos$ functions.

$$0 = -x^0 x^0 + x^1 x^1 + x^2 x^2 \text{ and } 0 = -u_0 u_0 + u_1 u_1 + u_2 u_2$$

describe the points and the lines of absolute conic, respectively, as a unit circle and its touching lines in homogeneous coordinates. The elliptic (spherical $\mathbf{S}^2$) plane is characterized by signature $(+, +, +)$, the Euclidean ($\mathbf{E}^2$) plane by $(0, +, +)$. The Minkowski ($\mathbf{M}^2$) plane by $(0, +, -)$, the Galilei ($\mathbf{G}^2$ or isotropic) plane by $(0, 0, +)$ are no more detailed (but important).

A typical projective (linear) mapping is the central axial collineation with centre $C(\mathbf{c})$, axis $a(\mathbf{a})$ and parameter p for points $X(\mathbf{x})$ and lines $u(\mathbf{u})$, respectively:

$$\sigma_a^C: \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3, X(\mathbf{x}) \rightarrow Y(\mathbf{y}), \mathbf{y} = \mathbf{x} - p(\mathbf{x}\mathbf{a})\mathbf{c};$$

$$\mathbf{V}_3 \rightarrow \mathbf{V}_3, u(\mathbf{u}) \rightarrow v(\mathbf{v}), \mathbf{v} = \mathbf{u} - a(cu),$$

where $p = 1/[(\mathbf{c}\mathbf{a}) - 1]$. (4.1)

This will be an involutive (involutory) reflection σ_a^A for polar axis line $a(\mathbf{a})$ and pole centre point $A(\mathbf{a})$ as follows

$$\sigma_a^A: \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3, X(\mathbf{x}) \rightarrow Y(\mathbf{y}), \mathbf{y} = \mathbf{x} - [2(\mathbf{x}\mathbf{a})/(\mathbf{a}\mathbf{a})]\mathbf{a};$$

$$\mathbf{V}_3 \rightarrow \mathbf{V}_3, u(\mathbf{u}) \rightarrow v(\mathbf{v}), \mathbf{v} = \mathbf{u} - a[(\mathbf{a}\mathbf{u})^2/(\mathbf{a}\mathbf{a})], \text{ if } (\mathbf{a}\mathbf{a}) \neq 0. \quad (4.2)$$

Thus we can define general projective (linear) mappings as products of central axial collineations (as inverse pairs, acting on vectors from right, then on forms from left). Congruent transforms of projective metric planes will be the products of (say) line reflections.

Then we can use also the *reflection geometry* [1] of F. Bachmann (see e.g. [8] Molnár 1978 and [13] Weiss (2018), as indicated later on.

4.2 Projective geometric (Grassmann-Clifford) algebra

On the history of Projective geometric algebra see the next Fig. 8 below from the paper [3] of Jaroslav Hrdina (2024) presented in the previous Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics (I am sorry for not participating there).



Fig. 8. Julius Plücker, Herman Günther Grassmann, Sir William Rowan Hamilton, William Kingdon Clifford (photo: Wikimedia Commons)

The Grassmann-Clifford type geometric algebra [12] will be defined now in the most elementary form in analogy of introducing alternating bilinear cross product of classical Euclidean space geometry: point $\times$ point = their-connecting-line and line $\times$ line = their-intersection-point. Of course, these will be by the above projective metric 3-vector-form calculus or rather 3-form-vector calculus for projective metric plane geometry, i.e. for $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{H}^2$ mostly, but also for $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{G}^2$ with degenerate polarities, not detailed more.

Let the multilinear usual alternating determinant function be defined and normed on a dual basis pair

$$\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}^j\} \ (i, j = 0, 1, 2) \text{ as } \det(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 = \det(\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$$

$$X(\mathbf{x}) \times Y(\mathbf{y}) = u(\mathbf{u}) \text{ by } (z\mathbf{u}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0,$$

$\mathbf{u}$ is the linear form (directed line of $P(S^2)$ on the variable point $Z(\mathbf{z})$.

$$u(\mathbf{u}) \times v(\mathbf{v}) = X(\mathbf{x}) \text{ by } (\mathbf{x}\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \mathbf{x} \text{ is the vector (its class in } P(S^2))$$

on the variable (directed) line $w(\mathbf{w})$. (4.3)

We can check some important identities and their duals (as well known for usual cross product) as stated in the following theorem.

Theorem 4

1a The following (dual) identities are valid:

$$\mathbf{p} =: (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{y}\mathbf{u})\mathbf{x} - (\mathbf{x}\mathbf{u})\mathbf{y},$$

$$\mathbf{s} =: (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}\mathbf{u}). \quad (4.4)$$

1b The linear form $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ takes on the vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ the real number

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \det \begin{vmatrix} (\mathbf{x}\mathbf{u}) & (\mathbf{x}\mathbf{v}) \\ (\mathbf{y}\mathbf{u}) & (\mathbf{y}\mathbf{v}) \end{vmatrix} = (\mathbf{x}\mathbf{u})(\mathbf{y}\mathbf{v}) - (\mathbf{x}\mathbf{v})(\mathbf{y}\mathbf{u}). \quad (4.5)$$

1c The linear form $\mathbf{u} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ takes the real value $\det(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ on the vector $\mathbf{z}$.

1d The pole of $\mathbf{u} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ is $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\heartsuit = \mathbf{x}^\spadesuit \times \mathbf{y}^\spadesuit$, if $(\spadesuit)$, the inverse polarity of $(\heartsuit)$ exists (S^2, H^2) . Then the scalar product, distance and angle can also be extended. $\square$

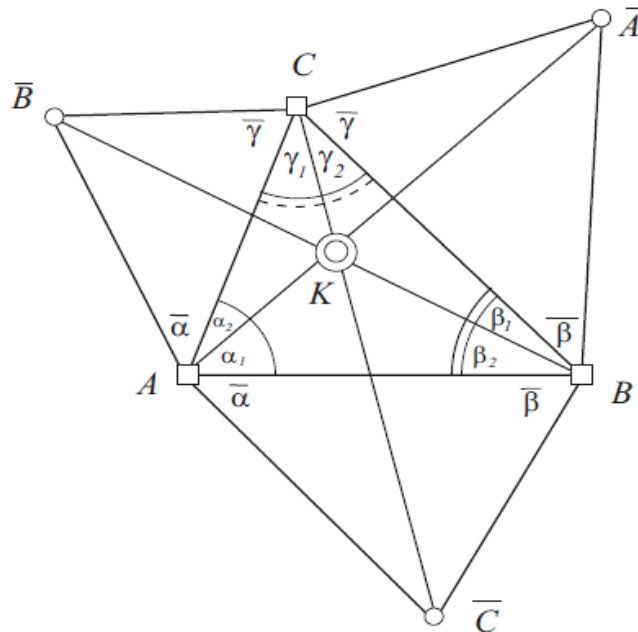


Fig. 9. This modified version of Fig. 6. for Kármán point configuration, describes now coordinate triangles, defined by the following sides
 $a = BC$ (i.e. $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$), $b = CA$ (i.e. $\mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$), etc.

The scalar product (by symmetric Coxeter-Schläfli, i.e. (C-Sch)) matrix

$$\begin{pmatrix} (aa) & (ab) & (ac) \\ (ba) & (bb) & (bc) \\ (ca) & (cb) & (cc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix} = (\pi^{ij}) = (\pi^{ji}) \quad (4.6)$$

will determine the whole configuration by the angles of triangle ABC , so this will be the base of our computations in Section 5. We shall concentrate only on spherical, hyperbolic and Euclidean geometries in a condensed form, exploiting the logical symmetries.

At vertex A we find lines $AC = b$, $AB = c$ with angle α ($\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\cos \alpha$), then $A\bar{B} = \mathbf{b} + \mathbf{c}\alpha_b$, $A\bar{C} = \mathbf{c} + \mathbf{b}\alpha_c$ as line forms (in V_3)

$$\text{with } 0 < \alpha_b, \alpha_c \leq 1/\cos \alpha. \quad (4.7)$$

As e.g. parameter α_b and the (acute) angle $\angle CAB = \bar{\alpha}_b$ determine (not easily) each other

$$\begin{aligned} \cos \bar{\alpha}_b &= \frac{1 - \alpha_b \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha_b \cos \alpha + \alpha_b^2}}, \text{ i. e.} \\ \alpha_b &= \frac{\sin \bar{\alpha}_b}{\sin(\alpha + \bar{\alpha}_b)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

(not easily). Similarly, we obtain 6 parameters $\alpha_b, \alpha_c; \beta_c, \beta_a; \gamma_a, \gamma_b$ at vertices A, B, C .

5 Kártesi point by projective geometric algebra

We continue the previous section to Fig. 8. in obvious manner.

Start with $A\bar{B} \sim \mathbf{b} + \mathbf{c}\alpha_b$ and $C\bar{B} \sim \mathbf{b} + \mathbf{a}\gamma_b$. Then $\bar{B} \sim \gamma_b(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \alpha_b(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) + \alpha_b\gamma_b(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, where $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \sim \mathbf{C}$, $(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \sim \mathbf{A}$, $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \sim -\mathbf{B}$ can be introduced by projective geometric algebra (PGA). Then

$$B\bar{B} \sim \mathbf{B} \times \bar{B} \sim (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\gamma_b + (\mathbf{B} \times \mathbf{A})\alpha_b \sim \mathbf{a}\gamma_b - \mathbf{c}\alpha_b \quad (5.1)$$

by former theorems 4 of PGA.

By logical symmetry we obtain the analogous expressions

$$A\bar{A} \sim \mathbf{c}\beta_a - \mathbf{b}\gamma_a \quad \text{and} \quad C\bar{C} \sim \mathbf{b}\alpha_c - \mathbf{a}\beta_c \quad (5.2)$$

For the Kártesi point K we obtain the condition $K \sim A\bar{A} \times B\bar{B} \sim A\bar{A} \times C\bar{C}$, i.e. as above, by projective freedom

$$K \sim \gamma_a\alpha_b\mathbf{A} + \beta_a\gamma_b\mathbf{B} + \gamma_a\gamma_b\mathbf{C} \sim \beta_a\alpha_c\mathbf{A} + \beta_a\beta_c\mathbf{B} + \gamma_a\beta_c\mathbf{C} \quad (5.3)$$

as a result to discuss easily on the base of geometric parameters

$$\alpha_b, \alpha_c; \beta_c, \beta_a; \gamma_a, \gamma_b$$

comparing with the former cases.

We do not consider zero (0) and infinity (∞) parameters (not interesting and easy cases), so the simplest condition is

$$\alpha_b\beta_c\gamma_a = \alpha_c\beta_a\gamma_b. \quad (5.4)$$

$\alpha_b = \alpha_c, \beta_c = \beta_a, \gamma_a = \gamma_b$ was our most interesting case before, treated previously by three reflections theorem, [9]. But we have obtained the most general criterion in the following theorem.

Theorem 5. For the existence of Kárteszi point it holds the criterion (if and only if; now $*$ means the multiplication point):

$$\begin{aligned} \alpha_b \beta_c \gamma_a &= \alpha_c \beta_a \gamma_b, \text{ or equivalently – as we expressed in Section 4 by Fig. 9 –} \\ \sin \bar{\alpha}_b / \sin(\alpha + \bar{\alpha}_b) * \sin \bar{\beta}_c / \sin(\beta + \bar{\beta}_c) * \sin \bar{\gamma}_a / \sin(\gamma + \bar{\gamma}_a) &= \\ = \sin \bar{\alpha}_c / \sin(\alpha + \bar{\alpha}_c) * \sin \bar{\beta}_a / \sin(\beta + \bar{\beta}_a) * \sin \bar{\gamma}_b / \sin(\gamma + \bar{\gamma}_b). \square \end{aligned} \quad (5.5)$$

Now we have many other cases to select for further considerations, sometimes with complicated computations (e.g. by (5.5)!

First from (5.4) (so from (5.5)) $\gamma_b = \alpha_b \beta_c \gamma_a / \alpha_c \beta_a$ substituting into (5.3), we get (by projective proportionality)

$$K \sim \alpha_c \beta_a \mathbf{A} + \beta_a \beta_c \mathbf{B} + \gamma_a \beta_c \mathbf{C} \quad (5.6)$$

and analogue expressions.

We indicate only the discussion of scalar product (4.6), first the determinant

$$\begin{aligned} \Pi = \det(\pi^{ij}) &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ &= 1 - \frac{1}{2}[(1 + \cos(2\alpha)) + (1 + \cos(2\beta)) + (1 + \cos(2\gamma))] - \cos \gamma [\cos(\alpha - \beta) + \\ &+ \cos(\alpha + \beta)] = - [\cos \gamma + \cos(\alpha - \beta)][\cos \gamma + \cos(\alpha + \beta)] = \\ &= -4 \cos[\frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma)] \cos[\frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)] \cos[\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)] * \cos[\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)], \end{aligned} \quad (5.7)$$

whose sign decides the signature of the scalar product: $\alpha + \beta + \gamma >, =, < \pi$ leads to spherical (signature (+++)), Euclidean (++0) and hyperbolic (++–) geometry, respectively.

Then the distance metric can be determined (not easily), and further problems can be solved. But these we leave to another paper to the 120th Anniversary of Ferenc Kárteszi's Birthday.

6 Epilogue

Professor Ferenc Kárteszi was a charismatic personality of the Hungarian mathematics education and science (descriptive, projective and finite geometries, see only [2] and [5]). He made presentation trips also in Slovakia (Vojtech (Béla) Bálint was his translator). As told always, his engineer brother helped him a lot, then the Secondary School Journal of Mathematics (Középiskolai Matematikai Lapok), founded in 1894 by Dániel Arany, a teacher in Győr. He won doctor degree then received an Italian stipendium and worked under supervision of Beppo Levi and Beniamino Segre. He taught 10 years in the (Scientific Lyceum or) Real Gymnasium in Győr. This was my Gymnasium later as well, where my father Ernő Molnár taught, too [11]. The Reader finds more biographic details in [6] and [11], and the author has many-many personal rememberings as well.

Acknowledgements

The author thanks his colleague Dr. Jenő SZIRMAI for his essential help in the presentation and the publication. Special thanks are due to the organizer colleagues!!!

References

- [1] BACHMANN, F. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer Berlin – Göttingen – Heidelberg 1959, 1973.
- [2] BOLYAI, J. *Appendix, the theory of space*. with introduction, comments, and addenda by F. Kárteszi, North Holland Math. Studies, vol. 138, Akadémiai Kiadó, 1987.
- [3] HRDINA, J. *Very short introduction to Projective Geometric Algebra*. Proceedings of the 10th Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics, Eds: M. Bizzarri and M. Lavička, Plzeň, Czechia, 2024, pp. 11-20.
- [4] KÁLMÁN, A. *Elements of Non-Euclidean Geometries*. (Nemeuklideszi geometriák elemei, in Hungarian). Nemzeti Tankönyvkiadó 1989, 2002.
- [5] KÁRTESZI, F. *Introduction to Finite Geometries*. Disquisitiones Mathematicae Hungaricae 7, Budapest 1976, Feltrinelli 1978 (in Italian). Nauka 1980 (in Russian), North-Holland 2014 (in English).
- [6] KORCHMÁROS, G, SZÖNYI, T. *Ferenc Kárteszi (1907-1989): A short biography*. Contributions to Discrete Mathematics, Volume 3, Number 1, pp. 3–5.
- [7] MOLNÁR, E. (Ed). *Elementary Mathematics II*. Eötvös Loránd University Budapest, 1967 (in Hungarian).
- [8] MOLNÁR, E. *Kegelschnitte auf der metrischen Ebene*. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 31, 1978, 317-343.
- [9] MOLNÁR, E. *On Kárteszi points of a triangle, via three reflections theorem and geometric algebra*. EFFECTIVE TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS THROUGH BRIDGING THEORY AND PRACTICE, ELEMENT ZAGREB, Osijek 2024, pp. 244-257, Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Education, School of Applied Mathematics and Informatics, Eds: Zdenka Kolar-Begović, Ružica Kolar-Šuper, Ana Katalenić, 9th International Scientific Colloquium Mathematics and Children, founded by Margita Pavleković.
- [10] MOLNÁR, E. *The Kárteszi points of a triangle, via three reflections theorem and geometric algebra To memory of my professor and doctor father, Ferenc Kárteszi (1907-1989)*. Proceedings of the 9th Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics, pp. 145-146, Eds. M. Lávička, D. Szarková, D. Velichová, Kremnica, 2023.
- [11] MOLNÁR E., MOLNÁR Ernő. *Dr. Kárteszi Ferenc (1907-)* (in Hungarian). István Federmayer (szerk.): Révai Miklós Gimnázium, Győr (Hungary): 200. Jubileumi emlékkönyv (1988), pp. 103-104.
- [12] PERWASS, C. B. U., HILDENBRAND, D. *Aspects of Geometric Algebra in Euclidean, Projective and Conformal Space*. An Introductory Tutorial, 2004.
- [13] WEISS, G. *The Three Reflections Theorem Revisited*. KoG 22, 2018, 41-48.
- [14] YAGLOM, I. M. *Geometric Transformations II*. 21. Random House 1968 (translated from Russian by Alice Shields).

Emil Molnár

Department of Algebra and Geometry
Faculty of Natural Sciences
Budapest University of Technology and Economics
H - 1521 Budapes XI. Egry J. str. 1. H. 22., Hungary
e-mail: emolnar@math.bme.hu

Gnómonická azimutálna projekcia na ciferníku slnečných hodín

Margita Vajsáblová, Juliana Beganová

Abstrakt

Na slnečné hodiny sa môžeme pozeráť z pohľadu histórie, filozofie, astronómie, umenia, ale aj matematiky a geometrie. Ciferníky slnečných hodín obsahujú obrazy poludníkov a rovnobežiek guľovej plochy v gnómonickej azimutálnej projekcii. Cieľom príspevku je ukázať tieto súvislosti, formulovať konštrukcie čiar ciferníkov viacerých typov slnečných hodín pomocou gnómonickej azimutálnej projekcie, kde hlavný prínos príspevku je vo formulácii vzťahov pre určenie jej parametrov v súvislosti so zemepisnou polohou roviny ciferníka, jej orientáciou a dĺžkou gnómonu slnečných hodín. Uvedené vzťahy sú aplikované pri vykreslení ciferníkov rôznych slnečných hodín v softvéri Wolfram Mathematica.

Kľúčové slová: slnečné hodiny, deklinácia Slnka, gnómonická projekcia, gnómon

Abstract

We can look at sundials from the perspective of history, philosophy, astronomy, art, but also mathematics and geometry. Sundial dials contain images of the meridians and parallels of a spherical surface in a gnomonic azimuthal projection. The aim of the paper is to show these connections, to formulate the constructions of the dial lines of several types of sundials using gnomonic azimuthal projection. The main contribution of this paper is in the creation of formulas for determining its parameters in relation to the geographical location of the dial plane, its orientation and the length of gnomon of sundial. In Wolfram Mathematica software, we applied these derived formulas in the rendering of the dials of various sundials.

Keywords: sundial, solar declination, gnomonic projection, gnomon

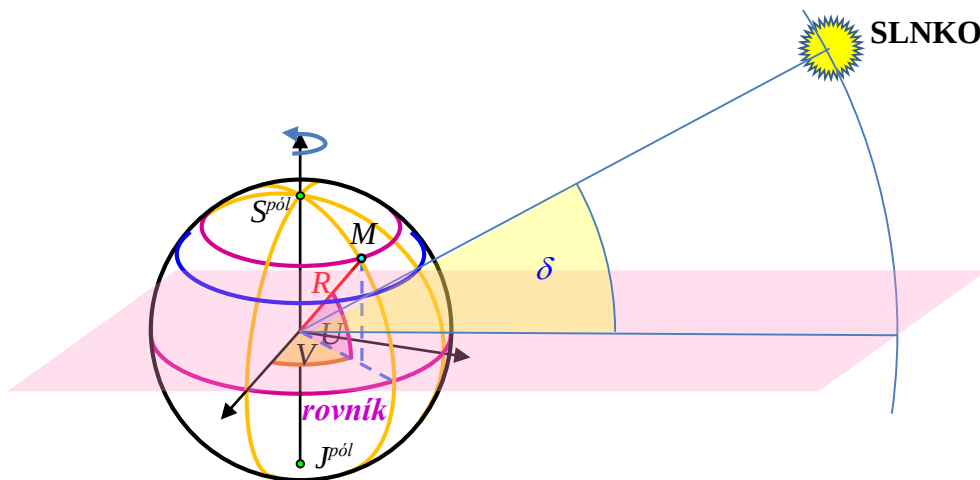
1 Čo potrebujeme vedieť o vzťahu Zeme a Slnka

„Neukazujem hodiny, ale jasné nebo.“ Tento výrok, ktorý sa nachádza na slnečných hodinách (z roku 1770) na kostole sv. Štefana v Rajci, vystihuje filozofiu merania času pomocou Slnka. Na rovinných ciferníkoch slnečných hodín sa znázorňujú hodinové a dátumové čiary, ktoré sú obrazmi rovnobežiek a poludníkov guľovej plochy v gnómonickej projekcii do roviny (azimutálna).

Inštalácia slnečných hodín je závislá od zemepisných súradníc ich lokality. S ohľadom na slnečné hodiny budeme používať referenčnú sféru Zeme, ktorá má konštantný polomer krivosti R . Polohu bodu M (Obr. 1) na referenčnej sfére vyjadrujeme zemepisnými súradnicami U a V :
- sférická šírka U : $U \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, zemská rovnobežka má konštantnú sférickú šírku U ,
- sférická dĺžka V : $V \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$, zemský poludník má konštantnú sférickú dĺžku V .

Jedným z faktorov určujúcich polohu Slnka ku Zemi je solárna deklinácia δ (Obr. 1) definovaná ako uhol spojnice ich stredov od roviny rovníka, ktorá je na sever kladná a na juh záporná [7]. Solárna deklinácia je počas dňa približne rovnaká a jej hodnoty sa počas roka pohybujú medzi

$\pm 23^{\circ}26'22''$, čo sú sférické šírky Obratníka Raka a Obratníka Kozorožca. Zem vykoná rotáciu okolo svojej osi za 24 hodín, teda hodinový uhol je 15° ($360^{\circ}/24$ hodín).



Obr. 1. Vzájomná poloha Slnka a Zeme

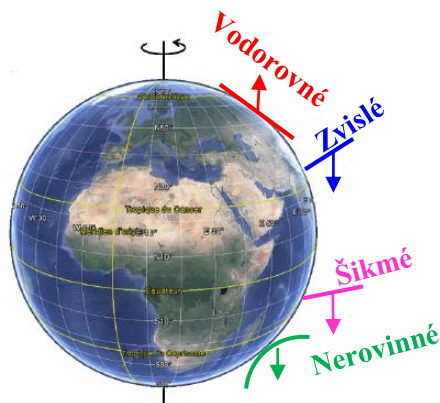
Klasifikácia slnečných hodín [1] (Obr. 2):

a) Rovinné slnečné hodiny:

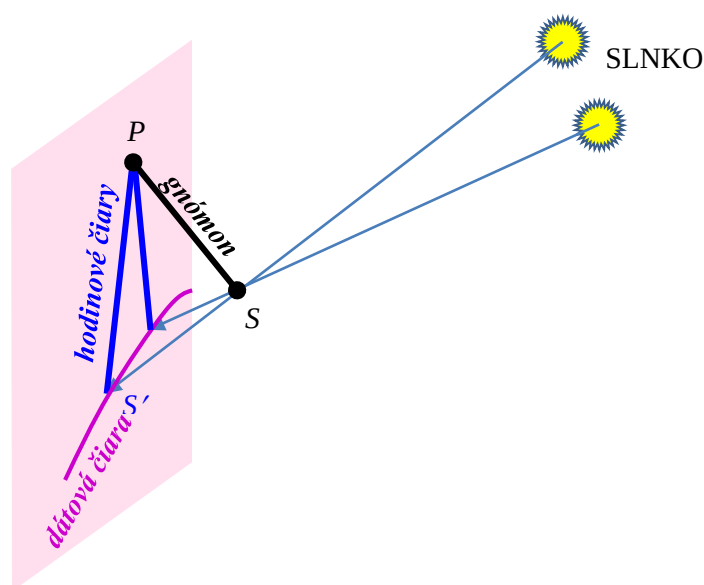
- Horizontálne (vodorovné) slnečné hodiny majú rovinu ciferníka rovnobežnú s dotykovou rovinou referenčnej sféry Zeme.
- Vertikálne (zvislé) slnečné hodiny majú ciferník v normálovej rovine referenčnej sféry Zeme, poznáme:
 - južné slnečné hodiny,
 - západné slnečné hodiny,
 - východné slnečné hodiny,
 - meridiánové slnečné hodiny,
 - všeobecné vertikálne slnečné hodiny definované azimutom A .
- Šikmé slnečné hodiny majú rovinu ciferníka naklonenú k dotykovej aj k normálovej rovine referenčnej sféry Zeme, poznáme :
 - polárne slnečné hodiny,
 - rovníkové slnečné hodiny,
 - všeobecné naklonené slnečné hodiny.

b) Nerovinné slnečné hodiny – ciferník nie je rovinný (sféra, valec, kužeľ a pod.).

Ciferník rovinných slnečných hodín je rovina π (Obr. 3). Gnómon (ukazovateľ) má základný tvar úsečky, ktorú označíme PS , kde P je bod na ciferníku, S je koncový bod gnómonu. Aby slnečné hodiny ukazovali správny čas počas celého roku, gnómon musí byť rovnobežný s osou rotácie Zeme. Tieň PS' gnómonu na ciferníku je priamka, ktorá je znázorňovaná každú hodinu dňa a nazýva sa hodinová čiara. Tieň koncového bodu S gnómonu v daný deň opisuje dátumovú (dátovú) čiaru, nazývanú tiež deklinačná čiara, nakoľko prislúcha solárnej deklinácii δ . Dátumové čiary sa obvykle znázorňujú pre dôležité dni kalendára, ako letný a zimný slnovrat, dni rovnodennosti, príp. dni, kedy Slnko vchádza do jednotlivých znamení zvieratníka [5].



Obr. 2. Základná typológia slnečných hodín



Obr. 3. Schéma slnečných hodín

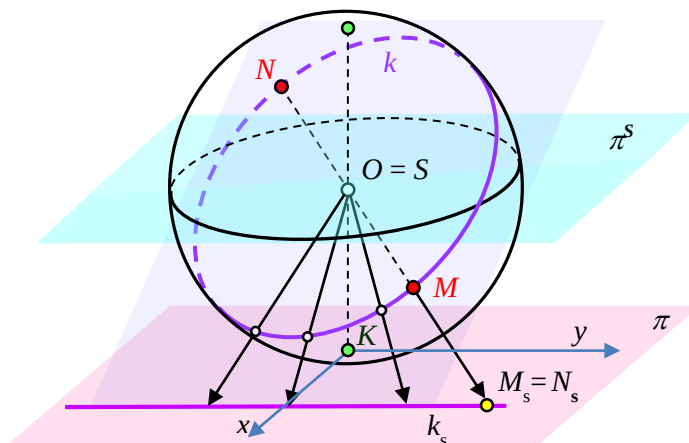
2 Gnómonická azimutálna projekcia

Autorom gnómonickej azimutálnej projekcie je grécky astronóm, matematik a filozof Táles z Milétu, ktorý ju použil na zostrojenie mapy hviezdnej oblohy v 6. stor. pr. Kr., pričom v tom čase tvar Zeme považoval za plochý.

Definícia. Gnómonická azimutálna projekcia je stredové premietanie guľovej plochy Γ do roviny, pričom stred premietania S je totožný so stredom referenčnej sféry Γ .

V gnómonickej azimutálnej projekcii platia nasledujúce vlastnosti (Obr. 4):

- Veta 1.** Gnómonické obrazy dvoch krajných bodov priemeru guľovej plochy Γ sú totožné.
- Veta 2.** Gnómonickým obrazom všetkých hlavných kružníc (ich stred je stred guľovej plochy) guľovej plochy Γ sú priamky.
- Veta 3.** Gnómonickým obrazom rovnobežkových kružníc guľovej plochy Γ sú kužeľosečky, teda elipsa, parabola alebo hyperbola.



Obr. 4. Gnómonická azimutálna projekcia

Z uvedených vlastností vyplývajú ďalšie:

Dôsledok 1. Gnómonickým obrazom všetkých poludníkov, rovníka a ortodrom guľovej plochy Γ sú priamky.

Dôsledok 2. Gnómonické obrazy zemepisných pólů sú totožné, vlastný alebo nevlastný bod.

Dôsledok 3. Gnómonické obrazy poludníkov sú priamky prechádzajúce obrazom pólů:

- Ak sa póly zobrazujú do jedného vlastného bodu, potom poludníky sa zobrazujú ako zväzok priamok.
- Ak sa póly zobrazujú do jedného nevlastného bodu, potom poludníky sa zobrazujú ako priamky s ním rovnobežné (osnova priamok).

Gnómonická projekcia podľa polohy priemetne:

- Pólová (normálna) poloha – priemetňa je kolmá na zemskú os.
- Rovníková (transverzálna) poloha – priemetňa je kolmá na rovinu rovníka.
- Všeobecná poloha – priemetňa nie je kolmá na zemskú os, ani na rovinu rovníka.

Nech priemetňa π sa dotýka referenčnej sféry v bode K nazývanom kartografický pól, ktorý je zároveň začiatkom súradnicovej sústavy v rovine. Nech sférické súradnice kartografického pólu K sú U_K, V_K a polomer referenčnej sféry je R , potom zobrazovacie rovnice gnómonickej azimutálnej projekcie sú [4]:

$$x = \frac{R \sin U \cos U_K - \cos U \sin U_K \cos(V - V_K)}{\sin U \sin U_K + \cos U \cos U_K \cos(V - V_K)},$$

$$y = \frac{R \cos U \sin(V - V_K)}{\sin U \sin U_K + \cos U \cos U_K \cos(V - V_K)}.$$

(1)

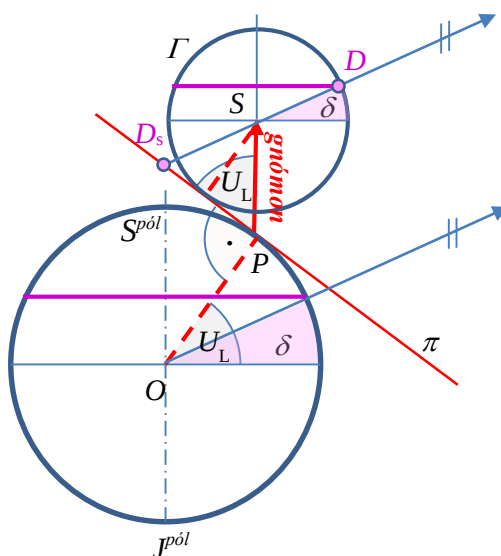
3 Gnómonická azimutálna projekcia na slnečných hodinách

Použitie gnómonickej projekcie pri tvorbe ciferníka rovinných slnečných hodín je spomínané vo viacerých zdrojoch, avšak bez vysvetlenia geometrickej podstaty ako a prečo. V tejto kapitole ukážeme vlastnú ilustráciu, či vysvetlenie tohto princípu, odvodenie parametrov gnómonickej projekcie a aplikáciu týchto výsledkov na viacerých typoch slnečných hodín.

3.1 Princíp použitia gnómonickej azimutálnej projekcie na slnečných hodinách

Vytvorenie nášho vlastného vysvetlenia vzťahu medzi čiarami na ciferníku slnečných hodín a gnómonickým premietaním guľovej plochy vyplýva z fungovania rovinných slnečných hodín na princípe vrhnutého tieňa gnómonu a jeho koncového bodu počas dňa do roviny ciferníka. Uvedený vzťah ilustrujeme na obr. 5. V kapitole 1 sme spomenuli, že poloha slnečných hodín a uhla gnómonu s rovinou ciferníka závisí od zemepisných súradníc U_L a V_L lokality ich inštalácie. Keďže gnómon PS musí byť rovnobežný s osou rotácie Zeme a čiary na ciferníku sú obrazom rovnobežiek a poludníkov v gnómonickej projekcii guľovej plochy do roviny, potrebujeme definovať polohu a veľkosť tejto guľovej plochy Γ .

Nech solárna deklinácia je δ , teda slnečné lúče prechádzajúce koncovým bodom S gnómonu počas tohto dňa majú sklon δ k rovine rovníka a tieň bodu S opisuje dátumovú čiaru. Z uvedeného dedukujeme, že S je stred guľovej plochy Γ , ktorá sa dotýka roviny π ciferníka. Na tejto guľovej ploche Γ zavedieme os rotácie prechádzajúcu gnómonom, a teda rovnobežnú s osou rotácie Zeme, a tiež z toho vyplývajúcu sieť rovnobežiek a poludníkov (Obr. 5). Bod D_s je tieň bodu S , a tiež gnómonický priemet bodu D , ktorý leží na rovnobežkovej kružnici guľovej plochy Γ , ktorej sférická šírka je solárna deklinácia δ , teda jej obraz je dátumová čiara.



Obr. 5. Princíp použitia gnómonickej projekcie na slnečných hodinách

Gnómon leží na osi rotácie guľovej plochy Γ , potom tieň gnómonu v danú hodinu, a teda hodinová čiara je priamka, ktorá je obrazom poludníka guľovej plochy Γ . Obraz lokálneho poludníka, ktorého sférická dĺžka sa rovná lokálnej V_L , ukazuje poludnie, teda 12 hodín.

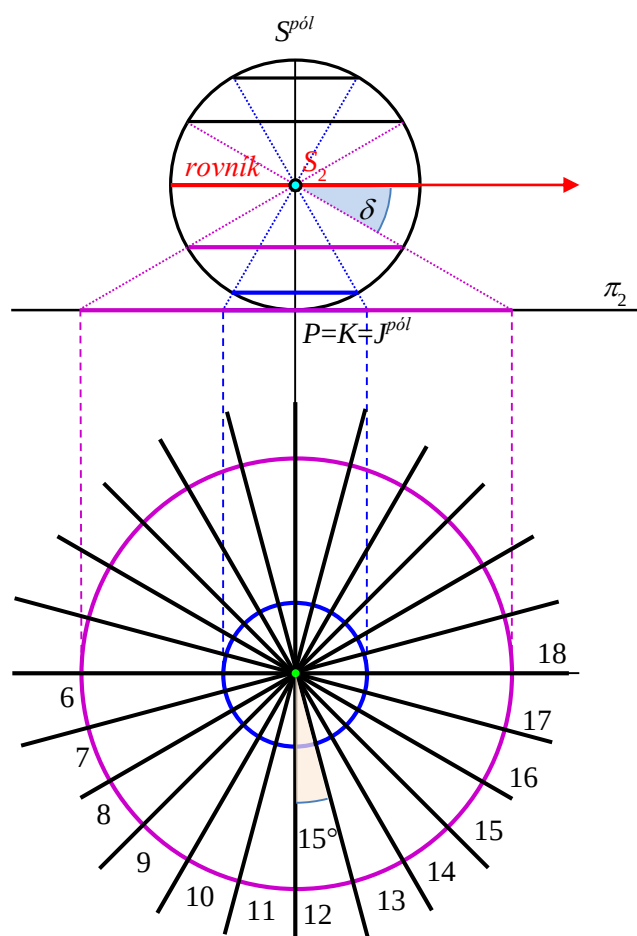
Obraz rovníka tejto guľovej plochy Γ je priamka, na ktorú dopadá tieň gnómonu počas dní rovnodennosti, kedy je Slnko v rovine zemského rovníka a solárna deklinácia $\delta = 0^\circ$.

Gul'ová plocha Γ a rovina π ciferníka môžu mať rôznu vzájomnú polohu, a to podľa typu slnečných hodín. Tým je určený aj typ použitej gnómonickej azimutálnej projekcie. Na rovníkových slnečných hodinách je použitá gnómonická projekcia v pólovej polohe, na polárnych slnečných hodinách sa používa gnómonická projekcia v rovníkovej polohe a na horizontálnych a vertikálnych je gnómonická projekcia vo všeobecnej polohe.

3.2 Gnómonická azimutálna projekcia v pólovej polohe na rovníkových slnečných hodinách

Rovníkové (ekvatoriálne) slnečné hodiny sú špeciálny typ šikmých slnečných hodín. Rovina ciferníka rovníkových hodín leží v rovine rovnobežnej s rovinou zemského rovníka (tiež rovnobežiek), a teda gnómon je kolmý na rovinu ciferníka. Gnómon zvierá s vodorovnou rovinou uhol totožný s lokálnou sférickou šírkou U_L .

Na obr. 6 je geometrický princíp obrazu poludníkov a rovnobežiek v gnómonickej projekcii v pólovej polohe. Priemetňa π sa dotýka gul'ovej plochy Γ v bode K , ktorý je jej pól (tiež pätá P gnómonu, teda $P = K = J^{pól}$), teda jeho sférické súradnice sú $U_K = \pm 90^\circ$, $V_K = V_L$. Hodinové čiary sú obrazmi poludníkov a tvoria zväzok polpriamok vychádzajúcich z päty P gnómonu (obraz pólu) a zvierajú navzájom násobky hodinového uhla 15° . Dátumové čiary sú sústredné kružnice so stredom v bode P a sú obrazmi rovnobežkových kružníc so sférickou šírkou, ktorá sa rovná solárnej deklinácii δ .



Obr. 6. Obraz zemepisnej siete v gnómonickej projekcii v pólovej polohe

Obraz rovníka je nevlastná priamka, a preto v dni rovnodennosti rovníkové slnečné hodiny čas neukazujú. Rovníkové slnečné hodiny majú 2 ciferníky na vrhnej a spodnej časti disku, a to pre časť roka, kedy Slnko je nad rovníkovou a pod rovníkovou rovinou. Toto vidíme tiež na obr. 7, kde sú ukážky rovníkových slnečných hodín. Vľavo sú rovníkové hodiny nachádzajúce sa v Zakázanom meste v Pekingu. Vpravo sú rovníkové hodiny autorky Wendy Taylor z roku 1973, ktoré sa nachádzajú pri Tower Bridge v Londýne.

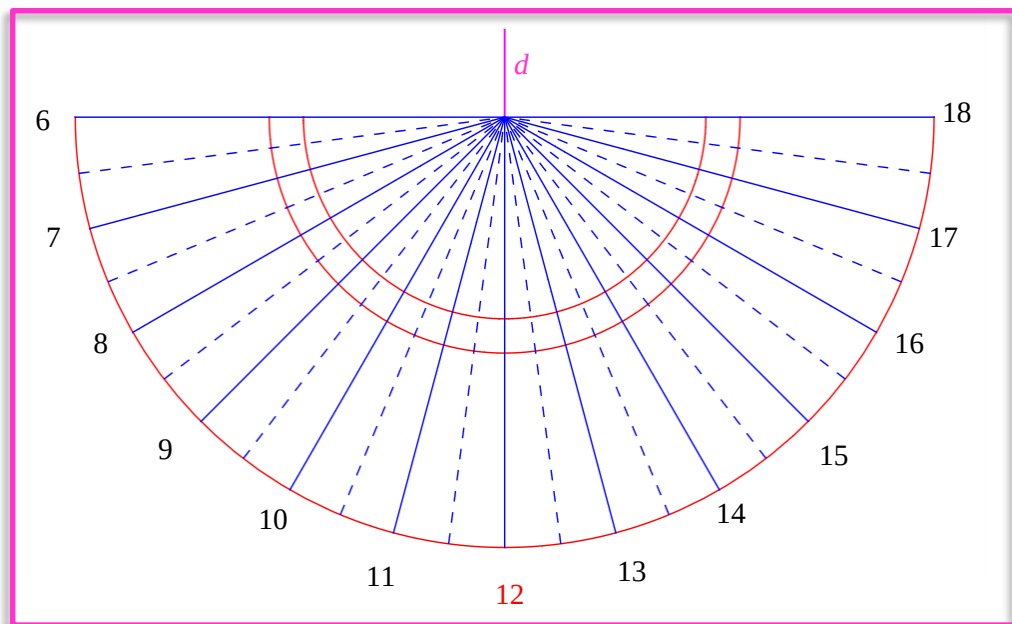
Na obr. 8 je návrh čiar ciferníka (hodinové, polhodinové a dátumové čiary) rovníkových slnečných hodín pre mesto Bratislava ($U_L = 48^\circ 8' 53,38''$, $V_L = 17^\circ 6' 24,26''$), ktoré sme vykreslili v softvérovom prostredí Wolfram Mathematica pomocou zobrazovacích rovníc (1) gnómonickej azimutálnej projekcie s použitím nasledujúcich parametrov:

$$U_K = -90^\circ, V_K = V_L = 17^\circ 6' 24,26'',$$

$$R = d, d \text{ je dĺžka gnómonu (zobrazená v mierke obrázka).}$$



Obr. 7. Ukážky rovníkových slnečných hodín

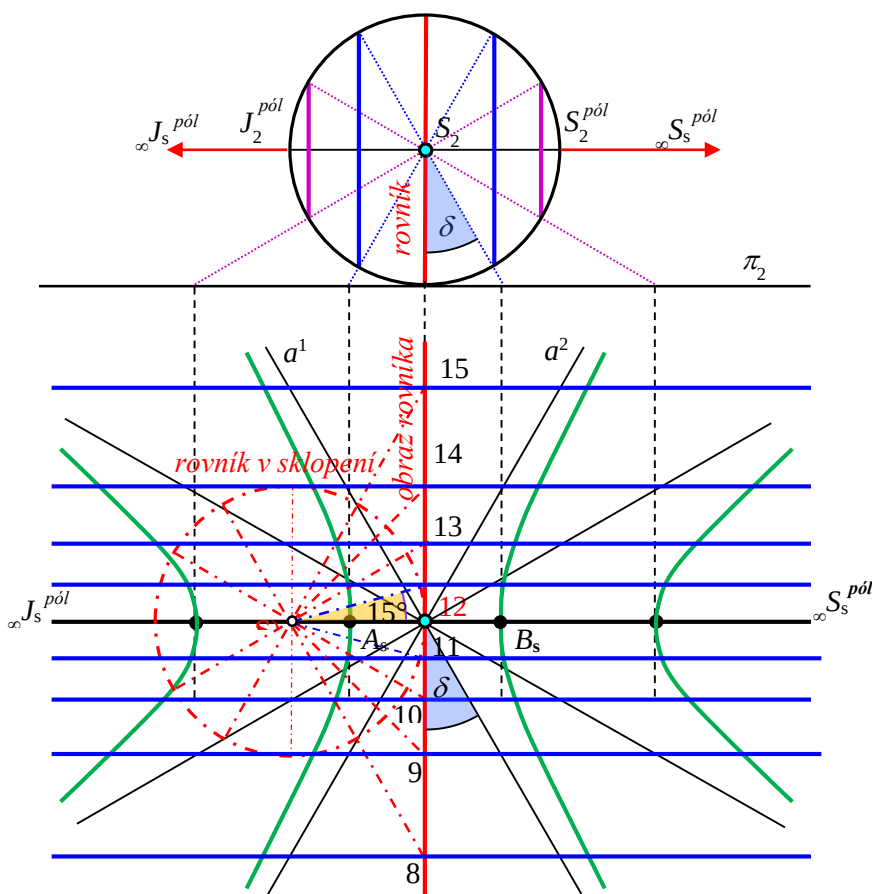


Obr. 8. Návrh ciferníka rovníkových slnečných hodín pre lokalitu Bratislava

3.3 Gnómonická azimutálna projekcia v rovníkovej polohe na polárnych slnečných hodinách

Polárne slnečné hodiny sú špeciálnym prípadom šikmých slnečných hodín, kedy rovina ciferníka leží v rovine rovnobežnej so zemskou osou, teda gnómon je rovnobežný s rovinou ciferníka. Tvar gnómonu je preto najčastejšie obdĺžnik ležiaci v rovine kolmej na rovinu ciferníka, s jednou stranou upevnenou na ciferníku a protiľahlá tvorí ukazovateľ. Priemetňa π sa dotýka guľovej plochy Γ v bode K , ktorý je na jej rovníku, jeho sférická šírka $U_K = 0^\circ$.

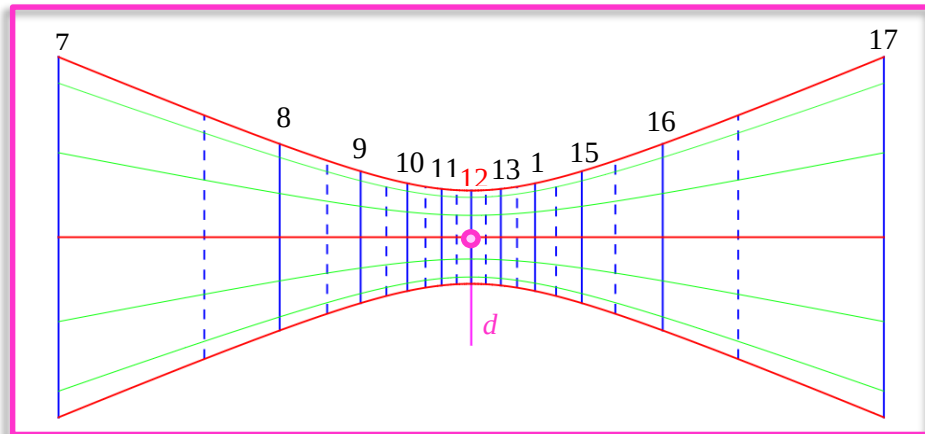
Čiary na ciferníku polárnych slnečných hodín sú obrazom poludníkov a rovnobežiek guľovej plochy Γ v gnómonickej azimutálnej projekcii v rovníkovej polohe (Obr. 9). Obraz rovníka je priamka, ktorá je stopou rovníkovej roviny. Póly $J_s^{pól}$ a $S_s^{pól}$ sa zobrazujú do nevlastných bodov kolmo na rovinu rovníka. Z dôsledku 3b vyplýva, že poludníky, ktoré tvoria hodinové čiary, sa zobrazujú do rovnobežných priamok v smere obrazu pólův, dourčíme ich pomocou bodov na rovníku, a to v sklopení rovníkovej roviny do priemetne. Rovnobežky, ktorých obrazy tvoria dátumové čiary, sa zobrazujú do hyperbol, ktoré určíme pomocou ich vrcholov A_s , B_s a asymptôt a^1 , a^2 , pričom uhol asymptôt s obrazom rovníka sa rovná sférickej šírke danej rovnobežky, na slnečných hodinách je to solárna deklinácia δ .



Obr. 9. Obraz zemepisnej siete v gnómonickej projekcii v rovníkovej polohe

Na obr. 10 je návrh čiar ciferníka (hodinové, polhodinové a dátumové čiary) polárnych slnečných hodín pre mesto Bratislava ($U_L = 48^\circ 8' 53,38''$, $V_L = 17^\circ 6' 24,26''$), ktoré sme vykreslili v softvérovom prostredí Wolfram Mathematica pomocou zobrazovacích rovníc (1) gnómonickej azimutálnej projekcie s použitím nasledujúcich parametrov:

$U_K = 0^\circ$, $V_K = V_L = 17^\circ 6' 24,26''$, $R = d$, d je dĺžka strany obdĺžnikového gnómonu kolmej na rovinu ciferníka (d zobrazená v mierke obrázka).



Obr. 10. Návrh ciferníka polárnych slnečných hodín pre lokalitu Bratislava

Na obr. 11 sú ukážky polárnych slnečných hodín. Vľavo sú pólové hodiny od Maximiliana Huntera, vpravo od Piersa Nicholsona nachádzajúce sa v centre Londýna.



Obr. 11. Príklady polárnych slnečných hodín (www.macmillanhunter.co.uk/bespoke-sundials-garden-sundials-public-art, www.sundials.info/types)

3.4 Gnómonická azimutálna projekcia vo všeobecnej polohe na horizontálnych a vertikálnych slnečných hodinách

Na horizontálnych a vertikálnych slnečných hodinách sú čiary na ciferníku obrazom poludníkov a rovnobežiek guľovej plochy Γ uvedenej v úvode tejto kapitoly v gnómonickej azimutálnej projekcii vo všeobecnej polohe. (Obr. 5). Priemetňa π sa dotýka guľovej plochy Γ v bode K , ktorého sférické súradnice U_K , V_K sú závislé od sférických súradníc U_L , V_L lokality slnečných hodín (Obr. 12).

Obraz rovníka je priamka, ktorá je stopou rovníkovej roviny a znázorňuje dátumovú čiaru v dni rovnodennosti. Póly $J^{pól}$ a $S^{pól}$ sa zobrazujú do začiatočného bodu P gnómonu na ciferníku slnečných hodín, z neho vychádzajú hodinové čiary, ktoré sú podľa dôsledku 3a obrazy poludníkov, teda tvoria zväzok polpriamok. Obraz lokálneho poludníka so sférickou dĺžkou V_L

[illegible]

9. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs104/en/>

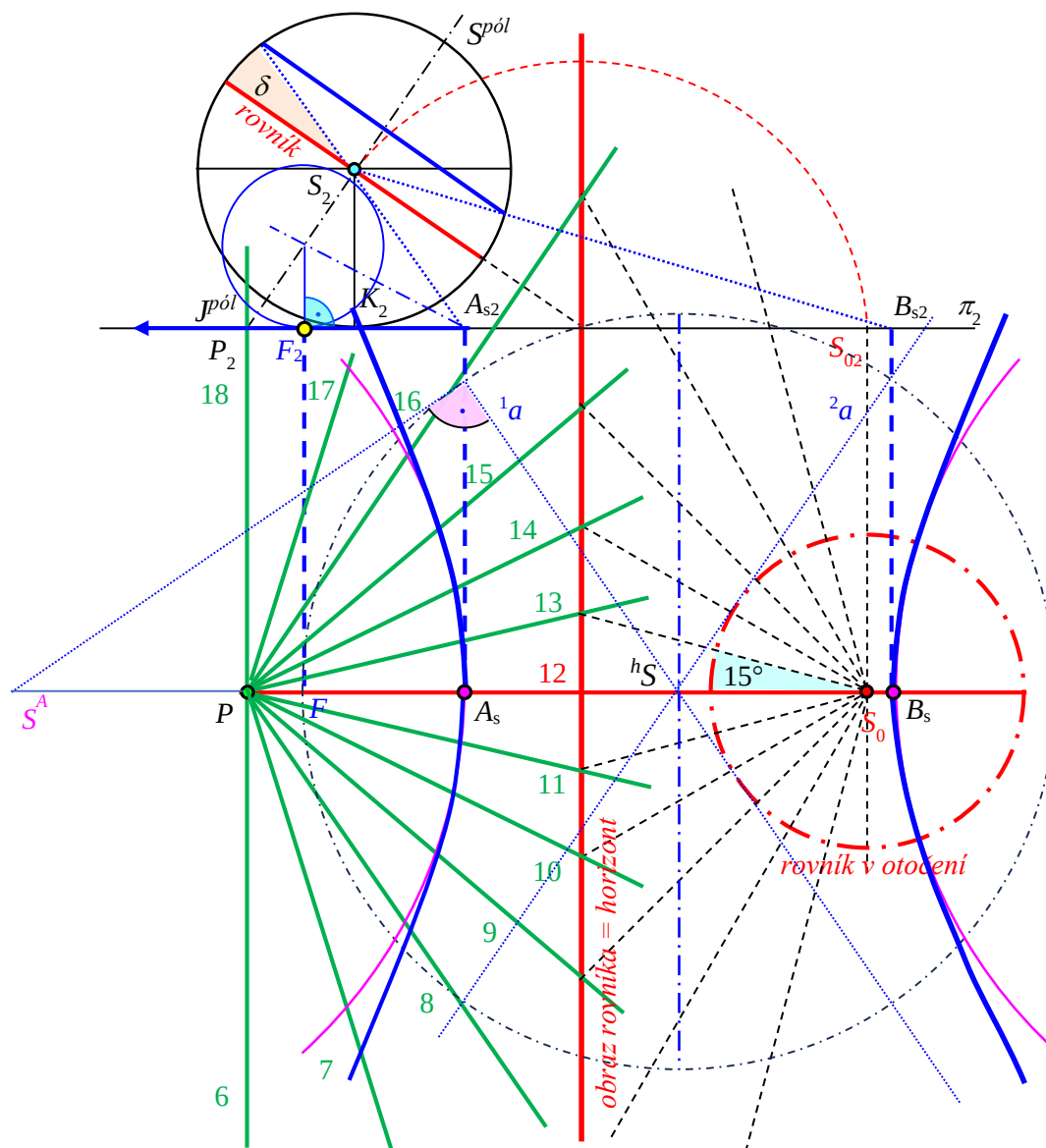


Table 1 Demographic characteristics of study population

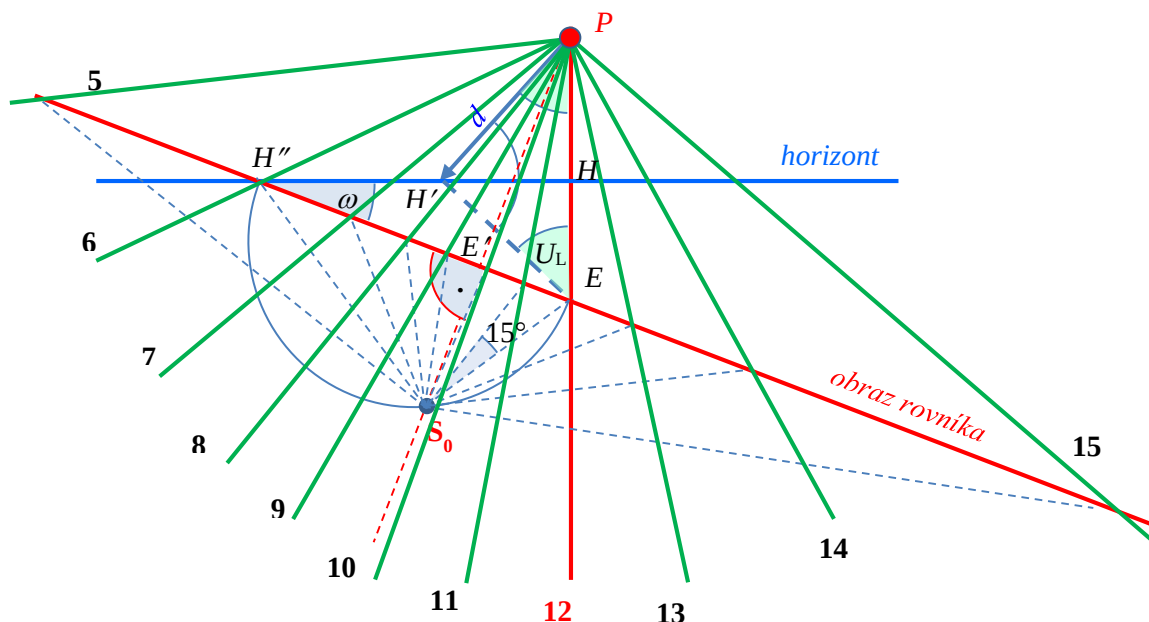
3.5 Geometrická konštrukcia hodinových čiar na všeobecných vertikálnych slnečných hodinách definovaných azimutom A

Nech lokálna sférická šírka miesta inštalácie zvislých slnečných hodín je U_L , P je bod gnómonu na ciferníku a d je dĺžka gnómonu. Azimut zvislej roviny ciferníka je A , pričom je určený ako uhol normály tejto roviny od poludníka (na severnej hemisfére od jeho južného smeru). V práci [2] je publikovaná nasledujúca konštrukcia hodinových čiar týchto vertikálnych slnečných hodín definovaných azimutom A (Obr. 13):

1. Zostrojíme pravouhlý trojuholník $\triangle PEH'$ daný: prepona PE je na vertikálnej priamke a ukazuje 12 hodín, $\sphericalangle(PEH') = U_L$, $\sphericalangle(EPH') = 90^\circ - U_L$ a $|PH'| = d$, kde d je dĺžka gnómonu.
2. Horizont prechádza bodom H' a obraz rovníka prechádza bodom E , pričom ich vzájomný uhol je ω , ktorý nazývame deklinácia (sklon) slnečných hodín a jeho veľkosť určíme zo vzťahu:

$$\omega = A \frac{90^\circ - U_L}{90^\circ}, \quad (2)$$

3. Priesečník horizontu a obrazu rovníka označíme H'' .
4. Zostrojíme bod S_0 ako jeden z priesečníkov Tálesovej kružnice s priemerom EH'' a kolmice bodom P na obraz rovníka (kde päť kolmice označíme E').
5. V bode S_0 zostrojíme priamky, ktoré s priamkou S_0E zvierajú násobky hodinového uhla 15° . Priesečníky týchto priamok s obrazom rovníka spojíme s bodom P , čím dostaneme hodinové čiary týchto vertikálnych slnečných hodín daných azimutom A roviny ciferníka.

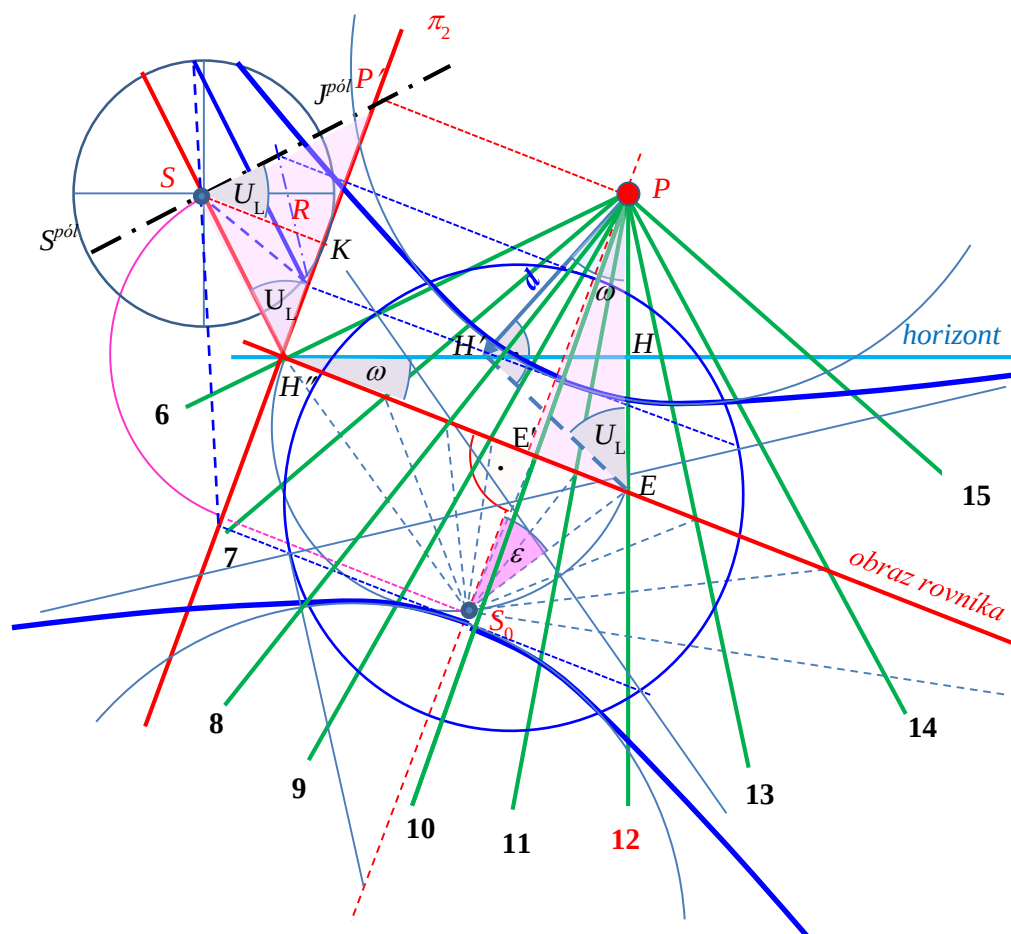


Obr. 13. Konštrukcia hodinových čiar na všeobecných vertikálnych slnečných hodinách definovaných azimutom A

3.6 Odvodenie parametrov gnómonickej projekcie na všeobecných vertikálnych slnečných hodinách definovaných azimutom A

V predchádzajúcej kapitole 3.5 sme uviedli konštrukciu hodinových čiar na vertikálnych slnečných hodinách definovaných azimutom A , z nej sme odvodili konštrukciu dátumových čiar, ktoré sú gnómonickým obrazom rovnobežiek guľovej plochy T , ktorej stred S je koniec gnómonu a dotýka sa roviny ciferníka, teda priemetne π .

Z princípu, ktorý sme opísali v kapitole 3.1, zostrojíme pomocný nárys guľovej plochy Γ (Obr. 14). Pomocný nárys priemetne π volíme bodom H'' kolmo na gnómonický obraz rovníka. Nárys stredu S , teda S_2 , odvodíme z jeho otočenej polohy S_0 , pomocou ktorého sme zostrojili priesečníky poludníkov a rovníka. Uhol nárysu osi rotácie guľovej plochy Γ a priemetne π je $90^\circ - U_L$, kde U_L je lokálna zemepisná šírka. Potom dotykový bod K má sférickú šírku $U_K = 90^\circ - U_L$. Ako sme spomenuli v kapitole 3.4, na hodinách inštalovaných v našich zemepisných šírkach sú obrazy rovnobežiek, teda dátumové čiary, hyperboly so spoločnou hlavnou osou na obraze poludníka, kolmého na obraz rovníka. V gnómonickej projekcii ich určíme pomocou ich vrcholov a ohniska rovnako, ako je opísané v kapitole 3.4.



Obr. 14. Konštrukcia dátumových čiar na všeobecných vertikálnych slnečných hodinách definovaných azimutom A

Pri použití zobrazovacích rovníc gnómonickej azimutálnej projekcie potrebujeme odvodiť tiež sférickú dĺžku V_K kartografického pólu K a polomer R guľovej plochy Γ . Poludník so sférickou dĺžkou V_L lokálneho poludníka ukazuje poludnie, teda jeho obraz v gnómonickej projekcii

prechádza bodom E ležiacom na rovníku. Gnómonický obraz poludníka prechádzajúceho bodom K so sférickou šírkou V_K prechádza bodmi E' a S_0 , odkiaľ platí:

$$V_K = V_L - \sphericalangle(ES_0E') \quad (3)$$

Nasledujúcim postupom (Obr. 14) odvodíme vzťah pre výpočet uhla $\varepsilon = \sphericalangle(ES_0E')$:

$$|ES_0| = R \sin U_L,$$

$$|E'P| = |H'K| + |KP| = R (\cotg U_L + \tg U_L).$$

Keďže $\sphericalangle(EPE') = \omega$, potom po substitúcii:

$$|EE'| = |PE'| \tg \omega = R \tg \omega (\cotg U_L + \tg U_L).$$

Potom pre tangens uhla ε platí:

$$\tg \varepsilon = \frac{|EE'|}{|E'S_0|} = \frac{R \tg \omega (\tg U_L + \cotg U_L)}{R \sin U_L},$$

odkiaľ:

$$\varepsilon = \arctg \left(\frac{\tg \omega}{\sin^2 U_L \cos U_L} \right). \quad (4)$$

Po dosadení (4) do (3) dostaneme výsledný vzťah pre výpočet sférickej dĺžky V_K :

$$V_K = V_L - \arctg \left(\frac{\tg \omega}{\sin^2 U_L \cos U_L} \right). \quad (5)$$

Z uvedených vlastností odvodíme tiež vzťah pre výpočet polomeru R guľovej plochy. Poloha obrazu rovníka závisí od dĺžky d gnómonu, lokálnej sférickej šírky U_L a od uhla ω , ktorý je určený z azimutu A roviny ciferníka. V trojuholníku $\triangle PEH'$ je dĺžka úsečky PE :

$$|PE| = \frac{d}{\sin U_L}.$$

V trojuholníku $\triangle PEE'$, kde $\sphericalangle(EPE') = \omega$, určíme dĺžku úsečky PE' :

$$|PE'| = |PE| \cos \omega = d \frac{\cos \omega}{\sin U_L}. \quad (6)$$

Iný spôsob, ako určíme dĺžku PE' , je z veľkosti a polohy guľovej plochy I , teda z jej polomeru R a z lokálnej sférickej šírky U_L , potom dostaneme:

$$|PE'| = |H'K| + |KP'| = R (\cotg U_L + \tg U_L). \quad (7)$$

Z rovnosti pravých strán rovníc (6) a (7) dostaneme vzťah pre výpočet polomeru R guľovej plochy I :

$$R = \frac{d \frac{\cos \omega}{\sin U_L}}{\tg U_L + \cotg U_L}.$$

Po úprave:

$$R = d \cos \omega \cos U_L. \quad (8)$$

Tento vzťah môžeme preformulovať:

$$R = d \cos \omega \cos (90^\circ - U_K). \quad (9)$$

Tieto vzťahy budeme v ďalších kapitolách aplikovať pre viaceré typy slnečných hodín, a to pre horizontálne, južné vertikálne, všeobecné vertikálne definované azimutom A .

3.7 Aplikácia odvodených parametrov gnómonickej projekcie na horizontálnych slnečných hodinách

Rovina ciferníka horizontálnych slnečných hodín je rovnobežná s dotykovou rovinou referenčnej plochy Zeme a gnómon je rovnobežný s osou rotácie Zeme, teda s rovinou ciferníka zvierá uhol, ktorý sa rovná sférickej šírke U_L lokality inštalácie hodín. V kapitole 3.1 sme opísali princíp použitia gnómonickej projekcie guľovej plochy Γ do roviny π , ktorá sa jej dotýka v bode K . Pre sférické súradnice bodu K platí:

$$\begin{aligned} \text{sférická šírka } U_K &= U_L, \\ \text{sférická dĺžka } V_K &= V_L, \end{aligned} \quad (10)$$

kde U_L a V_L sú zemepisné súradnice miesta inštalácie slnečných hodín.

Keďže rovina hodín je horizontálna, uhol $\omega = 0^\circ$, potom po dosadení do vzťahu (9) pre polomer R guľovej plochy Γ platí:

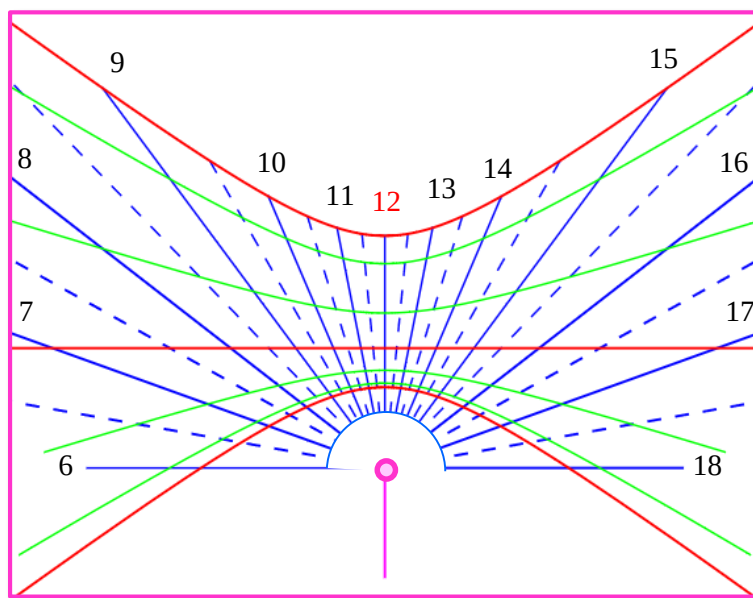
$$R = d \cos(90^\circ - U_L), \quad (11)$$

kde d je dĺžka gnómonu.

Uvedené parametre U_K , V_K , R gnómonickej azimutálnej projekcie určené podľa vzťahov (10) a (11) sme aplikovali pri vykreslení hodinových, polhodinových a dátumových čiar horizontálnych slnečných hodín v lokalite Bratislavy so sférickými súradnicami:

$$U_L = 48^\circ 8' 53,38'', V_L = 17^\circ 6' 24,26''.$$

Vykreslenie čiar ciferníka (hodinové, polhodinové a dátumové čiary) horizontálnych slnečných hodín pre Bratislavu (Obr. 15) sme realizovali v softvérovom prostredí Wolfram Mathematica [9] pomocou zobrazovacích rovníc (1). Dĺžka d gnómonu je vykreslená v mierke obrázka.



Obr. 15. Návrh ciferníka horizontálnych slnečných hodín pre lokalitu Bratislava

Na obr. 16 sú príklady horizontálnych slnečných hodín, ktorých autorom je Milan Baran zo Sliaču. Vľavo sú slnečné hodiny z roku 2010 nachádzajúce sa v centre obce Babiná a vpravo v blízkosti Kultúrneho centra v Bernolákove [3].



Obr. 16. Príklady horizontálnych slnečných hodín (foto: Ladislav Barabás) [3]

3.8 Aplikácia odvodených parametrov gnómonickej projekcie na južných vertikálnych slnečných hodinách

Ciferník vertikálnych slnečných hodín leží v normálovej rovine k referenčnej ploche Zeme, a keďže gnómon je rovnobežný s osou rotácie Zeme, zvierá s rovinou ciferníka uhol: $90^\circ - U_L$, kde U_L je sférická šírka miesta hodín. Južné vertikálne hodiny majú rovinu ciferníka v smere kolmom na dotyčnicu k poludníku (na severnej polguli smerujúcu na juh), teda normála zvierá s týmto poludníkom uhol $A = 0^\circ$.

Priemetňa gnómonickej projekcie je vo všeobecnej polohe (Obr. 5) a dotýka sa guľovej plochy Γ v bode K , ktorého sférické súradnice sú:

$$\begin{aligned} \text{sférická šírka } U_K &= 90^\circ - U_L, \\ \text{sférická dĺžka } V_K &= V_L, \end{aligned} \quad (12)$$

kde U_L a V_L sú sférické súradnice miesta inštalácie hodín.

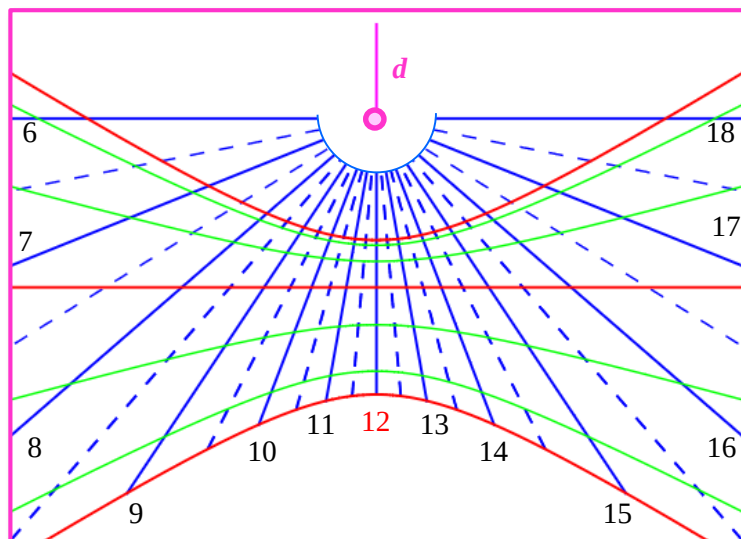
Pre južné vertikálne hodiny platí, že obraz rovníka (čiara dní rovnodennosti) je priamka totožná s horizontom, teda do vzťahu (8) alebo (9) dosadíme $\omega = 0^\circ$, potom pre polomer R guľovej plochy Γ platí:

$$R = d \cos U_L, \quad (13)$$

kde d je dĺžka gnómonu.

Na obr. 17 je návrh čiar ciferníka južných vertikálnych hodín, ktoré sme vykreslili v softvérovom prostredí Wolfram Mathematica [9] pomocou zobrazovacích rovníc (1). Uvedené parametre U_K , V_K , R gnómonickej azimutálnej projekcie vo všeobecnej polohe určené pomocou vzťahov (12) a (13) sme aplikovali pri vykreslení hodinových, polhodinových a dátumových čiar južných vertikálnych slnečných hodín v lokalite Bratislavy so sférickými súradnicami: $U_L = 48^\circ 8' 53,38''$, $V_L = 17^\circ 6' 24,26''$. Dĺžka d gnómonu je zobrazená v mierke obrázka.

Na obr. 18 sú príklady viacerých slnečných hodín. Vľavo je ciferník starovekých južných vertikálnych slnečných hodín z Údolia Kráľov v Egypte (asi 1500 pr. Kr.) [6], v strede a vpravo sú vertikálne a horizontálne slnečné hodiny nachádzajúce sa v areáli Observatória a planetária v Brne (foto: Vajsáblová).



Obr. 17. Návrh ciferníka južných vertikálnych slnečných hodín pre lokalitu Bratislava



Obr. 18. Ukážky slnečných hodín

3.9 Aplikácia odvodených parametrov gnómonickej projekcie na všeobecných vertikálnych slnečných hodinách definovaných azimutom A

Rovina ciferníka všeobecných vertikálnych slnečných hodín definovaných azimutom A je v normálovej rovine referenčnej plochy Zeme, pričom normála tejto roviny zvierá s poludníkom (na severnej polguli smerujúcim na juh) uhol A . Keďže gnómon je rovnobežný s osou rotácie Zeme, jeho uhol s rovinou ciferníka je $90^\circ - U_L$, kde U_L je sférická šírka miesta hodín.

Priemetňa gnómonickej projekcie je vo všeobecnej polohe (Obr. 5) a dotýka sa guľovej plochy Γ v bode K , ktorého sférické súradnice sú:

$$\text{sférická šírka } U_K = 90^\circ - U_L,$$

sférickú dĺžku V_K určíme zo vzťahu (5):

$$V_K = V_L - \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin^2 U_L \cos U_L}\right). \quad (14)$$

kde U_L a V_L sú sférické súradnice miesta inštalácie hodín a deklinácia (sklon) hodín ω je definovaná pomocou (2):

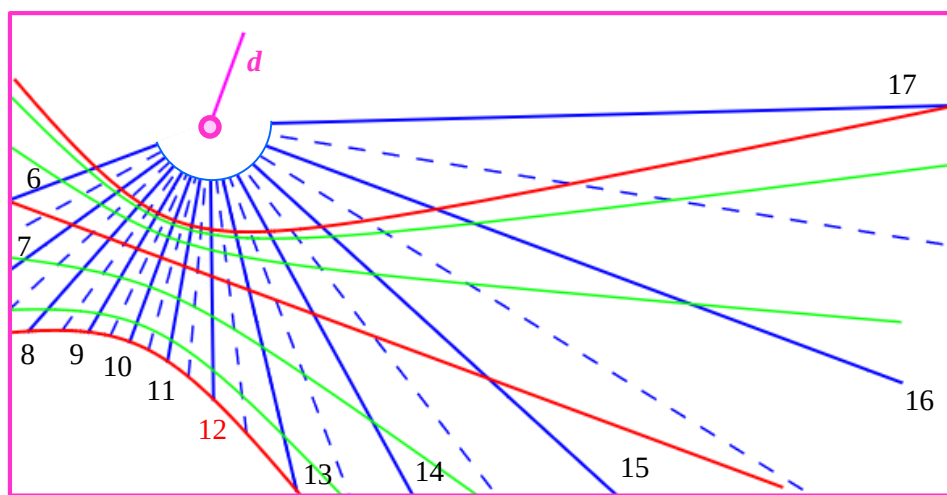
$$\omega = A \frac{90^\circ - U_L}{90^\circ}. \quad (15)$$

Polomer R guľovej plochy Γ určíme pomocou (8) alebo (9):

$$R = d \cos \omega \cos U_L, \quad (16)$$

kde d je dĺžka gnómonu.

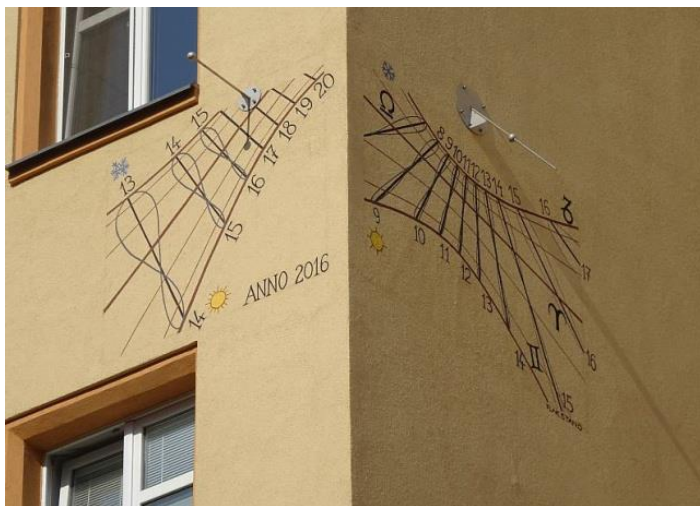
Na obr. 19 je návrh čiar ciferníka vertikálnych hodín daných azimutom A , ktoré sme vykreslili v softvérovom prostredí Wolfram Mathematica [9] pomocou zobrazovacích rovníc (1) s aplikáciou matice rotácie okolo začiatku súradnicovej sústavy o uhol ω , tzv. deklináciu hodín určenú zo vzťahu (15). Uvedené parametre U_K , V_K , R gnómonickej azimutálnej projekcie vo všeobecnej polohe určené podľa vzťahov (14) a (16) sme aplikovali pri vykreslení hodinových, polhodinových a dátumových čiar vertikálnych slnečných hodín daných azimutom $A = 25^\circ$ v lokalite Bratislavy so sférickými súradnicami: $U_L = 48^\circ 8' 53,38''$, $V_L = 17^\circ 6' 24,26''$. Dĺžka d gnómonu je zobrazená v mierke obrázka. Na ciferníku vidíme naklonenie čiar rovnodennosti oproti horizontálnemu smeru o uhol ω .



Obr. 19. Návrh ciferníka vertikálnych slnečných hodín s azimutom $A = 25^\circ$ pre lokalitu Bratislava

Na obr. 20 je dvoch ukážka všeobecných vertikálnych slnečných hodín nachádzajúcich sa na fasáde domu na Bezručovej ulici, ktorých zhotoviteľ je Vlastimil Zigmund [3]. Tieto hodiny okrem hodinových a dátumových čiar obsahujú aj krivky v tvare osmičky, tzv. analemy. Analemu môžeme zjednodušene charakterizovať ako krivku, ktorá znázorňuje nerovnomernosť pravého slnečného času spôsobenú naklonením zemskej osi voči rovine dráhy Slnka a eliptickým tvarom dráhy obehu Zeme okolo Slnka [8].

Na obr. 21 sú ďalšie príklady všeobecných vertikálnych slnečných hodín. Vľavo sú slnečné hodiny, ktoré sa nachádzajú na stene Zámku v Českom Krumlove, a to na priečelí Renesančného domu. Hodiny majú precízne znázornené nielen hodinové, ale aj dátumové čiar a ich zvláštnosťou je maľba v ľavom dolnom rohu, mohlo by ísť o zobrazenie Českého Krumlova. Vpravo sú západné slnečné hodiny z roku 1750, ktoré sú na domčeku so zvonnicou v Červenom Kláštore.



Obr. 20. Vertikálne hodiny na dvoch stenách s rôznymi azimutmi A na Bezručovej ulici v Bratislave [3]



Obr. 21. Príklady vertikálnych hodín, vľavo na stene Zámku v Českom Krumlove (foto: Vajsábllová), vpravo na domčeku so zvoncou v Červenom Kláštore [3]

3.10 Nerovinné slnečné hodiny

Na nerovinných slnečných hodinách sa neaplikuje gnómonická projekcia do roviny (azimutálna), avšak ich princíp je založený na gnómonickej projekcii na plochu, kam dopadá tieň gnómonu. Medzi najčastejšie používané plochy na nerovinných slnečných hodinách patria guľová plocha, valcová plocha a kužeľová plocha.

Na obrázkoch 22 a 23 je niekoľko ukážok nerovinných slnečných hodín. Na obr. 22 vľavo sú kužeľové slnečné hodiny, ktoré sú inštalované na parkovisku pred termálnym kúpaliskom v Podhájskej a vpravo je replika hemisférických slnečných hodín vystavená v Kórejskom národnom palácovom múzeu (areál paláca Gyeongbokgung) v Soule v Južnej Kórei. Na obr. 23 sú ukážky dvoch valcových slnečných hodín z Bratislavy. Hodiny vľavo je možné vidieť v areáli Ekonomickej univerzity v Bratislave a boli inštalované pri príležitosti

vybudovania Prístavného mostu. Vpravo sú valcové slnečné hodiny na fasáde budovy Gymnázia na Grösslingovej ulici v Bratislave.



Obr. 22. Ukážky nerovinných slnečných hodín, vľavo kužeľové slnečné hodiny v Podhájskej [3], vpravo replika hemisférických slnečných hodín v Soule (foto: Vajsáblová)



Obr. 23. Ukážky valcových slnečných hodín [3], vľavo v areáli Ekonomickej univerzity v Bratislave, vpravo na Gymnázium na Grösslingovej ulici v Bratislave

4 Záver

Slnečné hodiny nie sú iba história. Technické múzeum v Košiciach publikovalo v roku 2022 [3] prehľad 245 slnečných hodín nachádzajúcich sa na území Slovenska a tento počet ukázal nárast ich počtu o 117 slnečných hodín od roku 1977.

Pochopenie geometrického princípu a súvislosti s polohou Zeme a Slnka považujeme za dôležité a obohacujúce pre každého obdivovateľa slnečných hodín. V článku sme ukázali princíp použitia gnómonickej azimutálnej projekcie v pólovej, rovníkovej a všeobecnej polohe pri tvorbe hodinových a dátumových čiar na rovinných slnečných hodinách, a to konštrukčne aj analyticky. Z prepojenia týchto metód sme odvodili vzťahy pre výpočet parametrov potrebných pre analytické riešenie, čo umožňuje ich aplikáciu v softvérovom prostredí. Tieto parametre sme špecifikovali pre jednotlivé typy rovinných slnečných hodín a ukázali ich

aplikáciu pri vykreslení čiar na ciferníkoch slnečných hodín v softvérovom prostredí Wolfram Mathematica.

PodĎakovanie

Tento článok je podporovaný grantom VEGA 1/0626/25.

Literatúra

- [1] BLATEYRON, F. *Sundials&Astrolabes*. Reference manual for Shadows Pro. Copyright 2014-2025 by Francois Blateyron.
- [2] FERKO, J. *Projekt slnečných hodín*. Bakalárska práca, STU, Bratislava 2001
- [3] MAJERNÍK, M. SEMANOVÁ, M. *Slnečné hodiny a horológiá na Slovensku*. Slovenské technické múzeum, Košice, 2022. Frégier points revisited. In *South Bohemia Mathematical Letters* 26, 2018, pp. 84-92.
- [4] VAJSÁBLOVÁ, M. *Matematické základy kartografie*. 1. vyd. Bratislava: Spektrum STU, 2021. 443 s.
- [5] ZNÁŠIK, M. Slnečné hodiny. In *Brána do vesmíru*. Kysucká hviezdáreň v Kysuckom Novom Meste. Dostupné na:
<https://www.branadovesmiru.eu/odborne-clanky/slnečne-hodiny.html>
- [6] <https://en.wikipedia.org/wiki/Sundial>
- [7] [https://sk.wikipedia.org/wiki/Slnovrat_\(astron%C3%B3mia\)](https://sk.wikipedia.org/wiki/Slnovrat_(astron%C3%B3mia))
- [8] <https://mat.fsv.cvut.cz/solc/wwwpages/analema2/default.html>
- [9] WOLFRAM Mathematica 13.0. Copyright 1988-2020 Wolfram Research, Inc.

Doc. RNDr. Margita Vajsáblová, PhD.

Mgr. Juliana Beganová, PhD.

Katedra matematiky, Stavebná fakulta STU v Bratislave
Radlinského 11, 810 05 Bratislava, Slovenská republika
e-mail: gitkavaj@gmail.com, juliana.beganova@stuba.sk

Prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. – laureát Ceny Petra Pavla Bartoša 2025

Daniela Velichová

Abstrakt

V článku informujeme čitateľov o Cene Petra Pavla Bartoša 2025, ktorú Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF, udelila dlhoročnému spolupracovníkovi SSGG, nášmu váženému kolegovi prof. RNDr. Jánovi Čižmárovi, CSc.

Kľúčové slová: Cena Petra Pavla Bartoša, Slovenská matematická spoločnosť, JSMF, osobnosti slovenskej matematiky

Abstract

In this paper we inform readers about Peter Pavol Bartoš prize 2025 that was awarded by the Slovak Mathematical Society, JSMF section, to long-time collaborator of SSGG, our esteemed colleague prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc.

Keywords: Peter Pavol Bartoš prize, Slovak Mathematical Society, JSMF, personalities of Slovak mathematics

1 Cena Petra Pavla Bartoša

Jednota slovenských matematikov a fyzikov (JSMF), sekcia Slovenská matematická spoločnosť (SMS), vyhlasujú pravidelne súťaž o Cenu Petra Pavla Bartoša, ktorá je určená pre všetkých učiteľov matematiky na všetkých stupňoch a typoch škôl v Slovenskej republike. Cena je udeľovaná výnimočným pedagógom, ktorých aktívna pedagogická prax je preukázateľná najmenej počas 5 školských rokov, a ktorých prínos bol mimoriadne významný.

V roku 2025 komisia ustanovená Výborom JSMF rozhodla na základe návrhu Výboru SMS o udelení tejto ceny významnej osobnosti slovenskej matematiky, pedagógovi, ktorý sa nezmazateľným spôsobom zapísal do histórie vyučovania matematiky na Slovensku, vzácnemu dlhoročnému členovi a spolupracovníkovi Slovenskej spoločnosti pre Geometriu a Grafiku, kolegovi a priateľovi prof. RNDr. Jánovi Čižmárovi, CSc.

Život profesora Čižmára je úzko spätý s matematikou, jeho životopisné spomienky sú malými dejinami slovenského školstva v 20. storočí, plnými konkrétnych osobností, ktoré počas svojich štúdií a pedagogickej kariéry stretol, vychoval, a s ktorými spolupracoval. Na slávnostnom podujatí, ktoré sa konalo pri príležitosti Dňa učiteľov v roku 2019, si profesor Čižmár prevzal za svoju celoživotnú prácu a celoživotný jedinečný prínos v oblasti teórie vyučovania matematiky a histórie matematiky Veľkú medailu sv. Gorazda, najvyššie školské vyznamenanie, ktoré udeľuje minister školstva.

Profesor Ján Čižmár pôsobil 52 rokov na Univerzite Komenského. Do praxe pripravil stovky učiteľov matematiky, deskriptívnej geometrie a informatiky. Pôsobil tiež ako profesor na univerzitách v Gazi, Viedni, Drážďanoch, na UKF v Nitre a na KU v Ružomberku. Okrem odborných a vedeckých článkov je aj autorom učebníc matematiky pre základné školy, vysokoškolských učebných textov, a tiež významných knižných publikácií. Okrem rozsiahlych Dejín matematiky nedávno dokončil slovenský preklad jedného zo základných diel matematiky a geometrie – Euklidových Základov. Zasluky profesora Čižmára ocenil na slávnostnom otvorení akademického roka 2022/23 rektor UK Marek Števček Zlatou medailou UK, Obr. 1.



Obr. 1. Prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. prevzal Zlatú medailu UK, [4]

Profesor Čižmár venoval štúdiu a napísaniu knihy Dejiny matematiky: od najstarších čias po súčasnosť [1] desiatky rokov intenzívneho štúdia a tvorivej práce. Vytvoril dielo v takom rozsahu a hĺbke spracovania, ktoré na Slovensku doteraz nemá obdoby. Text predkladá čitateľom v jedenástich kapitolách komplexný pohľad na matematiku - kráľovnú vied od predhistorickej doby až po súčasnosť. Poskytuje spoľahlivé a overené fakty, presvedčivé a akceptovateľné závery o dejinnom vývoji matematiky, o najvýznamnejších matematikoch sveta a čiastočne aj o osobnostiach matematiky na Slovensku. Informuje tiež o najdôležitejších súčasných matematických ústavoch a prináša prehľad nositeľov Fieldsovej medaily. Pre veľký úspech diela, ktorého prvé vydanie bolo úplne rozobraté, vydavateľstvo Perfekt zabezpečilo už aj jeho druhé vydanie [2].

Profesor Čižmár je autorom prvého slovenského prekladu a komentárov najslávnejšej knihy s matematickým obsahom v celej histórii matematiky – Euklidovho diela s prostým názvom Základy (Stoicheia). V trinástich kapitolách sú v obsahovej a logickej postupnosti zachytené a vysoko odborne komentované temer všetky originálne prínosy antickej gréckej geometrie, aritmetiky a algebry, ktoré starogrécky učenec, mysliteľ a pedagóg Euklides zhrnul, systematicky usporiadal a didakticky pozoruhodne prezentoval počas pôsobenia okolo roku 300 p. n. l. vo vrcholnej vedeckej a umeleckej inštitúcii v hlavnom meste egyptskej ríše Alexandrii, v „akadémii“ Museion, [3].

Životný príbeh profesora Čižmára bol detailne spracovaný v rámci projektu KEGA, v edícii Osobnosti slovenskej matematiky – životné vzory pre budúce generácie II [5], na Katolíckej univerzite v Ružomberku, ako 9. diel tejto edície [6] - [7], v ktorom je tiež uvedený prehľad temer všetkých publikácií profesora Čižmára. Jeho významné publikácie v časopise G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku, detailne uvádzame nižšie.

Profesor Čižmár je od vzniku Slovenskej spoločnosti pre Geometriu a Grafiku až dodnes jej aktívnym členom a zanieteným spolupracovníkom výboru SSGG. Svojim pôsobením v redakčnej rade periodika spoločnosti, ktorým je časopis G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku, prispel recenziami niekoľkých prihlásených článkov ku odbornej kvalite časopisu, pričom obohatil tiež obsah nášho periodika svojimi zaujímavými príspevkami, ktoré boli publikované postupne v nasledujúcich číslach:

ročník 1 (2004), číslo 1 – Násobnosť v algebrickej geometrii (historický vývoj pojmu)
ročník 2 (2005), číslo 4 – Perspektívy geometrie na začiatku 21. storočia
ročník 7 (2010), číslo 14 – Päťdesiate výročie vzniku Katedry geometrie Prírodovedeckej
fakulty Univerzity Komenského
ročník 8 (2011), číslo 16 – Algebrická geometria v 20. storočí
ročník 10 (2013), číslo 20 – O istej kubickej involúcii v $P^n(k)$
ročník 11 (2014), číslo 22 – O istej kvadratickej involúcii v $P^n(k)$
ročník 12 (2015), číslo 23 – O istej kvadratickej biracionálnej korešpondencii v $P^n(k)$
ročník 13 (2016), číslo 25 – O istej cyklickej biracionálnej korešpondencii v $P^n(k)$
ročník 14 (2017), číslo 28 – Vyšli Dejiny matematiky
ročník 18 (2021), číslo 36 – Pripravuje sa vydanie prekladu diela Euklides: Základy

Abstrakty príslušných článkov, resp. od ročníka 13 (2016), čísla 25 aj celé publikované články, sú k nahliadnutiu na stránke spoločnosti, [8].

Veľmi významnou mierou profesor Čižmár tiež prispel k obohateniu odborného programu pravidelných konferencií, ktoré Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku organizovala ako Sympóziá o počítačovej geometrii v rokoch 1991 – 2014. Od roku 2015 sme nadviazali na pôvodnú tradíciu z rokov 1980 – 1990 organizovania spoločných konferencií v spolupráci s Českou spoločnosťou pro geometrii a grafiku, striedavo vždy v jednej z republík SR a ČR, pričom ostatná spoločná 11. Slovensko-česká konferencia o geometrii a grafike sa konala v dňoch 1. – 4. septembra 2025 na Slovensku, v sídle SSGG na Strojníckej fakulte STU v Bratislave. Profesor Čižmár prezentoval na týchto stretnutiach zaujímavé odborné alebo metodické príspevky, alebo príspevky z histórie matematiky. Zúčastnil sa spolu 19 sympózií a konferencií v rokoch 1995 – 2004, 2008 – 2015 a 2021. Abstrakty príspevkov, ktorých plné znenie bolo publikované v zborníkoch konferencií, sú dostupné na stránke spoločnosti [9] v sekcii Archív.

Výbor Slovenskej spoločnosti pre Geometriu a Grafiku v mene všetkých členov spoločnosti srdečne gratuluje profesorovi Jankovi Čižmárovi k udeleniu ceny Petra Pavla Bartoša 2025 za jeho mimoriadne cenné celoživotné pôsobenie v oblasti matematického vzdelávania na Slovensku. Prajeme laureátovi tohto zaslúženého ocenenia veľa zdravia a životnej energie, aby sme sa mohli aj v blízkej budúcnosti ešte tešiť na nové diela z jeho autorskej dielne, ktoré usilovne pripravuje.

Milý Janko, prijmi naše úprimné a srdečné blahoželanie k udeleniu ceny, prejavu pocty osobnosti slovenskej matematiky, ktorá si takéto ocenenie právom zaslúži!

Literatúra

- [1] ČIŽMÁR, J. *Dejiny matematiky: od najstarších čias po súčasnosť*. 1. vydanie, Perfekt, Bratislava 2017. 896 s.
- [2] ČIŽMÁR, J. *Dejiny matematiky: od najstarších čias po súčasnosť*. 2. vydanie, Perfekt, Bratislava 2020. 896 s.
- [3] ČIŽMÁR, J. *Euklides: Základy*. 1. vydanie, Perfekt, Bratislava 2022. 728 s.

- [4] https://uniba.sk/spravodajsky-portal/detail-aktuality/browse/8/back_to_page/nasa-univerzita/article/matematik-jan-cizmar-matematika-nema-byt-strasiak/
- [5] <https://www.ku.sk/fakulty-katolickej-univerzity/pedagogicka-fakulta/veda-a-vyskum/projekty/osobnosti-slovenskej-matematiky-zivotne-vzory-pre-buduce-generacie-ii.html>
- [6] LENGYELFALUSY, T., TKAČIK, Š. *Osobnosti slovenskej matematiky – Ján Čižmár*. 9. diel. Verbum PF UK, Ružomberok 2023. 93 s.
- [7] LENGYELFALUSY, T., TKAČIK, Š. *Osobnosti slovenskej matematiky – inšpirácia a životné vzory pre budúce generácie – prof. Ján Čižmár*. In *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok*. Online. Roč. XXII., č. 5, s. 71-75, 2023. Dostupné na: <https://doi.org/10.54937/ssf.2023.22.5.71-75>
- [8] <http://www.ssgg.sk/G/Abstrakty/indexs.html>
- [9] <http://www.ssgg.sk/scg/>

Daniela Velichová

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: daniela.velichova@stuba.sk

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

is a non-profit scientific organisation with the objective
to stimulate scientific research and teaching methodology
in the fields of geometry and computer graphics
and to foster international collaboration.

SSGG informs on organisation of different scientific events related to geometry and computer graphics organised in Slovakia.

SSGG provides a platform for donations and sponsorship of scientific workers in the related fields (especially young ones) in order to stimulate scientific development in these disciplines and to enhance the quality of geometry and graphics education of engineers and designers particularly.

Society is publisher of G, the first Slovak scientific journal for geometry and graphics.

All other activities dealing with dissemination of knowledge in the fields of geometry and graphics are welcome, discussion forum on Internet, software market, workshops, Internet courses and chats, etc., and can be provided within the scope of society activities.

Slovak Society for Geometry and Graphics is a collective member of ISGG - International Society for Geometry and Graphics.

SSGG

Institute of Mathematics and Physics
Faculty of Mechanical Engineering
Slovak University of Technology in Bratislava
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Abstracts

J. Gielis: Generalised intrinsic and extrinsic

Aim of this paper is to introduce the Gielis superformula (transformation) and to explain its connections to development of striking geometric theories within the historical context of the 18th - 21st century.

E. Molnár: On Kárteszi type triangle geometry by geometric (Grassmann-Clifford) algebra

To Memory of Ferenc Kárteszi I follow His Didactical Credo. Draw triangles outward on sides of a given triangle ABC in the Euclidean plane, say $AB\bar{C}$, $BC\bar{A}$, $CA\bar{B}$, and consider the segments $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$. Special starting conditions guarantee that the above segments intersect each other in a point K , called Kárteszi points to His Honour. The later (~ 1850) strong and very useful machinery (by Grassman and Clifford, in analogy of vector cross product) serves as a unified method and further interesting discussions.

M. Vajsáblová, Juliana Beganová: Gnomonic azimuthal projection on sundial dial

We can look at sundials from the perspective of history, philosophy, astronomy, art, but also mathematics and geometry. Sundial dials contain images of the meridians and parallels of a spherical surface in a gnomonic azimuthal projection. The aim of the paper is to show these connections, to formulate the constructions of the dial lines of several types of sundials using gnomonic azimuthal projection. The main contribution of this paper is in the creation of formulas for determining its parameters in relation to the geographical location of the dial plane, its orientation and the length of gnomon of sundial. In Wolfram Mathematica software, we applied these derived formulas in the rendering of the dials of various sundials.

D. Velichová: Prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. – laureate of the Peter Pavol Bartoš Prize 2025

In this paper we inform readers about Peter Pavol Bartoš prize 2025 that was awarded by the Slovak Mathematical Society, JSMF section, to long-time collaborator of SSGG, our esteemed colleague prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc.

Edited by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

Editor-in-Chief:

Daniela Velichová

Managing Editors:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Editorial Board:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsáblova

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics

IČO: 31 816 304

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

Frequency:

One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

G is indexed in: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG December 2025, Bratislava, No. 2/2025

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific

www.ssgg.sk